Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Hélène Davaux

La K-aire selon M. Gromov

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 9-35

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 9–35

LA K-AIRE SELON M. GROMOV

Hélène DAVAUX

Résumé

Le but de ce texte est de présenter un nouvel invariant riemannien défini par M. Gromov en 1996 et appelé K-aire. Cet invariant entretient un lien très étroit avec la courbure scalaire. Après en avoir donné une définition, nous nous attachons à étudier des exemples et à décrire les principaux résultats connus à son sujet.

La K-aire est un nouvel invariant riemannien dû à M. Gromov [Gro96, §4 & 5]. D'après l'auteur lui-même, le « K » met en valeur le lien très fort qu'entretient la K-aire avec la K-théorie et la courbure, tandis que le mot « aire » insiste sur la nature 2-dimensionnelle de cet invariant. En schématisant :

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\text{K-aire}} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \text{K-théorie} \arrow[d] & \text{Courbure} \arrow[d] & \text{Objet 2-dimensionnel} \arrow[d] \\ \text{Fibré } X & \|R^X\| & \text{K-aire}(M,\lambda^2 g) = \lambda^2\,\text{K-aire}(M,g) \end{tikzcd}$$

Cet article se décompose ainsi :

Dans la Section 1, nous donnons, en même temps que la définition de la K-aire, les outils pour la comprendre (norme de la courbure, nombre de Chern, fibré homologiquement trivial ...).

Dans la Section 2, nous commençons par des propriétés dues à M. Gromov [Gro96, p. 21] dont nous développons les preuves. À la suite de ces propriétés, nous traitons quelques exemples : espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^m$, sphères canoniques S^{2m}, boules euclidiennes B^{2m} et espaces euclidiens $\mathbb{R}^{2m}$. Nous continuons avec une propriété plus fine concernant les variétés fermées simplement connexes [Gro96, § 4 $\frac{1}{4}$] suivie, là aussi,

2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 53C21; Secondary: 34L40.

d'exemples : sphères S^{2m} et espaces projectifs $\mathbb{C}P^m$. Nous étudions ensuite le comportement de la K-aire par passage à des revêtements riemanniens [Gro96, §4$\frac{3}{5}$], suivi des exemples des tores T^{2m} [Gro96, (v) p. 26] et des surfaces connexes de genre $g \geqslant 1$ [Gro96, (iii) p. 24–25].

La justification de cet invariant est donné dans la section suivante. En effet, on y explique le lien entre K-aire et courbure [Gro96, (vii) p. 26–27 & §5]. Bien que la K-aire soit un invariant riemannien, nous commençons par montrer que la propriété d'être à K-aire finie ou infinie est topologique [Gro96, §4$\frac{1}{3}$] et nous rapprochons ceci de la notion d'agrandissabilité [GL80b], [GL83], [LM89] et [Gro96, (v') p. 26]. Nous nous intéressons alors plus particulièrement au comportement de la K-aire des sommes connexes, fait à rapprocher du comportement de la courbure scalaire par chirurgie [GL80a]. La fin de la section est consacrée à l'énoncé du Théorème fondamental qui lie K-aire et courbure scalaire pour les variétés spinorielles [Gro96, §5$\frac{1}{4}$] et qui donne une nouvelle obstruction à l'existence de métrique à courbure scalaire strictement positive, dans le même esprit que l'agrandissabilité introduite dans [GL80b].

La totalité de ces résultats, à l'exception des exemples des espaces projectifs complexes et des sphères (Section 2.2) et du résultat sur la K-aire des sommes connexes (Théorème 3.5), est due à M. Gromov. Nous avons toutefois détaillé certaines démonstrations. Ce texte reprend le premier chapitre de ma thèse [Dav02].

1. Définition de la K-aire

Pour définir ce nouvel invariant, nous nous intéressons à une variété riemannienne (M, g).

1.1. Norme de la courbure

Soit un fibré $X \to M$ hermitien, muni d'une connexion hermitienne au-dessus de (M, g).

Définition 1.1. — *La* norme de la courbure R^X *est le scalaire*

$$\|R^X\| = \sup_{v\wedge w\neq 0} \frac{\|R^X(v\wedge w)\|}{\|v\wedge w\|} = \sup_{v\wedge w=1} \|R^X(v\wedge w)\|$$

où $\|v\wedge w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - g(v,w)^2$ *et* $\|R^X(v\wedge w)\|$ *est la norme d'opérateur de l'endomorphisme* $R^X(v\wedge w)$.

Voyons deux propriétés de cette norme qui seront utiles par la suite.

Propriété 1.2. — *Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes portant deux fibrés hermitiens X_1 et X_2, munis de connexions hermitiennes, alors*

$$\|R^{X_1\times X_2}\| = \max(\|R^{X_1}\|, \|R^{X_2}\|).$$

En particulier, si $M_1 = M_2$,

$$\|R^{X_1\oplus X_2}\| = \max(\|R^{X_1}\|, \|R^{X_2}\|).$$

Démonstration. — Il suffit de noter que la connexion naturelle sur $X_1 \times X_2$ est donnée par

$$\nabla^{X_1\times X_2}(x_1, x_2) = (\nabla^{X_1}x_1, \nabla^{X_2}x_2)$$

ainsi

$$R^{X_1\times X_2}((v_1, v_2)\wedge(w_1, w_2)) = (R^{X_1}(v_1\wedge w_1), R^{X_2}(v_2\wedge w_2)).$$

Le reste de la preuve est triviale. □

Propriété 1.3. — *Soit M une variété riemannienne portant deux fibrés hermitiens X et Y, munis de connexions hermitiennes, alors*

$$\|R^{X\otimes Y}\| = \|R^X\| + \|R^Y\|.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que la connexion définie sur $X \otimes Y$ est donnée par $\nabla_v^{X\otimes Y}(x\otimes y) = (\nabla_v^X(x))\otimes y + x\otimes(\nabla_v^Y(y))$ d'où $R^{X\otimes Y}(v\wedge w)(x\otimes y) = (R^X(v\wedge w)(x))\otimes y + x\otimes(R^Y(v\wedge w)(y))$. □

1.2. Nombres de Chern et fibrés homologiquement triviaux

Considérons le multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_q)$ tel que $i_1 + \cdots + i_q = m$, nous notons que $C_I(X) = c_{i_1}(X)\cdots c_{i_q}(X)$ appartient à l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^{2m}(X)$, cohomologie de dimension maximale de M (ceci explique le choix de la dimension paire). Comme la variété M est orientée, nous pouvons intégrer cette forme pour obtenir les *nombres de Chern* $n_I(X) = \int_M C_I(X)$ qui, rappelons le, sont des entiers.

Définition 1.4. — *Un fibré $X \to M$* homologiquement trivial *sur une variété M orientée, de dimension paire, est un fibré dont tous les nombres de Chern sont nuls.*

Remarques.

— La norme de la courbure d'un fibré X non homologiquement trivial est nécessairement non nulle, car, si $\|R^X\| = 0$ alors $R^X = 0$ et donc X est homologiquement trivial.

— Tous les fibrés triviaux sur les variétés fermées sont homologiquement triviaux, mais il existe des fibrés homologiquement triviaux et non triviaux, par exemple les fibrés plats associés à un revêtement universel $\widetilde{M}$ muni d'une représentation ρ du groupe fondamental Γ dans $\mathbb{C}^r$ définissant le fibré vectoriel complexe $\widetilde{M}\times_\rho \mathbb{C}^r \to M$.

1.3. K-aire et K-aire stable

Nous pouvons maintenant donner une définition de la K-aire :

DÉFINITION 1.5. — *La K-aire d'une variété riemannienne (M, g), fermée, de dimension paire, orientée, est le nombre*

$$\text{K-aire}(M, g) = \sup \frac{1}{\|R^X\|}$$

où X parcourt l'ensemble des fibrés hermitiens, non homologiquement triviaux.

Commentaires.

- Si K-aire $> \frac{1}{\alpha}$, il existe un fibré hermitien non homologiquement trivial tel que $\|R^X\| \leqslant \alpha$; inversement, s'il existe un fibré hermitien non homologiquement trivial tel que $\|R^X\| \leqslant \alpha$, alors K-aire $\geqslant \frac{1}{\alpha}$.
- Si K-aire $< \frac{1}{\alpha}$, tout fibré hermitien X de norme $\|R^X\| \leqslant \alpha$ est homologiquement trivial ; et réciproquement.

La K-théorie permet de montrer qu'il existe sur toute variété fermée de dimension paire des fibrés non homologiquement triviaux, et donc que la K-aire est toujours strictement positive (voir Propriété 2.1).

Par contre, il existe sur certaines variétés des fibrés non homologiquement triviaux de courbure arbitrairement petite. La K-aire est alors infinie (voir Section 3.1).

Cette définition n'est pas satisfaisante pour les *variétés ouvertes* car elle implique que la K-aire d'une boule ouverte est nulle (or nous espérons un invariant toujours non nul). Dans ce cas, il faut décider d'une trivialisation à l'infini (et au bord). Les fibrés que nous considérons ensuite sont les *fibrés triviaux à l'infini (et au bord)*, c'est-à-dire prolongeables à l'infini. Pour ces fibrés triviaux sur un voisinage de l'infini, il existe des connexions qui sont triviales à l'infini (*i.e.* la première forme de connexion est nulle à l'infini dans la trivialisation choisie). Les classes de Chern sont alors vues comme éléments de la cohomologie à supports compacts dont un représentant (dans la trivialisation choisie) est nul à l'infini. Ces classes de Chern dépendent donc étroitement de la trivialisation à l'infini de la variété. Les nombres de Chern considérés sont ceux correspondant à ces connexions dont la courbure est à support compact. Nous disposons, alors, pour ces fibrés triviaux à l'infini, d'une nouvelle notion de fibré homologiquement trivial. Notons qu'un fibré trivial ne sera pas homologiquement trivial s'il ne se prolonge pas en un fibré trivial sur le compactifié d'Alexandrov de la variété ouverte : c'est le cas de la restriction à $\mathbb{R}^2$ du fibré de Hopf au-dessus de S^2 (nous étudierons ce cas dans la suite).

