

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GRÉGOIRE CHARLOT

**Métriques sous-riemanniennes de quasi-contact :
forme normale et caustique**

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 20 (2001-2002), p. 131-137

http://www.numdam.org/item?id=TSG_2001-2002__20__131_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 2001-2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTRIQUES SOUS-RIEMANNIENNES DE QUASI-CONTACT : FORME NORMALE ET CAUSTIQUE

Grégoire CHARLOT

In this paper, all considerations are local, around a point \mathfrak{p} , so we will assume that we work over the manifold $M = \mathbf{R}^{2n+2}$.

Let $(\mathbf{R}^{2n+2}, \Delta, g)$ be a quasi-contact subriemannian structure, that is, for any 1-form ω such that $\ker(\omega) = \Delta$, then $\ker(d\omega|_{\Delta})$ has dimension 1, and g is a riemannian metric over Δ . We denote by δ the kernel of $d\omega|_{\Delta}$ and by Δ_0 its orthogonal for g in Δ . We choose ω such that $\ker(\omega) = \Delta$, $(d\omega|_{\Delta_0})^n = \text{vol}_{g|\Delta_0}$. It is defined up to sign.

Let $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}'}$ be the endomorphism of $\Delta(\mathfrak{p}')$, skew-symmetric w.r.t. g , such that $d\omega_{\Delta(\mathfrak{p}')} = g(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}'}, \cdot)$. Its eigenvalues are complex numbers. In all the sequel, we will assume that these eigenvalues are all simple at the point \mathfrak{p} . Now, we can write them:

$$\{-i\alpha_1, \dots, -i\alpha_n, 0, i\alpha_n, \dots, i\alpha_1\}$$

with $0 < \alpha_n < \dots < \alpha_1$. We denote by $\delta_i(\mathfrak{p}')$ the 2-dimensional stable space associated with α_i at \mathfrak{p}' . Close to \mathfrak{p} , one can check that $[\delta_1, \delta_1] \cap \delta_1^{\perp d\omega}$ has dimension 1 and is transversal to Δ , where $\delta_1^{\perp d\omega}$ is the orthogonal to δ_1 for $d\omega$. We denote by ν the vector field in this intersection that satisfies $\omega(\nu) = 1$.

Now, we can state the normal coordinates:

THEOREM 1. — *In a neighborhood of a point \mathfrak{p} where the α_i are all distinct and non zero, there exists a local coordinate system $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z, w)$, called a normal coordinate system, such that:*

- $(0, \dots, 0) = \mathfrak{p}$.
- Along the w -axis we have $\frac{\partial}{\partial w} = \nu$.
- The couple $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ is a basis of δ_i such that $d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) > 0$ and $\text{span}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \ker d\omega|_{\Delta}$ along the w -axis.

- The lines contained in a set $S_{w_0} = \{w = w_0\}$ and containing $(0, w_0)$ are geodesics of the subriemannian structure, that minimize the subriemannian distance to the w -axis. The local distance between (x_i, y_i, z, w) and the w -axis is $\sqrt{z^2 + \sum_i x_i^2 + y_i^2}$.
- If we denote by P_{w_0} the orthogonal projection on S_{w_0} in this coordinate system, then we can define a metric g_{w_0} at each point $p' \in S_{w_0}$ by $(g_{w_0})_{p'} = (dP_{w_0}|_{\Delta_{p'}})_* g$. The sectional curvatures of g_{w_0} , relative to the 2-planes $\delta_i(0, w_0)$ all vanish at $(0, w_0)$.

This normal coordinate system is unique up to rotations in the spaces $\delta_i(p)$ hence up to a maximal torus T^n of $SO(\Delta_p)$. Because the normal coordinates are privileged coordinates in the sense of [9], we can associate weight 1 with the coordinates x_i, y_i, z and weight 2 with w .

Now, computing in a normal coordinate system, we want to construct a field of normal frames \mathcal{F} of the distribution, $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} Q \\ L \end{pmatrix}$, where Q is a $(2n+1) \times (2n+1)$ -block and L is a $1 \times (2n+1)$ -block. The columns of the matrix are the vector fields of the frame \mathcal{F} , written in the normal coordinates. Let K be the matrix of g_{w_0} in the basis $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z})$. We choose $Q = K^{-\frac{1}{2}}$. Then L is determined by ω . The matrices L and Q have properties that one can find in theorem 2 below.