DÉFINITION 1.6. — *La K-aire d'une variété riemannienne (M, g), ouverte, de dimension paire, orientée, est le nombre*

$$\text{K-aire}(M, g) = \sup \frac{1}{\|R^X\|}$$

où X parcourt l'ensemble des fibrés hermitiens triviaux à l'infini, *non homologiquement triviaux dans le sens précédent.*

Nous allons enfin donner une première généralisation de la K-aire, qui sera en particulier définie même dans le cas où la variété est de dimension impaire.

DÉFINITION 1.7. — *Nous appellerons* K-aire stable *le scalaire*

$$\text{K-aire}_{st}(M, g) = \sup_{(\dim M+k)\ pair} \text{K-aire}(M \times \mathbb{R}^k, g \times \text{can}).$$

1.4. Remarque sur le rang des fibrés

Soit (M, g) une variété fermée de dimension paire. D'après la propriété fondamentale des nombres de Chern (*i.e.* qu'ils sont entiers), pour un fibré non homologiquement trivial, il existe I, tel que $|n_I| \geqslant 1$, *i.e.* $|\int_M c_{i_1} \cdots c_{i_q}| \geqslant 1$ pour un multi-indice $(i_1, \cdots, i_q)$ tel que $i_1 + \cdots + i_q = m$. D'après la définition des classes de Chern, nous en déduisons [Gro96, p. 25] qu'il existe un polynôme $C(m, r)$ en m, r, où $r = \text{rang}\, X$ et $m = \dim M/2$, tel que

$$\|R^X\|^m \text{vol}(M) C(m, r) \geqslant 1.$$

Donc pour les fibrés de rang r, si $\text{vol}(M)\|R^X\|^m < C(m, r)^{-1}$, tous les nombres de Chern sont nuls, *i.e.* X est homologiquement trivial.

PROPRIÉTÉ 1.8 (M. Gromov). — *Dans le cas où nous nous restreignons aux fibrés de rang fixé r dans la définition de la K-aire, nous parlons de* K-aire^r. *La* K-aire^r *d'une variété compacte est toujours finie.*

En allant plus loin, nous remarquons que la fonction $r \mapsto \text{K-aire}^r(M, g)$ est croissante. En effet, si X est un fibré de rang r non homologiquement trivial, alors $X \oplus \Theta_p$ est un fibré de rang $r + p$ non homologiquement trivial où Θ_p est le fibré trivial de rang p. De plus, $\|R^X\| = \|R^{X \oplus \Theta_p}\|$. Par le même argument, il est clair que la suite $\text{K-aire}^r(M, g)$ tend vers $\text{K-aire}(M, g)$ lorsque r tend vers l'infini.

En corollaire, nous obtenons le fait que, pour une variété fermée M de K-aire infinie, la suite de fibrés non homologiquement triviaux tel que $\|R^X\| \to 0$ est nécessairement une suite de fibrés de rang tendant vers l'infini. Si la variété M est ouverte de K-aire infinie et qu'il existe une suite de fibrés non homologiquement triviaux de rang $\leqslant r$ tel que $\|R^X\| \to 0$, alors $\text{K-aire}^r(M, g) = \infty$.

2. Premières propriétés

2.1. Propriétés élémentaires

2.1.1. La K-aire est strictement positive.

PROPRIÉTÉ 2.1. — *Pour toute variété riemannienne M, fermée ou ouverte, de dimension $2m$, orientée, la K-aire est strictement positive.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que M admet un fibré non homologiquement trivial.

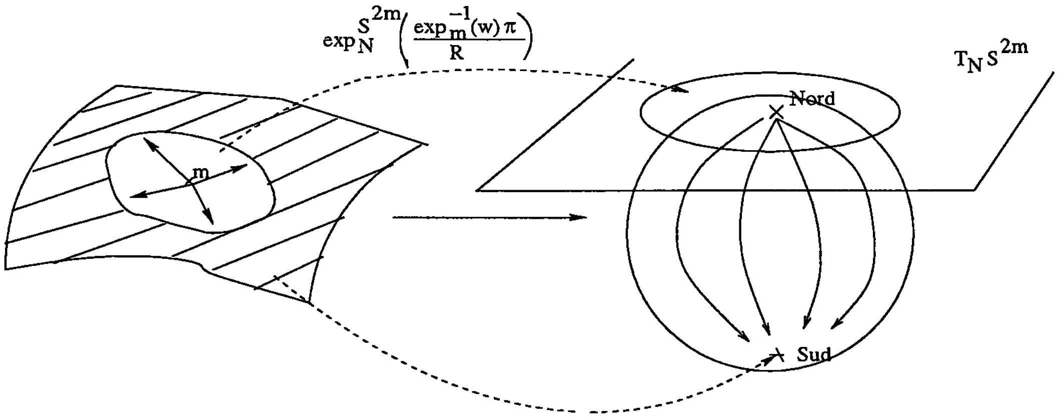

FIG. 1: Construction d'une application de degré non nul dans la sphère.

Nous pouvons toujours construire une application $f : M \to S^{2m}$, de degré 1, constante en dehors d'un compact et en particulier propre (voir fig. 1). Il reste à trouver un fibré X non homologiquement trivial sur S^{2m}, ainsi le fibré f^*X conviendra. Les fibrés des demi-spineurs S^+ et S^- (positifs et négatifs) satisfont [Bau91]

$$\left| \int_{S^{2m}} c_m(S^{\pm}) \right| = (m-1)!$$

et donc conviennent. □

2.1.2. K-aire et applications entre variétés.

PROPRIÉTÉ 2.2. — *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes, fermées ou ouvertes, de dimension $2m$, orientées. S'il existe une application $f : M_1 \to M_2$, λ-lipschitzienne, propre, de degré non nul, alors*

$$\text{K-aire}(M_2, g_2) \leqslant \lambda^2\, \text{K-aire}(M_1, g_1).$$

Démonstration. — Considérons un fibré hermitien X_2 non homologiquement trivial sur M_2, de connexion ∇_2 et de courbure R_2. Nous pouvons construire le fibré $X_1 = f^*X_2$ muni de la même structure hermitienne, de la connexion $\nabla_1 = f^*\nabla_2$ (*i.e.* $(\nabla_1)_v v_1 = (\nabla_2)_{f_*(v)} v_1$), qui sera un fibré non homologiquement trivial sur M_1 d'après les hypothèses de degré et de propreté de f. De plus, nous avons $R_1(v \wedge w) = R_2(f_* v \wedge f_* w)$. Nous en déduisons

$$\|R_1\| = \sup \frac{\|R_2(f_* v \wedge f_* w)\|}{\|v \wedge w\|_1} \leqslant \lambda^2 \sup \frac{\|R_2(f_* v \wedge f_* w)\|}{\|f_* v \wedge f_* w\|_2} \leqslant \lambda^2 \|R_2\|,$$

car f étant λ-contractante, nous avons $\|f_* v \wedge f_* w\|_2 \leqslant \lambda^2 \|v \wedge w\|_1$, d'où la conclusion. □

PROPRIÉTÉ 2.3. — *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes, fermées ou ouvertes, de dimension $2m$, orientées. S'il existe un plongement $f : M_1 \to M_2$, localement λ-dilatant (i.e. $\|f_* v\| \geqslant \lambda \|v\|$), équidimensionnel, alors*

$$\text{K-aire}(M_2, g_2) \geqslant \lambda^2 \,\text{K-aire}(M_1, g_1).$$

En particulier, si U est un ouvert de M, alors

$$\text{K-aire}\, U \leqslant \text{K-aire}\, M.$$

Démonstration. — Rappelons que, comme f est un plongement, $f(M_1)$ est une sous-variété de M_2 et $f(M_1)$ est difféomorphe à M_1. Si nous munissons M_1 de la métrique induite f^*g_2, les variétés (M_1, f^*g_2) et $(f(M_1), g_2)$ sont isométriques et ont donc la même K-aire. Pour démontrer la propriété, il suffit donc de comparer

- K-aire$(f(M_1), g_2)$ et K-aire(M_2, g_2), *i.e.* nous allons montrer que dans le cas où U est un ouvert de M, muni de la métrique induite, alors K-aire$(M) \geqslant$ K-aire(U),
- K-aire(M_1, g_1) et K-aire(M_1, f^*g_2), *i.e.* nous allons montrer que K-aire$(M_1, f^*g_2) \geqslant \lambda^2$ K-aire(M_1, g_1).

Pour le premier point, il suffit de remarquer que si X est un fibré non homologiquement trivial (trivial à l'infini) au-dessus de l'ouvert U, nous pouvons le prolonger trivialement à M en un fibré Y non homologiquement trivial de même norme.

Pour le deuxième point, nous utilisons le même raisonnement que dans le cas de la propriété précédente. Soit X un fibré non homologiquement trivial au-dessus de M_1, il peut être vu comme un fibré X' au-dessus de $(M_1, g' = f^*g_2)$ ou comme un fibré X'' au-dessus de $(M_1, g'' = g_1)$. La norme de la courbure de X sera alors définie de deux façons différentes suivant la métrique considérée sur la base :

$$\|R'\| = \sup \frac{R^X(v \wedge w)}{\|v \wedge w\|'} = \sup \frac{R^X(v \wedge w)}{\|f_* v \wedge f_* w\|_2}$$

et

$$\|R''\| = \sup \frac{R^X(v \wedge w)}{\|v \wedge w\|''} = \sup \frac{R^X(v \wedge w)}{\|v \wedge w\|_1}.$$

Or l'application f est dilatante, donc $\| f_* v \wedge f_* w\|_2 \geqslant \lambda^2 \|v \wedge w\|_1$, ainsi

$\|R'\| \leqslant \lambda^{-2}\|R''\|$, ce qui permet de conclure. □

Remarque. — Pour les propriétés 2.3 et 2.2, il suffit de la contraction (resp. la dilatation) des bivecteurs dans un rapport λ^2. Dans ce cas, nous dirons que l'application f est *aire-contractante* ou $\wedge^2$*-contractante* (resp. *aire-dilatante* ou $\wedge^2$*-dilatante*).

Corollaire 2.4. — *Pour toute variété riemannienne M, fermée ou ouverte, de dimension $2m$, orientée,*

$$\text{K-aire}(\lambda M) = \lambda^2 \,\text{K-aire}(M)$$

où $\lambda M = (M, \lambda^2 g)$.