Let us denote by $S^\ell(\Delta_p)$ the space of contravariant symmetric tensors of degree ℓ over Δ and by $S^\ell(\Delta_p^*)$ the space of covariant symmetric tensors of degree ℓ over Δ . The normal form allows to define a family of tensors:

$$B_{\ell,k}^1 : \begin{cases} S^\ell(\Delta(p)) \otimes S^2(\Delta(p)) & \rightarrow \mathbf{R} \\ (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \otimes (V_1 \otimes V_2) & \rightarrow D^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k} ({}^t V_1 Q V_2) \right)_{|_p} (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \end{cases}$$

and

$$B_{\ell,k}^2 : \begin{cases} S^\ell(\Delta(p)) \otimes \Delta(p) & \rightarrow \mathbf{R} \\ (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \otimes (V) & \rightarrow D^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k} (L.V) \right)_{|_p} (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \end{cases}$$

where D^ℓ denote the ℓ^{th} derivative with respect to (x_i, y_i, z) . When we move the base-point p we build fields of tensors. They are invariants of the subriemannian structure. The action of T^n on $\Delta(p)$ induces a unitary representation of T^n on the typical fibers of the tensor bundles in consideration. T^n being abelian and compact, these unitary representations are unitarily equivalent to a finite direct sum of characters.

The space of covariant symmetric tensors of degree k over $\Delta(p)$ can be canonically identified to the set $\tilde{S}^k(\Delta^*(p))$ of real parts of homogeneous polynomials of degree k of the complex variables $z_j = x_j + iy_j$ and \bar{z}_j ($j = 1, \dots, n$), and of the real variable z . The action of T^n is the one associated with the basic characters $\mathcal{X}(\theta)z_j = e^{i\theta} z_j$. A decomposition of this action of T^n on $\tilde{S}^k(\Delta^*)$ in characters is the following: a polynomial

$P_k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ can be written in a unique way:

$$P_k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z) = \sum_{\substack{I, J, \ell \\ \ell + \sum_i I_i + J_i = k}} \operatorname{Re}(\Lambda_{I, J, \ell} (\prod_i z_i^{I_i} \bar{z}_i^{J_i}) z^\ell)$$

with $\overline{\Lambda_{I, J, \ell}} = \Lambda_{J, I, \ell}$. The character corresponding to $z^\ell \prod_i z_i^{I_i} \bar{z}_i^{J_i}$ is $e^{i((I_1 - J_1)\theta_1 + \dots + (I_n - J_n)\theta_n)}$.

Now, let us assume that we are dealing with the **4-dimensional case**. We define the complexes Ae^{ia} , Be^{ib} , Ce^{ic} , De^{id} and λ by $\lambda = \frac{\partial(\omega(\frac{\partial}{\partial z}))}{\partial z}(\mathfrak{p})$ and:

$$\begin{aligned} L_2[3] &= \operatorname{Re}[Ae^{ia}(x + iy)^2 + Be^{ib}z(x + iy)], \\ L_3[1] &= \operatorname{Re}[Ce^{ic}(x^2 + y^2)(x + iy) + De^{id}(x + iy)^3] + O(z, w). \end{aligned}$$

where $L_i[j]$ is the homogeneous part of degree i of the j^{th} coordinate of L w.r.t the normal coordinates with their weights. In other words, Ae^{ia} is $2\Lambda_{2,0,0}$ and Be^{ib} is $2\Lambda_{1,0,1}$ for $P_2 = D^2(L \cdot \frac{\partial}{\partial z})_{\mathfrak{p}}$, and if $V = \frac{\partial}{\partial x}$ in this coordinate system, then Ce^{ic} is $2\Lambda_{2,1,0}$ and De^{id} is $2\Lambda_{3,0,0}$ for $P_3 = D^3(L.V)_{\mathfrak{p}}$. The real numbers A, B, C, D, λ and $(a - d)$ are invariants.