Démonstration. — L'application identité de (M, g) dans $(M, \lambda^2 g)$ est à la fois λ-contractante et λ-dilatante. D'où le résultat. □

Corollaire 2.5. — *Soit (M, g) une variété riemannienne, fermée, orientée. La* $\text{K-aire}_{(st)}$ *est un invariant riemannien dépendant continuement de la métrique.*

Plus précisement, soit g' une autre métrique sur M telle qu'il existe deux réels strictement positifs a et b vérifiant

$$a^2 g \leqslant g' \leqslant b^2 g$$

Alors

$$a^2\, \text{K-aire}_{(st)}(M, g) \leqslant \text{K-aire}_{(st)}(M, g') \leqslant b^2\, \text{K-aire}_{(st)}(M, g).$$

En particulier, si M est compacte ou si g' est une modification de g sur un compact, alors les constantes a et b existent et donc la finitude de la K-aire est indépendante de la métrique.

Ou encore, soit g_k une suite de métriques sur M convergeant continuement vers g. Alors

$$\text{K-aire}_{(st)}(M, g_k) \to \text{K-aire}_{(st)}(M, g).$$

De même, si (M_k, g_k) est une suite de variétés fermées convergeant, au sens de Lipschitz, vers (M, g) ([Gro81]) alors

$$\text{K-aire}_{(st)}(M_k, g_k) \to \text{K-aire}_{(st)}(M, g).$$

2.2. Quelques exemples de calculs

Nous allons donner, dans ce paragraphe, quelques idées des moyens mis en œuvre pour calculer la K-aire.

EXEMPLE 2.5.1. — K-aire$(\mathbb{C}P^m, \mathrm{can}) \geqslant \frac{1}{4}$.

Sur $\mathbb{C}P^m$, nous disposons du fibré tautologique (complexe) H (ou fibré de Hopf) et de son dual H^*. C'est un fibré en droite. Le seul nombre de Chern, qui puisse être non nul, est celui qui correspond à la classe de Chern $c_1(H^*)^m$. Posons $\zeta = c_1(H^*)$, c'est le générateur positif de $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et l'espace de cohomologie de $\mathbb{C}P^m$ est donné par $\mathrm{H}^*(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\zeta]/\zeta^{m+1}$, donc H^* est non homologiquement trivial. Il reste à calculer la norme de la courbure de ce fibré, muni de la connexion de Chern au-dessus de $\mathbb{C}P^m$, muni lui-même de la métrique canonique dont la courbure sectionnelle varie entre 1 et 4. Dans ce cas, $\|R^H\| \leqslant 4$ [GHL90, III.D], d'où K-aire$(\mathbb{C}P^m, \mathrm{can}) \geqslant \frac{1}{4}$.

De manière équivalente, nous pouvons considérer le fibré tangent. En effet, $T\mathbb{C}P^m \oplus \Theta_1 = H^* \oplus \cdots \oplus H^*$, donc $T\mathbb{C}P^m$ est non homologiquement trivial et $\|R^{T\mathbb{C}P^m}\| = \|R^H\|$ d'après les propriétés de la norme.

L'exemple précédent se généralise. En effet, P. Buser et H. Karcher ont déjà utilisé la norme de la courbure dans [BK81, §6] dans le cas du fibré tangent. Ils en donnent alors une définition équivalente $\|R\| = \max\{|R(v_1 \wedge v_2)v_3|,\ |v_i| = 1\}$. À l'aide de [BK78], ils montrent :

PROPRIÉTÉ 2.6 (P. Buser & H. Karcher). — *Pour le fibré tangent à (M, g) muni de la connexion de Levi-Civita, nous avons*

$$\|R\| \leqslant \frac{4}{3} \max |\sec|.$$

Plus précisément, si $\delta \leqslant \sec \leqslant \Delta$, alors

$$|R(v_1, v_2, v_3, v_4)| \leqslant \max(\Delta, -\delta, \frac{2}{3}(\Delta - \delta)).$$

Cette inégalité est optimale pour $\mathbb{C}P^m$.

Nous en déduisons le corollaire suivant pour les variétés dont le fibré tangent est complexe :

COROLLAIRE 2.7. — *Si (M, g) est une variété riemannienne dont le fibré tangent est complexe et non homologiquement trivial, et si $\delta \leqslant \sec \leqslant \Delta$,*

$$\text{K-aire}(M, g) \geqslant \frac{1}{\max(-\delta, \Delta, \frac{2}{3}(\Delta - \delta))}.$$

EXEMPLE 2.5.1 (suite). — Pour $\mathbb{C}P^m$, nous avons $1 \leqslant \sec \leqslant 4$, et $T\mathbb{C}P^m$ est non homologiquement trivial donc le corollaire précédent redonne K-aire$(\mathbb{C}P^m, \mathrm{can}) \geqslant \frac{1}{4}$. □

EXEMPLE 2.7.1. — K-aire$(B^{2m}) < \infty$ *et* K-aire$(S^{2m}) < \dfrac{2}{(m+1)^{(m-2)/m}}$.

Dans les deux cas, le Théorème 2.8, qui suit, permet de conclure à la finitude de la K-aire.

Notons $n = 2m$. Considérons $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| < 1\}$, que nous munissons de la métrique euclidienne. Nous devons étudier les fibrés triviaux à l'infini ce qui revient à étudier les fibrés sur S^n (compactifié de B^n) muni d'une métrique induite par son plongement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Plus précisément, l'application $\exp\colon B^n \to S^n, x \mapsto \exp_{\mathrm{Nord}}(x)$ est un plongement λ^{-1}-dilatant (grâce aux champs de Jacobi, nous dérivons l'exponentielle et en déduisons $\|d_{rv}\exp\| \geqslant \frac{\sin r}{r} = f(r)$ avec $r \in [0,1]$, or f est décroissante donc minorée par $\lambda^{-1} = f(1) = \sin(1)$). Nous pouvons utiliser la Propriété 2.3, donc K-aire $B^n \leqslant \lambda^{-2}$ K-aire S^n. Il reste à montrer que K-aire $S^n < \infty$.

Les fibrés sur S^n sont classés par la K-théorie, de sorte que

$$K(S^{2m}) \overset{\text{périodicité de Bott}}{\cong} K(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

où le premier $\mathbb{Z}$ correspond aux fibrés triviaux (qui ne nous intéressent pas ici), le deuxième $\mathbb{Z}$ aux fibrés engendrés additivement (*i.e.* grâce à $\oplus$) par un certain élément de la K-théorie réduite $[H]-[\Theta_r]$ où $r = \operatorname{rang} H$. En fait, le fibré H est le fibré des demi-spineurs. En particulier, $\operatorname{rang} H = 2^{m-1}$ et $c_m = (m-1)!$ (Voir [Bau91] pour une démonstration de ce fait). Ainsi le comportement des fibrés non homologiquement triviaux est donné par le fibré H qui est non homologiquement trivial et qui, par « restriction » de la base, induit un fibré trivial à l'infini non homologiquement trivial sur B^n (nous remarquons que ce fibré est trivial car B^n est contractile).

Regardons de plus près le caractère de Chern :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\colon K(S^{2m}) \otimes \mathbb{Q} & \to & \mathrm{H}^*(S^{2m}, \mathbb{Q}) = \mathrm{H}^0(S^{2m}) \oplus \mathrm{H}^{2m}(S^{2m}) \\ Y & \mapsto & \operatorname{rang} Y + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} c_m(Y) \end{array}$$

C'est un isomorphisme, donc, comme $[H] - [\Theta_r]$ engendre la K-théorie réduite, nous avons $(-1)^{m-1} c_m(H)/(m-1)!$ engendre $\mathrm{H}^{2m}(S^{2m}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ donc a une intégrale égale à ± 1. Si nous notons $c_m = |\int_{S^{2m}} c_m(H)|$ (le seul nombre de Chern du fibré H), nous avons $c_m = (m-1)!$.

Raisonnons dans le cas où $n = 2$, dans ce cas H est le fibré de Hopf sur $S^2 (\cong \mathbb{C}P^1)$. Rappelons tout d'abord que $\|R^{X \oplus Y}\| = \max\{\|R^X\|, \|R^Y\|\}$. De plus, quelque soit la connexion ∇ sur H, nous avons $c_1(H) = \frac{1}{2\pi} R^\nabla$ et $\int_{S^2} c_1(H) = -1$, d'où

$$\Big| \int_{S^2} c_1(H) \Big| = 1 \leqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname{aire}(S^2) \|R^\nabla\|,$$

ainsi $\|R^\nabla\| \geqslant \frac{2\pi}{\operatorname{aire}(S^2)}$. Par suite, K-aire$(S^2) \leqslant \frac{1}{2\pi}$ aire(S^2) et K-aire(B^2) est finie. En fait, K-aire(S^2) = aire$(S^2)/(2\pi) = 2$ car, pour le fibré de Hopf H muni de la connexion de Chern ∇, nous pouvons calculer $\|R^\nabla\| = 1/2$ (notons que $(\mathbb{C}P^1, \mathrm{can}) = (S^2, \frac{1}{4}\mathrm{can})$, voir [GHL90, 2.32]).

Dans le cas général $n = 2m$, le seul nombre de Chern de H est

$$\int_{S^{2m}} c_m(H) = (-1)^{m-1}(m-1)!,$$

or $c_m(H) = \frac{1}{(2i\pi)^m}\det(R^\nabla)$ donc

$$\|R^\nabla\|^m \geqslant \frac{(2\pi)^m c_m}{m!\mathrm{vol}(S^{2m})}.$$

Sachant que

$$\mathrm{vol}(S^{2m}) = \frac{(4\pi)^m (m-1)!}{(2m-1)!},$$

nous avons donc

$$\text{K-aire}(S^{2m}) \leqslant 2\left(\frac{m!}{(2m-1)!}\right)^{1/m} \leqslant \frac{2}{(m+1)^{(m-2)/m}}.$$

EXEMPLE 2.7.2. — K-aire$(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Il suffit d'utiliser la croissance de la K-aire (Propriété 2.3) et le fait que la K-aire est toujours non nulle (Propriété 2.1), ainsi

$$\text{K-aire}(\mathbb{R}^n) \geqslant \text{K-aire}(B(R)) = R^2\,\text{K-aire}(B(1)) > 0, \quad \forall R.$$

La dernière égalité venant du fait que $(B(R), \mathrm{can})$ est isométrique à $(B(1), R^2\,\mathrm{can})$ (Propriété 2.4).

2.3. K-aire et simple connexité

Voici un résultat dont la démonstration très géométrique de M. Gromov [Gro96, §4$\frac{1}{4}$] est particulièrement intéressante.