THEOREM 3. — *If A, B and $\operatorname{Re}[96De^{i(d-a)} - 45A^2\lambda]$ are not 0 at \mathfrak{p} then the only one local singularities, corresponding to the first caustic, of the exponential map with pôle \mathfrak{p} are folds (\mathcal{A}_2), cusps (\mathcal{A}_3) and singularities of type \mathcal{D}_4^* (see [8] for definition). We present some pictures of the first caustic at the end of this paper.*

Dans cet article, toutes les considérations étant locales, on supposera que l'on travaille au voisinage d'un point \mathfrak{p} de \mathbf{R}^{2n+2} . Soit $(\mathbf{R}^{2n+2}, \Delta, g)$ une structure sous-riemannienne de quasi-contact, c'est-à-dire que Δ est une distribution telle que si $\ker(\omega) = \Delta$, alors $\ker(d\omega_\Delta)$ est de dimension 1, et g est une métrique riemannienne sur Δ .

On pose $\delta = \ker(d\omega|_\Delta)$ et Δ_0 son orthogonal pour g dans Δ . On choisit la 1-forme ω telle que $\ker(\omega) = \Delta$ et $(d\omega|_{\Delta_0})^n = \operatorname{vol}_{g|_{\Delta_0}}$. Elle est définie au signe près.

Soit $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}'}$ l'endomorphisme de $\Delta(\mathfrak{p}')$, antisymétrique pour la métrique g , tel que $d\omega|_{\Delta(\mathfrak{p}')} = g(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}'}, \cdot)$. Ses valeurs propres sont des imaginaires pures. Dans la suite, on supposera les valeurs propres deux-à-deux distinctes au point \mathfrak{p} . On peut alors les écrire :

$$\{-i\alpha_1, \dots, -i\alpha_n, 0, i\alpha_n, \dots, i\alpha_1\}$$

où $0 < \alpha_n < \dots < \alpha_1$. On note $\delta_i(\mathfrak{p}')$ l'espace stable de dimension 2 associé à α_i en \mathfrak{p}' . On peut vérifier que, au voisinage de \mathfrak{p} , la distribution $[\delta_1, \delta_1] \cap \delta_1^{\perp d\omega}$ est de dimension 1 et est transverse à Δ . On note ν le champ de vecteurs dans cette intersection vérifiant $\omega(\nu) = 1$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Au voisinage d'un point p où les α_i sont deux-à-deux distincts et non nuls, il existe un système de coordonnées locales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z, w)$, appelé système de coordonnées normales, tel que:*

- $(0, \dots, 0) = p$.
- *Le long de l'axe w , on a $\frac{\partial}{\partial w} = v$.*
- *Le couple $(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i})$ forme une base directe de δ_i pour dw et $\text{vect}(\frac{\partial}{\partial z}) = \ker dw|_{\Delta}$ le long de l'axe w .*
- *Les droites contenues dans $S_{w_0} = \{w = w_0\}$ et passant par $(0, w_0)$ sont des géodésiques de la structure sous-riemannienne, qui minimisent la distance à l'axe w . Localement, la distance entre (x_i, y_i, z, w) et l'axe w est $\sqrt{z^2 + \sum_i (x_i^2 + y_i^2)}$.*
- *La projection orthogonale P_{w_0} sur S_{w_0} dans ce système de coordonnées permet de définir la métrique g_{w_0} en tout point $p' \in S_{w_0}$ par $(g_{w_0})_{p'} = (dP_{w_0}|_{\Delta_{p'}})_* g$. Les courbures sectionnelles de g_{w_0} , relativement aux 2-plans $\delta_i(0, w_0)$, sont toutes nulles en $(0, w_0)$.*

Ce système de coordonnées est unique modulo les rotations dans les plans $\delta_i(p)$, c'est-à-dire modulo un tore maximal T^n de $SO(\Delta(p))$. Les coordonnées normales étant des coordonnées privilégiées au sens de [9], on peut associer le poids 1 aux coordonnées x_i, y_i, z et le poids 2 à w .

On cherche maintenant à construire un champs de bases orthonormées de la distribution, $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} Q \\ L \end{pmatrix}$, où Q est un bloc $(2n+1) \times (2n+1)$, L un bloc $1 \times (2n+1)$ et les colonnes de \mathcal{F} sont les vecteurs de la base orthonormée. Soit K_{w_0} la matrice de la métrique g_{w_0} dans la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z})$. On pose $Q = K^{-\frac{1}{2}}$. L est alors déterminé par w .