THÉORÈME 2.8 (M. Gromov). — *Toute variété M compacte, simplement connexe, sans bord (ou dont le bord n'a qu'une composante connexe) a une K-aire stable finie.*

Plus précisément,

$$\text{K-aire}_{st}(M, g) \leqslant \frac{3\alpha}{\pi}$$

où α est la borne supérieure des aires des disques minimaux construits à partir de deux chemins minimaux entre les points p_0 (point fixé, appartenant au bord) et $p \in M$.

Considérons d'abord le lemme suivant (cf. [BK81] §6) :

LEMME 2.9. — *Considérons un fibré X hermitien de rang r au-dessus de M. Soit τ le transport parallèle sur M le long du bord d'un disque, pour une connexion hermitienne ∇. Alors τ est unitaire et*

$$\|\tau - Id\| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\|R^X\|\,\mathrm{aire}(D)\right)\right| \quad si\ \ \frac{1}{2}\|R^X\|\,\mathrm{aire}(D) \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

où $\|R^X\|$ est la norme de la courbure calculée au-dessus de D et la distance entre les applications est celle définie par la norme sup des applications.

Démonstration. — Considérons deux chemins c_1 et c_2 de p à q paramétrés par $t \in [0,1]$ et une homotopie c_s, $s \in [1,2]$ entre ces deux chemins. L'aire de la surface balayée par l'homotopie est égale à

$$\iint \|\frac{\partial}{\partial s} c_s(t) \wedge \frac{\partial}{\partial t} c_s(t)\| \,\mathrm{d}\, s \,\mathrm{d}\, t = \text{aire}.$$

Soit $x \in X_p$, un vecteur unitaire dans la fibre de X au-dessus de p, et considérons le transport parallèle $x_1 \in X_q$ de x le long de c_1 (resp. le transport parallèle $x_2 \in X_q$ le long de c_2). Il s'agit de majorer la norme de $x_1 - x_2$. Pour cela considérons les transportés parallèles de x le long de c_s, que nous notons $x_s(t) \in X_{c_s(t)}$, par construction $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, t} x_s(t) = 0$. Comme $x_1 = x_1(1)$ et $x_2 = x_2(1)$, l'application $s \mapsto x_s(1)$ est un chemin de x_1 à x_2 dans S^{n-1}, d'où

$$\mathrm{dist}_{S^{n-1}}(x_1, x_2) \leqslant \int_1^2 \left\|\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, s} x_s(1)\right\| \mathrm{d}\, s.$$

Or, nous avons

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, s} x_s(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, t} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, s} x_s(t) \mathrm{d}\, t = \int_0^1 R\left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s}\right) x_s(t) \mathrm{d}\, t$$

car

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, s} x_s(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, s} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\, t} x_s(t) = 0.$$

D'où nous déduisons

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{S^{n-1}}(x_1, x_2) &\leqslant \int_1^2 \int_0^1 \left\| R\left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s}\right) x_s(t) \right\| \mathrm{d}\, t \,\mathrm{d}\, s \\ &\leqslant \|R\| \, \|x\| \int_1^2 \int_0^1 \left\| \frac{\partial c}{\partial t} \wedge \frac{\partial c}{\partial s} \right\| \mathrm{d}\, t \,\mathrm{d}\, s \\ &\leqslant \|R\| \text{ aire} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in S^{n-1}$, $\mathrm{dist}(x, \tau x) \leqslant \alpha = \|R\|$ aire.

Il reste à expliquer le « sinus » : l'application τ est unitaire donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs $x_1, \cdots, x_n$. Les coefficients diagonaux associés sont de la forme $\exp(i\alpha_k)$ avec $\alpha_k \in [-\pi, \pi]$. Dans ce cas, nous avons $\|I - \tau\| = 2 \sup |\sin(\alpha_k/2)|$. Remarquons que $\mathrm{dist}_{S^{n-1}}(x_k, \tau x_k) = |\alpha_k| \leqslant \alpha$, nous en déduisons l'inégalité désirée. □

Démonstration du Théorème 2.8. — Commençons par considérer une variété fermée. Avant de montrer que la K-aire stable est finie, nous allons montrer que la K-aire est finie. Soit $X \to M$ un fibré hermitien, muni d'une connexion hermitienne ∇. Nous allons montrer que si la norme de la courbure est suffisamment petite ($\leqslant \varepsilon$) alors ce fibré est trivial et donc homologiquement trivial (car M est fermée). Ainsi K-aire$(M) \leqslant \varepsilon^{-1}$.

Soit $p_0 \in M$ et $\{e_i\}_{i=1,\dots,r}$ une base fixée de X_{p_0} qui nous permet d'identifier X_{p_0} à $\mathbb{R}^r$. Pour tout point p de M, il existe un chemin minimisant γ de p_0 à p. Nous transportons alors la fibre X_{p_0} au-dessus de p_0 sur la fibre X_p au-dessus de p grâce au transport parallèle induit par la connexion ∇. Nous obtenons une transformation unitaire (car le fibré est hermitien de connexion hermitienne) :

$$\tau_p \colon X_{p_0} \to X_p.$$

Grâce à ce choix de chemin γ, nous transportons parallèlement la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,r}$ de X_{p_0} sur X_p, ce qui permet d'identifier X_p à $\mathbb{R}^r$. Ainsi $\tau_p = I_r \in U(r)$. Mais le chemin n'est pas unique et donc nous ne pouvons procéder de manière aussi simple pour trivialiser X.

Considérons un autre chemin γ' minimisant de p_0 à p qui induit un autre transport parallèle $\tau'_p : X_{p_0} \to X_p$ et $\tau'_p \in U(r)$. Nous utilisons maintenant le lemme pour donner une majoration de la distance entre ces deux transformations unitaires :

$$\|\tau_p - \tau'_p\| \leqslant 2\sin\left(\frac{1}{2}\,\|R^X\|\,\mathrm{aire}(D)\right)$$

où D est un disque minimal à l'intérieur du lacet $\gamma \circ \gamma'^{-1}$ (nous utilisons ici l'hypothèse de simple connexité de M).

Soit α la borne supérieure des aires des disques minimaux pour tous les $p \in M$ et toutes les paires de chemins minimaux entre p_0 et p. Ce nombre est fini (non nul) car M est compacte.

Nous choisissons maintenant un fibré (X, ∇) tel que $\|R^X\| < \frac{\pi\alpha^{-1}}{3}$ alors

$$\|\tau_p - \tau'_p\| < \delta < 1 \tag{1}$$

pour tous les points p et les couples de chemins (γ, γ') de p_0 à p. Nous disposons donc d'une application de la variété M dans l'ensemble des parties du groupe unitaire $U(r)$

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & M & \longrightarrow & \mathcal{P}(U(r)) \\ & p & \longmapsto & \{\tau_{p,\gamma}\} \end{array}$$

où γ parcourt l'ensemble des chemins de p_0 à p.

Le groupe $U(r)$ est muni de sa structure de groupe de Lie et de sa métrique bi-invariante canonique. Si la distance entre deux matrices de $U(r)$ au sens de la norme sup est plus petite que $\delta < 1$, la distance au sens de la métrique est plus petite qu'un certain $\rho < \pi\sqrt{r}$, où $\pi\sqrt{r}$ correspond à la distance d'un point à son cut-locus. Grâce à l'inégalité (1), l'ensemble image $\Phi(p)$ est donc contenu dans la boule ouverte B de centre un point de $\Phi(p)$ et de rayon ρ : cet ensemble est géodésiquement convexe (pour toutes matrices a et b de B, la plus courte géodésique de a à b est unique dans $U(r)$ et appartient à B). D'après les travaux de H. Karcher [Kar77, Section 1], le centre de masse de l'ensemble $\Phi(p)$ est alors unique. Ceci permet de construire une application continue

$$\begin{array}{rccc} \Psi\colon & M & \longrightarrow & U(r) \\ & p & \longmapsto & \overline{\tau}_p \end{array}$$

où $\overline{\tau}_p : X_{p_0} \to X_p \in U(r)$. Ceci donne la trivialisation de X suivante

$$\begin{array}{rcl} M \times X_{p_0} & \longrightarrow & X \\ (p,x) & \longmapsto & \Psi(p)(x) = \overline{\tau}_p(x) \end{array}$$

Ainsi, si X est ε-plat (où $\varepsilon < \frac{\pi\alpha^{-1}}{3}$), alors il est trivial. Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de bord vide. Nous l'utilisons maintenant pour dire que comme le fibré est trivial, il est homologiquement trivial, d'où

$$\text{K-aire}(M) \leqslant \frac{3\alpha}{\pi}.$$

Passons maintenant à la K-aire stable. Si N est une variété quelconque, nous munissons $M \times N$ de la métrique produit. Soit $p_0 \in M$, par le raisonnement qui précède, tout fibré X sur $M \times N$ de courbure « petite » ($\leqslant \varepsilon = \pi\alpha^{-1}/3$) est isométrique à l'image réciproque par la deuxième projection $pr_2 : M \times N \to N$ du fibré $X' = X|_{\{p_0\}\times N}$ sur N de courbure « petite » (même majoration que pour X). En effet, pour tout point $q \in N$, au-dessus de $M \times \{q\}$, le fibré $X|_{M\times\{q\}}$ se trivialise par la méthode précédente.

Nous voulons montrer que K-aire$(M \times \mathbb{R}^n)$ est majorée indépendamment de n. Considérons un fibré X sur $M \times \mathbb{R}^n$ avec trivialisation à l'infini, ceci signifie que X se prolonge à $M \times S^n$ avec contrôle de la courbure (*i.e.* même majoration), par exemple $\|R^X\| \leqslant \varepsilon$. Nous en déduisons un fibré X' sur S^n (comme défini précédemment) de norme majorée par ε. Nous choisissons de plus ε suffisamment petit pour que $\varepsilon \leqslant \pi\alpha_n^{-1}/3$ où α_n est le α du raisonnement précédent associé à S^n *i.e.* $\alpha_n = 2\pi$. Ceci est possible dans le cas $n > 1$ car S^n est fermée simplement connexe. Pour le cas $n = 1$, rappelons que l'ensemble $\Phi_r^{\mathbb{C}}(S^n)$ des classes d'isomorphisme des fibrés de rang r sur S^n est classé par le groupe d'homotopie $\pi_{n-1}(\mathrm{Gl}_r(\mathbb{C}))$ ([Ste57] ou [Hus94, p. 108]). Ainsi les fibrés complexes sur S^1 étant classés par $\pi_0(GL(\mathbb{C}))$ sont toujours triviaux.

Nous en déduisons que X' est trivial, donc X aussi en tant que fibré sur $M \times S^n$. Autrement dit, nous avons prolongé à tout $M \times \mathbb{R}^n$ la trivialisation à l'infini. Ceci permet de conclure que K-aire$_{st}(M) \leqslant \max(3\alpha/\pi, 6)$. □

Remarque. — Cas où la variété a un bord.

Le théorème reste vrai dans le cas où le bord est connexe. Dans le cas où le bord est non connexe, par exemple $[0,1]$, le théorème est trivialement faux car K-aire$_{st}([0,1]) = \infty$ (voir plus loin).

La démonstration dans le cas où le bord est connexe s'adapte de la façon suivante. Il faut montrer qu'un fibré X au-dessus de M trivialisé au voisinage du bord ∂M, de courbure « petite », est trivialisable en respectant la trivialisation à l'infini. Remarquons que dans ce cas, trivialisable à l'infini signifie prolongeable à l'infini. Commençons par choisir une métrique sur M pour laquelle ∂M est totalement géodésique et qui est la métrique produit au voisinage du bord (la finitude de la K-aire ne dépend pas de la métrique (Propriété 3.4)). Nous reprenons alors ligne à ligne la démonstration précédente avec $p_0 \in \partial M$. Tout se passe bien si ∂M est connexe (si ∂M n'est pas connexe, la trivialisation obtenue n'est pas adaptée à toutes les composantes connexes du bord).

EXEMPLE 2.7.1. — Dans le cas des sphères S^{2m}, nous obtenons $\alpha = 2\pi$ donc

$$\text{K-aire}(S^{2m}) \leqslant \frac{3(2\pi)}{\pi} = 6.$$

Cette inégalité est moins précise que celle déjà donnée en utilisant la $\tilde{K}$-théorie de la sphère. □

EXEMPLE 2.5.1. — Dans le cas de $\mathbb{C}P^n$, nous obtenons $\alpha = \pi/2$ donc

$$\text{K-aire}(\mathbb{C}P^n) \leqslant 3/2$$

(comme dans le cas des sphères, il faut avoir en tête la structure des géodésiques de $\mathbb{C}P^n$, cf. [GHL90, 2.110]). □

2.4. K-aire et revêtements

2.4.1. Revêtements finis.

Tout d'abord, introduisons la notion de revêtement adaptée au problème :

DÉFINITION 2.10. — *Un revêtement $f : \widetilde{M} \to M$ fini de cardinal p sera dit* trivial à l'infini *(et au bord) si*

1. *$\forall x \in M$, $\exists U_x$ voisinage ouvert de x, connexe par arc, tel que $f^{-1}(U_x) = \coprod_{i=1}^{p} U_{i,x}$, réunion disjointe des composantes connexes, et $f : U_{i,x} \to U_x$ est un homéomorphisme.*
2. *$\exists K$ compact i.e. $U_\infty = M - K$ voisinage de ∞ (pas forcément connexe par arc), tel que $f^{-1}(U_\infty) = \coprod_{i=1}^{p} U_{i,\infty} \to U_\infty$ est un homéomorphisme.*
3. *Pour toute composante connexe ∂M_k de ∂M, $\exists U_{\partial M_k}$ voisinage ouvert de ∂M_k, tel que $f^{-1}(U_{\partial M_k}) = \coprod_{i=1}^{p} U_{i,\partial M_k}$ et $f : U_{i,\partial M_k} \to U_{\partial M_k}$ est un homéomorphisme.*

Nous en déduisons, d'après [Gro96, §4$\frac{3}{5}$], la

PROPRIÉTÉ 2.11 (M. Gromov). — *Soit $f : \widetilde{M} \to M$ un revêtement riemannien orientable fini, trivial à l'infini (et au bord). Alors*

$$\text{K-aire}(M) = \text{K-aire}(\widetilde{M}).$$

Remarque. — L'hypothèse « trivial à l'infini et au bord » est vide si M est fermée.

EXEMPLE 2.11.1. — K-aire T^n

L'application $f: t \mapsto 2t$ est un revêtement riemannien à 2^n feuillets de T^n par $2T^n$, d'où K-aire$(T^n) \geqslant$ K-aire$(2T^n) = 4$ K-aire(T^n). Par suite, comme la K-aire est non nulle, K-aire$(T^n) = \infty$.

2.4.2. K-aire des surfaces connexes de genre g.

Nous savons, d'après ce qui précède, que la K-aire d'une surface de genre 0 est finie. Le cas des surfaces de genre 1 vient d'être traité : ces surfaces sont de K-aire infinie. Plus généralement,

PROPRIÉTÉ 2.12 (M. Gromov). — *La K-aire des surfaces connexes de genre $g \geqslant 1$ est infinie.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que pour une telle surface M, il existe une application f de M dans le tore T^2, de degré non nul, ce qui permet de conclure à une K-aire infinie grâce à la Propriété 2.2. □

3. K-aire et courbure

3.1. Que signifie une K-aire infinie ?

3.1.1. Lien avec la notion d'agrandissabilité.

Dans des travaux précédents, M. Gromov et H.B. Lawson [GL80b] ont défini la notion de variété agrandissable, dont le tore est l'exemple prototype.

DÉFINITION 3.1. — *Une variété (M, g), de dimension n est* finiment agrandissable *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un revêtement $\widetilde{M}_\varepsilon \to M$ riemannien orientable fini de M, tel qu'il existe une application f_ε: $\widetilde{M}_\varepsilon \to S^n$, de degré non nul, ε-contractante, constante à l'infini.*

Remarque. — Cette définition, qui *a priori* dépend de la métrique g, n'en dépend pas en réalité : l'agrandissabilité est une propriété topologique.

PROPRIÉTÉ 3.2 (M. Gromov). — *Si une variété M de dimension $2m$ est finiment agrandissable alors sa K-aire est infinie.*

Démonstration. — Par définition, comme K-aire$(M) \geqslant$ K-aire$(\widetilde{M}_\varepsilon)$ (Propriété 2.11) et K-aire$(\widetilde{M}_\varepsilon) \geqslant \varepsilon^2$ K-aire(S^{2m}) (Propriété 2.2), nous avons

$$\forall \varepsilon,\ \text{K-aire}(M) \geqslant \varepsilon^{-2}\,\text{K-aire}(S^{2m}),$$

d'où K-aire$(M) = \infty$. □

Exemple 3.2.1. — La K-aire d'une variété de courbure sectionnelle négative et de groupe fondamental résiduellement fini est infinie [Gro96, (v') p. 26] car cette variété est agrandissable (cf. [GL80b]). De même pour les solvariétés compactes.

Rappelons maintenant le principal résultat de l'article [GL80b] sur les variétés agrandissables :

Théorème 3.3 (M. Gromov & H.B. Lawson). — *Si M est une variété riemannienne agrandissable et spinorielle, alors M ne peut pas porter de métrique g telle que* $\mathrm{scal}^g > 0$.

Ce théorème permet en particulier de montrer que le tore T^n ne porte pas de métrique à courbure scalaire positive.

Une variété de K-aire infinie porte-t-elle une métrique à courbure scalaire strictement positive ? La réponse est non et sera vue au Théorème 3.6.

Remarque. — Il existe des variétés de K-aire finie qui ne portent pas de métriques à courbure scalaire positive (par exemple, les surfaces $K3$, qui sont simplement connexes, sont de K-aire finie d'après la Propriété 2.8 et ne portent pas de métrique à courbure scalaire positive car leur $\hat{A}$-genre est non nul).

3.1.2. K-aire finie ou infinie ? : quelques propriétés.

Nous verrons dans la suite que le fait d'être de K-aire infinie est une obstruction à l'existence de métrique à courbure scalaire strictement positive. Il est donc important de montrer que cette propriété est topologique (point (1) de la propriété suivante).

Propriété 3.4 (M. Gromov). — *Pour les variétés riemanniennes* compactes, *de dimension paire, orientées, nous avons les propriétés suivantes :*

1. *le fait que la K-aire (resp. K-aire stable) de la variété soit infinie ou finie est indépendant de la métrique choisie,*
2. *le fait que la K-aire (resp. K-aire stable) de la variété soit infinie ou finie est un invariant d'homotopie,*
3. *si* K-aire(M_1) = K-aire$(M_2) = \infty$, *alors* K-aire$(M_1 \times M_2) = \infty$,
4. *si* K-aire$(M_1) = \infty$, *alors* K-aire$(M_1 \# M_2) = \infty$,
5. *s'il existe une application $f : M_1 \to M_2$, de degré non nul, tel que* K-aire$(M_2) = \infty$, *alors* K-aire$(M_1) = \infty$ *(resp. tel que* K-aire$_{st}(M_2) = \infty$, *alors* K-aire$_{st}(M_1) = \infty$*),*
6. K-aire$(M) = \infty \iff \forall \varepsilon,\ \exists X \to M$ *non homologiquement trivial, tel que* $\|R^X\| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. — Nous avons (5) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) et (5) $\Rightarrow$ (4). De plus le point (5) est une conséquence de la Propriété 2.2. Le point (6) est une simple réécriture de la définition de la K-aire. Il ne reste que le point (3) à démontrer.

Soit $\varepsilon > 0$, nous allons montrer (comme suggéré par le point (6)) qu'il existe, sur $M_1 \times M_2$, un fibré non homologiquement trivial de norme inférieure à ε. D'après les hypothèses sur M_1 et M_2, il existe deux fibrés, respectivement X_1 et X_2, non homologiquement triviaux au-dessus de M_1 (resp. M_2), de norme inférieure à ε. Nous considérons alors le fibré $X_1 \times X_2$ au-dessus de $M_1 \times M_2$: il s'agit de montrer que ce fibré est non homologiquement trivial, de norme inférieure à ε. Pour le premier point, remarquons que la classe totale de Chern du fibré produit est le produit des classes totales de Chern des deux sous-fibrés *i.e.* $c(X_1 \times X_2) = c(X_1) \times c(X_2)$. Pour le deuxième point, nous remarquons que $\|R^{X_1 \times X_2}\| = \max(\|R^{X_1}\|, \|R^{X_2}\|)$ (cf. Propriété 1.2). □

EXEMPLE 3.4.1. — La K-aire stable des variétés compactes de dimension 1 est infinie.

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier les variétés $[0,1]$ et S^1. L'application $f\colon [0,1] \to S^1$, $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ est de degré non nul. D'après le point (5) de la Propriété 3.4, il suffit de montrer que K-aire$(S^1 \times \mathbb{R}) = \infty$. Pour cela considérons l'application $g\colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$, $(z,x) \mapsto (z, x/2)$ qui est $1/2$-aire-contractante ; ainsi, en appliquant la Propriété 2.2, K-aire$(S^1 \times \mathbb{R}) \geqslant 2\,$K-aire$(S^1 \times \mathbb{R})$. D'où la conclusion.

Nous pouvons aussi utiliser l'application 2-dilatante $g'\colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$, $(z,x) \mapsto (z^2, 2x)$.

3.1.3. K-aire et somme connexe.

Nous venons de voir que, pour deux variétés compactes M_1 et M_2,

$$\text{K-aire}(M_1) = \infty \Longrightarrow \text{K-aire}(M_1 \# M_2) = \infty.$$

Réciproquement,

THÉORÈME 3.5. — *Si deux variétés de dimension paire ont une K-aire finie, il en est de même de leur somme connexe.*

Cette propriété est un argument de plus pour comprendre le lien entre K-aire infinie et courbure scalaire. Il est à rapprocher du résultat de M. Gromov et H.B. Lawson [GL80a] affirmant que la somme connexe de deux variétés fermées de dimension $\geqslant 3$ portant des métriques à courbure scalaire strictement positive est une variété portant une métrique à courbure scalaire strictement positive.

Soient M_1 et M_2 deux variétés de même dimension n. Soient φ_1 et φ_2 deux cartes locales de M_1 et M_2 envoyant respectivement un voisinage de $a_1 \in M_1$ et un voisinage de $a_2 \in M_2$ sur la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2) = 0$. Soit h l'inversion-symétrie de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de module $\frac{1}{2}$ qui conserve la couronne

$U = C(0, \frac{1}{2}, 1)$ et échange les sphères $S(0, \frac{1}{2})$ et $S(0, 1)$. Notons $M_i^0 = \varphi_1^{-1}(\overline{B}(0, \frac{1}{2}))$ et $U_i = \varphi_i^{-1}(U)$.

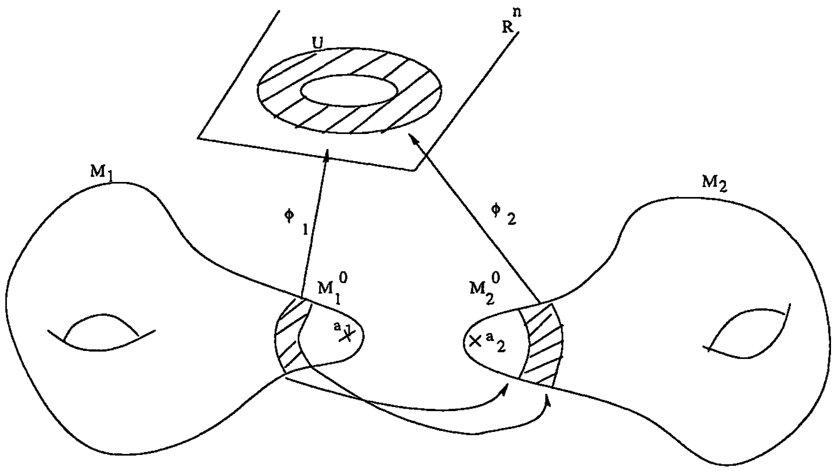

FIG. 2: Somme connexe

Nous définissons alors la somme connexe $M_1 \# M_2$ comme le recollement de $M_1 - M_1^0$ et de $M_2 - M_2^0$ le long de U_1 et U_2 au moyen de $\varphi_2^{-1} \circ h \circ \varphi_1$. Cette définition est indépendante des choix de $\varphi_1, \varphi_2, a_1$ et a_2. Remarquons que $C(0, \frac{1}{2}, 1) = U$, U_1 et U_2 sont tous trois difféomorphes à $S^{n-1} \times I$.

Démonstration. — Supposons les deux variétés M_1 et M_2, fermées, de dimension paire $n = 2m$ et de K-aire finie. Par hypothèses,

$$\exists \varepsilon_i > 0 / \ \forall X_i \to M_i, \quad [(\|R^{X_i}\| < \varepsilon_i) \implies X_i \text{ est homologiquement trivial}].$$

Nous cherchons à montrer que

$$\exists \varepsilon > 0 / \ \forall X \to M, \quad [(\|R^X\| < \varepsilon) \implies X \text{ est homologiquement trivial}].$$

Soient $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et (X, ∇) un fibré ε-plat au-dessus de M. Nous pouvons de plus choisir une connexion ∇ sur M, triviale sur la zone de recollement U. Nous en déduisons trois fibrés munis de la connexion induite par ∇ : $Y_i = X|_{M_i - M_i^0}$ et $Y = X|_U$ qui sont ε-plats et où $U \cong S^{2m-1} \times I$. Nous allons alors construire des fibrés homologiquement triviaux sur M_i.

Nous savons que $\widetilde{K}(U) = \widetilde{K}(S^{2m-1}) = 0$, donc tous les fibrés sur U sont stablement isomorphes à des fibrés triviaux de rang p, notés Θ_p. Il faut ici prendre garde au fait que *la variété U est à bord.* Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $Y \oplus \Theta_q \cong \Theta_{p+q}$ où $p = \operatorname{rang} X$. Nous pouvons alors prolonger $Y_i \oplus \Theta_q$ trivialement sur M_i^0 (car $Y_i \oplus \Theta_q$ est trivial sur U_i) et obtenir un fibré sur M_i, ε-plat donc homologiquement trivial par hypothèse.

Nous en déduisons que le fibré $X \oplus \Theta_q$ est homologiquement trivial sur M car tout élément de $H^n(M)$ peut être représenté par une n-forme dont le support ne rencontre pas l'ouvert de carte $int\,U$. Comme $c(X \oplus \Theta_q) = c(X)$, X est lui aussi homologiquement trivial. Ceci termine la démonstration dans le cas de la K-aire des variétés de dimension paire. □

Remarque. — Le cas de la K-aire stable demande d'étudier des fibrés au-dessus de variétés ouvertes de la forme $M \times \mathbb{R}^k$. Dans ce cas un fibré trivial n'est pas automatiquement homologiquement trivial donc l'argument ne fonctionne plus.

Remarque. — Pour généraliser à une chirurgie de codimension q, il faudrait utiliser la K-théorie réduite de $S^{n-q} \times S^{q-1}$ au lieu de celle de S^{n-1}. Nous pouvons calculer cette K-théorie réduite par un argument de type Künneth :

$$\widetilde{K}(S^{n-q} \times S^{q-1}) = \widetilde{K}(S^{n-q} \wedge S^{q-1}) \otimes \widetilde{K}(S^{n-q}) \otimes \widetilde{K}(S^{q-1}).$$

Ainsi, quelque soit la parité de n et de $q > 1$, cette K-théorie réduite est non triviale (cf. [Ste57]).

3.2. K-aire et courbure scalaire

3.2.1. Cas des variétés fermées.

Le principal résultat de l'article [GL80b] est le théorème d'obstruction à l'existence de métrique à courbure scalaire strictement positive pour les variétés agrandissables. La démonstration de ce théorème utilise essentiellement le Théorème de l'indice d'Atiyah-Singer et les outils adaptés aux variétés spinorielles (cf. [LM89]), en particulier la formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck pour les fibrés spinoriels tordus. Le théorème suivant [Gro96, §5]) peut être vu comme une version quantitative du Théorème de Gromov-Lawson et justifie de l'introduction de la notion de K-aire.

THÉORÈME 3.6 (M. Gromov). — *Pour une variété (M, g) fermée, riemannienne, spinorielle de dimension n, si* $\mathrm{scal}^g \geqslant \varepsilon^{-2}$, *nous avons, si $n = 2m$,*

$$\text{K-aire}(M, g) \leqslant k_n \varepsilon^2,$$

et, si $n = 2m - 1$,

$$\text{K-aire}(M \times S^1, g \times \mathrm{can}) \leqslant k_n \varepsilon^2$$

où k_n ne dépend que de n.

Démonstration. — Nous nous plaçons dans le cas de la *dimension paire i.e.* $n = 2m$. Si la variété est de dimension impaire ($n = 2m - 1$), il suffit de considérer $M \times S^1$ à la place de M.

Posons $\kappa = \frac{1}{4} \inf \mathrm{scal}(M,g)$. Il nous faut montrer que K-aire$(M,g) \leqslant \frac{k_n}{\kappa}$. Nous utilisons l'interprétation suivante de la K-aire :

$$\text{K-aire}(M,g) \leqslant \varepsilon^{-1} \Leftrightarrow (\|R^X\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow X \text{ est homologiquement trivial}).$$

Nous devons donc montrer que pour tout fibré X de courbure $\|R^X\|$ petite par rapport à κ (*i.e.* $\leqslant \beta_n \kappa$), nécessairement X est homologiquement trivial (*i.e.* tous ses nombres de Chern sont nuls). Ainsi nous aurons K-aire$(M,g) \leqslant \frac{1}{\beta_n \kappa}$ i.e $k_n = \frac{1}{\beta_n}$.

Soit X un fibré et $\not{D}^X$ l'opérateur de Dirac tordu associé sur M agissant sur les sections du fibré $\$ \otimes X$. Nous écrivons alors la formule de Weitzenböck pour un spineur harmonique ψ au dessus de M :

$$0 = \|\not{D}^X \psi\|^2 = \|\nabla \psi\|^2 + \frac{1}{4}\langle\langle \mathrm{scal}\psi, \psi\rangle\rangle + \langle\langle \mathcal{R}\psi, \psi\rangle\rangle,$$

et obtenons :

$$0 \geqslant \left(\frac{1}{4} \inf \mathrm{scal} - \alpha_n \|R^X\|\right) \|\psi\|^2 = \left(\kappa - \alpha_n \|R^X\|\right) \|\psi\|^2$$

d'où

$$\kappa - \alpha_n \|R^X\| > 0 \Longrightarrow \ker \not{D}^X = \{0\} \Longrightarrow \mathrm{ind}(\not{D}^X) = 0.$$

D'après le Théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [LM89], nous en déduisons que $\{\hat{\mathrm{A}}(M)\,\mathrm{ch}(X)\}[M] = 0$. Ainsi

$$\|R^X\| < \frac{\kappa}{\alpha_n} \Longrightarrow \{\hat{\mathrm{A}}(M)\,\mathrm{ch}(X)\}[M] = 0. \tag{2}$$

La condition « $\|R^X\| \ll \kappa$ » est stable pour les opérations (en nombre fini) $\oplus$, $\otimes$ et $\wedge$ (Propriétés 1.2 et 1.3). Nous pouvons donc nous permettre de remplacer X dans l'équation (2) par un nombre *fini* dépendant uniquement de n, noté M_n, de fibrés X' fabriqués à partir de X *via* ces opérations. Ceci conduira à M_n équations algébriques $\{\hat{\mathrm{A}}(M)\,\mathrm{ch}(X')\}[M] = 0$ que nous résoudrons pour obtenir le fait que tous les nombres de Chern de X sont nuls.

Le prototype de fibré X' associé à X s'obtient grâce aux *opérations d'Adams* (voir [Hus94, p. 159] et [LM89]). À partir de X, nous construisons un fibré $\psi_k(X)$ vérifiant, si $\mathrm{ch}_X(t) := \sum \mathrm{ch}_i(X) t^i$,

$$\mathrm{ch}_{\psi_k(X)}(t) = \mathrm{ch}_X(kt) = \sum \mathrm{ch}_i(X) k^i t^i.$$

Soit $(\nu, k(\nu)) = (\nu, k_1, \cdots, k_\nu)$, nous définissons alors le fibré associé

$$X'(\nu, k(\nu)) = \psi_{k_1}(X) \otimes \cdots \otimes \psi_{k_\nu}(X).$$

D'après les propriétés du caractère de Chern, nous avons

$$\mathrm{ch}_m(X'(\nu, k(\nu))) = \sum_{i_1 + \cdots + i_\nu = m} k_1^{i_1} \cdots k_2^{i_2}\, \mathrm{ch}_{i_1}(X) \cdots \mathrm{ch}_{i_\nu}(X).$$

Nous voulons montrer que la connaissance des $\mathrm{ch}_m(X'(\nu, k(\nu)))$ permet de connaître les $\mathrm{ch}_{i_1}(X)\cdots\mathrm{ch}_{i_\nu}(X)$ puis par suite les nombres de Chern de X. Nous sommes amenés à résoudre un problème formel. À ν *fixé*, nous posons $a_{I_\nu} = \mathrm{ch}_{i_1}(X)\cdots\mathrm{ch}_{i_\nu}(X)$ où I_ν est le multi-indice $(i_1, \cdots i_\nu)$ tel que $i_1 + \cdots + i_\nu = m$ et $i_l \geqslant 1$. Ce sont les inconnues, elles sont en nombre $M_n(\nu)$. Posons $b(\nu, k(\nu)) = \mathrm{ch}_m(X'(\nu, k(\nu)))$ qui sont supposés connus. L'équation devient

$$b(\nu, k(\nu)) = \sum_{|I_\nu|=n} k^{I_\nu} a_{I_\nu}.$$

Il s'agit de montrer le lemme suivant :

LEMME 3.7. — *Soit ν fixé. Nous notons a_{I_ν} des variables indexées par tous les multi-indices $I_\nu = (i_1, \cdots, i_\nu)$ tels que $i_1 + \cdots + i_\nu = m$ et $i_l \geqslant 1$ pour tous l. Nous notons $b(\nu, k(\nu))$ des variables indexées par des choix de $k(\nu) = (k_1, \cdots, k_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$. Ces deux familles de variables sont liées par la relation*

$$b(\nu, k(\nu)) = \sum_{|I_\nu|=n} k^{I_\nu} a_{I_\nu}.$$

Alors il est possible d'exprimer les a_{I_ν} comme $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire d'un nombre fini de $b(\nu, k(\nu))$.

Démonstration. — Il s'agit de choisir les $k(\nu)$ de façon à obtenir un système de Cramer $M_n(\nu) \times M_n(\nu)$, il y a donc à faire $M_n(\nu)$ choix de ν-uplets $k(\nu)$ (c'est-à-dire $M_n(\nu)$ choix de fibrés associés). Nous indiçons ces $M_n(\nu)$ choix par i. Pouvons nous trouver de tels ν-uplets ? Pour ce faire, nous remplaçons les variables de la i-ième ligne $\{k_r^{(i)}\}|_{i=1,\cdots,M_n(\nu),r=i_1,\cdots,i_\nu}$ par des indéterminées $\{T_r^{(i)}\}|_{i=1,\cdots,M_n(\nu),r=i_1,\cdots,i_\nu}$. Le déterminant de ce système linéaire est un polynôme P en les indéterminées $\{T_r^{(i)}\}$. Ce polynôme P est non nul (car il existe des systèmes de Cramer de taille $M_n(\nu) \times M_n(\nu)$ à coefficients complexes). Par un argument de densité (algébrique) il existe un choix de fibrés associés qui permet d'inverser le système linéaire. □

À la fin de cette étape, nous avons le résultat suivant : *chaque a_{I_ν} est une $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire des $b(\nu, k(\nu))$ faisant intervenir $M_n(\nu)$ choix* ad-hoc *des $k(\nu)$ i.e. $M_n(\nu)$ choix* ad hoc *de fibrés associés*

À partir des renseignements sur le caractère de Chern, nous voulons obtenir des informations sur les nombres de Chern. Posons $C_{J_\mu} = c_{j_1}\cdots c_{j_\nu}$ où J_μ est le multi-indice $(j_1, \cdots, j_\mu)$ tel que $j_1 + \cdots + j_\mu = m$ et $j_l \geqslant 1$. Nous voulons obtenir une version du résultat algébrique précédent en terme des C_{J_μ} : *Chaque C_{J_μ} est une $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire des $b_n(\nu, k(\nu)) = \mathrm{ch}_m(X'(\nu, k(\nu)))$ faisant intervenir un nombre fixé M_n de fibré associé, nombre indépendant de J_μ. Ici μ et ν varient entre* 1 *et m.* Il faut inverser les formules de Newton pour permettre d'écrire chaque classe de Chern $c_i(X)$ comme $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire des $\{a_I\}|_{|I|=i}$. Ainsi pour J_μ un multi-indice de longueur m, C_{J_μ} est une $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire des a_{I_ν} avec I_ν multi-indice de longueur m (remarquons que $\nu \leqslant m$). Comme les a_{I_ν} sont eux-mêmes des $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires des $b(\nu, k(\nu))$ faisant intervenir $M_n(\nu)$ choix *ad-hoc* des $k(\nu)$, nous obtenons le résultat annoncé.

Revenons maintenant à la question de départ, c'est-à-dire montrer que, si la norme $\|R^X\|$ est suffisamment petite, alors le fibré X est homologiquement trivial *i.e.* tous ses nombres de Chern sont nuls.

Notons que $M_n = \sum_{\nu \leqslant m} M_n(\nu)$ est un entier qui majore le nombre de fibrés associés nécessaires pour extraire l'information sur les nombres de Chern de X à partir d'informations sur les caractères de Chern de ses fibrés associés. Si nous montrons que, pour ces M_n choix de fibrés X', nous avons $\mathrm{ch}_m(X')[M] = 0$ alors tous les nombres de Chern de X seront nuls. Soit $\mathscr{X}$ la famille *finie* des M_n fibrés associés précédemment. Remarquons que la façon dont est construite $\mathscr{X}$ à partir des opérations de Adams ne dépend que de la dimension n et pas du fibré X.

Cas où $\hat{\mathrm{A}}(M) = 1$. Dans ce cas, si nous choisissons $\|R^X\| \leqslant \beta_n \kappa$ de façon que β_n soit suffisamment petit pour que tous les fibrés associés $X' \in \mathscr{X}$ vérifient $\|R^{X'}\| \leqslant \frac{\kappa}{\alpha_n}$, alors l'équation (2) assure que $\mathrm{ch}_m(X')[M] = 0$. Le choix de β_n est possible car la technique décrite précédemment ne fait intervenir qu'un nombre *fini* de fibrés associés.

Cas où $\hat{\mathrm{A}}(M) \neq 1$. Nous fixons un nouveau paramètre L de façon que

$$\exists \beta_n(L) \mid \|R^X\| \leqslant \beta_n(L)\kappa \Rightarrow \forall l \leqslant L,\ \forall X' \in \mathscr{X},\ \|R^{X'^{\otimes^l}}\| \leqslant \frac{\kappa}{\alpha_n}.$$

Alors

$$\forall l \leqslant L,\ \forall X' \in \mathscr{X},\ \{\hat{\mathrm{A}}(M)\,\mathrm{ch}(X'^{\otimes^l})\}[M] = 0.$$

Donc, comme $\mathrm{ch}(X'^{\otimes^l}) = \mathrm{ch}(X')^l$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}_L[T]$ de degré $\leqslant L$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, nous avons

$$\{\hat{\mathrm{A}}(M)P(\mathrm{ch}(X'))\}[M] = 0,\ \forall P \in \mathbb{Q}_L[T],\ \forall X' \in \mathscr{X}.$$

En choisissant judicieusement P, nous obtenons

$$\forall X' \in \mathscr{X},\ \mathrm{ch}_m(X')[M] = 0.$$

Pour ce faire, décomposons

$$\hat{\mathrm{A}}(M) = 1 + \hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}}_2 + \cdots$$

où $\hat{\mathrm{A}}_i \in \mathrm{H}^{4i}(M)$. Nous choisissons P de sorte que $P(\mathrm{ch}(X'))$ s'écrive

$$P(\mathrm{ch}(X')) = p_0 + p_1 + \cdots + p_m$$

où $p_i \in \mathrm{H}^{2i}(M)$, $p_m = c\,\mathrm{ch}_m(X')$ avec $c \neq 0$ et $p_{2l} = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\{\widehat{\mathrm{A}}(M)P(\mathrm{ch}(X'))\}[M] &= \{(1+\widehat{\mathrm{A}}_1+\widehat{\mathrm{A}}_2+\cdots)(p_1+p_3+\cdots+p_{2k-1}+p_m)\}[M] \\ &= \{p_m\}[M] = c\,\mathrm{ch}_m(X')[M]\end{aligned}$$

où $m = 2k+1$ ou $m = 2k$. Pour chaque $X' \in \mathscr{X}$, les conditions $\{p_m = c\,\mathrm{ch}_m(X')$ avec $c \neq 0$ et $p_{2l} = 0\}$ imposent un nombre fini de contraintes sur P. En choisissant L assez grand, nous pourrons résoudre ces équations. Le choix de L ne dépend que de la dimension n. Nous pouvons alors conclure comme dans le cas où $\widehat{\mathrm{A}}(M) = 1$.

Le théorème fondamental est donc démontré. □

Exemple 3.7.1. — Traitons le cas où la dimension n est égale à 4. La $\widehat{\mathrm{A}}$-classe se décompose alors sous la forme $\widehat{\mathrm{A}}(M) = 1 + \widehat{\mathrm{A}}_1$. Pour un fibré X' de rang r, posons $\lambda = \mathrm{ch}(X') = r + \mathrm{ch}_1 + \mathrm{ch}_2$, alors

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= r^2 + 2r\,\mathrm{ch}_1 + (2r\,\mathrm{ch}_2 + \mathrm{ch}_1^2) \\ \lambda^3 &= r^3 + 3r^2\,\mathrm{ch}_1 + ((2r^2+r)\,\mathrm{ch}_1^2 + r^2\,\mathrm{ch}_2).\end{aligned}$$

Nous voulons trouver un polynôme P tel que $P(\mathrm{ch}(X')) = c\,\mathrm{ch}_2 + p_1 + 0$ où $c \neq 0$ et $p_1 \in \mathrm{H}^2(M)$. Le polynôme $P(Y) = Y^3 - (2r^2+r)Y^2 - 2r^4$ convient. En effet, nous avons alors

$$\begin{aligned}\{\widehat{\mathrm{A}}(M)P(\mathrm{ch}(X'))\}[M] &= \{(1+\widehat{\mathrm{A}}_1)((r^2-2r^3)\,\mathrm{ch}_1 + (-r^2-2r^3)\,\mathrm{ch}_2)\}[M] \\ &= \{(-r^2-2r^3)\,\mathrm{ch}_2\}[M].\end{aligned}$$

Remarques.

— Pour les surfaces fermées,

$$\mathrm{scal}^g \geqslant \varepsilon^{-2} \Rightarrow \text{K-aire}(M) \leqslant 4\varepsilon^2.$$

— Pour les sphères de dimension paire et munies de la métrique canonique, nous obtenons

$$\text{K-aire}(S^{2m}) \leqslant \frac{k_{2m}}{2m(2m-1)}.$$

Pour les projectifs complexes $\mathbb{C}P^m$, qui sont spinoriels pour m impair, et la métrique canonique (dont la courbure sectionnelle varie entre 1 et 4), nous obtenons

$$\text{K-aire}(\mathbb{C}P^m) \leqslant \frac{k_{2m}}{4m(m+1)}.$$

Comme nous savons d'autre part que K-aire$(\mathbb{C}P^m) \geqslant \frac{1}{4}$, nous avons

$$k_{2m} \geqslant m(m+1) \text{ pour } m \text{ impair.}$$

En particulier, cette constante tend vers l'infini lorsque m tend vers l'infini.

3.2.2. Passage aux variétés ouvertes.

Nous pouvons aussi nous placer résolument dans le cadre de la K-théorie et utiliser des fibrés virtuels [Gro96, p. 25]. En effet un élément de la K-théorie de M s'exprime comme la différence entre deux classes de fibré sur M. Nous écrirons :

$$\xi = [X_1] - [X_2]$$

Dans ce cas, la classe de Chern de ξ sera

$$c(\xi) = c(X_1)c(X_2)^{-1}$$

et la norme de la courbure sera remplacée par

$$\|R^{\xi}\| = \min_{\xi=[X_1]-[X_2]} \max\left(\|R^{X_1}\|, \|R^{X_2}\|\right).$$

Un fibré virtuel sera non homologiquement trivial s'il existe X_1 et X_2 tels que $\xi = [X_1] - [X_2]$ où X_1 et X_2 ont la même trivialisation à l'infini et la même connexion s'il existe un nombre de Chern non nul. Remarquons qu'avec cette définition, le fibré virtuel ξ est en fait dans la K-théorie réduite $\widetilde{K}(M)$ de M. Nous définissons alors

$$\text{K-aire}^{+}(M) = \left(\inf \|R^{\xi}\|\right)^{-1}$$

où la borne inférieure est prise sur tous les fibrés virtuels non homologiquement triviaux.

Il est facile de voir que

$$\text{K-aire}^{+}(M) \geqslant \text{K-aire}(M)$$

en utilisant le fibré virtuel $[X] - [\Theta_{\mathrm{rang}(X)}]$.

En utilisant le théorème de l'indice relatif pour les variétés complètes (voir [GL83]), nous pouvons montrer que :

THÉORÈME 3.8 (M. Gromov [Gro96] page 37). — *Soit (M, g) une variété ouverte, complète, de dimension paire $n = 2m$, spinorielle, nous avons*

$$\mathrm{scal} \geqslant \varepsilon^{-2} \Rightarrow \text{K-aire}^{+}(M) \leqslant k_n \varepsilon^2,$$

et si la dimension est impaire,

$$\mathrm{scal} \geqslant \varepsilon^{-2} \Rightarrow \text{K-aire}^{+}(M \times S^1) \leqslant k_n \varepsilon^2,$$

où k_n est la même constante que celle qui intervient dans le Théorème 3.6.

Démonstration. — Soit (M, g) une variété ouverte, complète, de dimension paire $n = 2m$, spinorielle. Considérons le fibré virtuel non homologiquement trivial $\xi = [X_0] - [X_1]$. Nous pouvons alors définir deux fibrés de Dirac tordu $\mathrm{D}_0 = D\!\!\!\!/^{X_0}$ et $\mathrm{D}_1 = D\!\!\!\!/^{X_1}$.

Comme les connexions coïncident à l'infini, il existe un compact K dans M tel que $\mathrm{D}_0 = \mathrm{D}_1$ sur $M - K = \Omega$.

Soit H un voisinage de $\partial\Omega$. Nous compactifions M en collant un compact le long de H. Nous étendons alors D_0^+ et D_1^+ en $\widetilde{\mathrm{D}}_0^+$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_1^+$ et définissons

$$\mathrm{ind}_t(\mathrm{D}_0^+, \mathrm{D}_1^+) = \mathrm{ind}_t(\widetilde{\mathrm{D}}_0^+) - \mathrm{ind}_t(\widetilde{\mathrm{D}}_1^+).$$

Cette définition ne dépend pas des extensions choisies. Nous sommes alors exactement dans les conditions d'application du théorème de l'indice relatif :

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_t(\mathrm{D}_0^+, \mathrm{D}_1^+) &= \{\hat{\mathrm{A}}(M)\,\mathrm{ch}(\xi)\}[M] \\ &= \mathrm{ind}_a(\mathrm{D}_0^+) - \mathrm{ind}_a(\mathrm{D}_1^+). \end{aligned}$$

Les deux indices analytiques $\mathrm{ind}_a(\mathrm{D}_0^+)$ et $\mathrm{ind}_a(\mathrm{D}_1^+)$ existent [GL83, §3]. De plus, la formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck s'écrit toujours de la même manière et s'utilise de même. Le reste de la preuve est identique au cas de la K-aire.

Pour passer à la dimension impaire, nous remplaçons M par $M \times S^1$. □

Comme nous avons K-aire$^+(M) \geqslant$ K-aire(M), le théorème fondamental de M. Gromov est valable pour toutes les variétés complètes, pas seulement pour les variétés fermées.

3.2.3. Prolongement.

Dans ma thèse [Dav02, Chap. 3], je donne une amélioration du théorème fondamental de M. Gromov faisant intervenir la borne inférieure du spectre du laplacien sur les fonctions de carré intégrable défini sur le revêtement universel, noté $\lambda_0(\widetilde{M}, \tilde{g})$. En voici l'enoncé :

THÉORÈME 3.9. — *Toute variété riemannienne (M, g), fermée, spinorielle, de dimension n vérifie, si $n = 2m$,*

$$\frac{1}{4}\inf \mathrm{scal}(M, g) + \frac{n}{n-1}\lambda_0(\widetilde{M}, \tilde{g}) \leqslant k_n\,\text{K-aire}(M, g)^{-1},$$

et, si $n = 2m - 1$,

$$\frac{1}{4}\inf \mathrm{scal}(M, g) + \frac{n}{n-1}\lambda_0(\widetilde{M}, \tilde{g}) \leqslant k_n\,\text{K-aire}(M \times S^1, g \times \mathrm{can})^{-1}$$

où k_n est la même constante universelle que dans le Théorème 3.6.

Bibliographie

[Bau91] H. BAUM, *An upper bound for the first eigenvalue of the Dirac oprator on compact spin manifold.* Math. Z., **206**-3 (1991), 409–422.

[BK78] J.-P. Bourguignon et H. Karcher, *Curvature operators: pinching estimates and geometric exam ples*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **11**-1 (1978), 71–92.

[BK81] P. Buser et H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*. Société Mathématique de France, Paris, 1981.

[Dav02] H. Davaux, *K-aire et courbure scalaire des variétés riemanniennes*. Thèse de l'Université Montpellier II, 2002.

[GHL90] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.

[GL80a] M. Gromov et H. Blaine Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*. Ann. of Math. (2), **11**-3 (1980), 423–434.

[GL80b] M. Gromov et H. Blaine Lawson, *Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group, I*. Ann. of Math. (2), **111**-2 (1980), 209–230.

[GL83] M. Gromov et H. Blaine Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **58** (1984), 83–196.

[Gro81] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. CEDIC, Paris, 1981.

[Gro96] M. Gromov, *Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures*, In Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. II (New Brunswick, NJ, 1993), pages 1–213. Birkhäuser Boston, MA, 1996.

[Hus94] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.

[Kar77] H. Karcher, *Riemannian center of mass and mollifier smoothing*. Comm. Pure Appl. Math., **30** 5 (1977), 509–541

[LM89] H. Blaine Lawson et M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[Ste57] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

Hélène DAVAUX
Université Montpellier II
Département de Mathématique cc51
Laboratoire GTA
CNRS UMR 5030
F-34095 MONTPELLIER (France)
davaux@math.univ-montp2.fr