On note Q_i et L_i les parties homogènes de poids i , en les variables munies de leurs poids respectifs, des matrices Q et L . On note aussi Q^{ii} le i^{me} bloc 2×2 sur la diagonale de Q . On note enfin (ζ_i, w) le point de coordonnées $(0, \dots, 0, x_i, y_i, 0, \dots, 0, w)$. On peut alors énoncer le résultat :

THÉORÈME 2 (Forme normale). — *Un système de coordonnées normales étant choisi, il existe un unique champ de bases orthonormées \mathcal{F} , défini comme précédemment par un couple (Q, L) unique, tel que les matrices Q et L vérifient :*

1. $Q = {}^t Q$.
2. $Q_0 = Id_{2n+1}$.
3. $\langle Q(x_1, \dots, y_n, z, w), (x_1, \dots, y_n, z)^t \rangle = (x_1, \dots, y_n, z)^t$.
4. $Q_1 = 0$.
5. $Q^{ii}(\zeta_i, w) = \begin{pmatrix} 1 + y_i^2 \beta_i(\zeta_i, w) & -x_i y_i \beta_i(\zeta_i, w) \\ -x_i y_i \beta_i(\zeta_i, w) & 1 + x_i^2 \beta_i(\zeta_i, w) \end{pmatrix}$, $\beta_i(0, w) = 0$.
6. $\langle L(x_1, \dots, y_n, z, w), (x_1, \dots, y_n, z)^t \rangle = 0$.

7. $L_0 = 0$.
8. $L_1 = (\frac{\alpha_1 y_1}{2}, \frac{-\alpha_1 x_1}{2}, \dots, \frac{\alpha_n y_n}{2}, \frac{-\alpha_n x_n}{2}, 0)$.
9. $\frac{\partial^2 L_2(2n+1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L_2(2n+1)}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial x_1 \partial z} + \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial y_1 \partial z}$,
10. $\forall j \neq 1$

$$0 = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 L_2(2j-1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L_2(2j-1)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial y_1 \partial x_j} \right) + \alpha_j \left(\frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial y_1 \partial y_j} - \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial x_1 \partial y_j} \right),$$

$$0 = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 L_2(2j)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L_2(2j)}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial x_1 \partial y_j} - \frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial y_1 \partial y_j} \right) + \alpha_j \left(\frac{\partial^2 L_2(2)}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{\partial^2 L_2(1)}{\partial y_1 \partial x_j} \right),$$
11. $n\lambda z = \sum_i \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\partial L_2(2i)}{\partial x_i} - \frac{\partial L_2(2i-1)}{\partial y_i} \right)$, où $\lambda = \frac{\partial(\omega(\frac{\partial}{\partial w}))}{\partial z}(0)$.

Notons $S^\ell(\Delta_p)$ l'espace des tenseurs symétriques contravariants de degré ℓ sur Δ et par $S^\ell(\Delta_p^*)$ l'espace des tenseurs symétriques covariants de degré ℓ sur Δ . La forme normale permet de définir deux familles de tenseurs :

$$B_{\ell,k}^1 : \begin{cases} S^\ell(\Delta(p)) \otimes S^k(\Delta(p)) & \rightarrow \mathbf{R} \\ (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \otimes (V_1 \otimes V_2) & \rightarrow D^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k} ({}^t V_1 Q V_2) \right)_{|p} (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \end{cases}$$

et

$$B_{\ell,k}^2 : \begin{cases} S^\ell(\Delta(p)) \otimes \Delta(p) & \rightarrow \mathbf{R} \\ (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \otimes (V) & \rightarrow D^\ell \left(\frac{\partial^k}{\partial w^k} (L.V) \right)_{|p} (U_1 \otimes \dots \otimes U_\ell) \end{cases}$$

où D^ℓ est la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ par rapport à (x_i, y_i, z) . Quand le point base p varie, on obtient des champs de tenseurs. Ce sont des invariants de la structure sous-riemannienne. L'action de T^n sur Δ_p produit naturellement une représentation unitaire de T^n sur les fibres typiques des fibrés tensoriels que l'on considère. T^n étant abélien et compact, ces représentations sont unitairement équivalentes à des sommes directes finies de caractères.

L'espace des tenseurs symétriques covariants de degré k sur Δ peut être identifié canoniquement à l'espace $\tilde{S}^k(\Delta^*)$ des parties réelles des polynômes homogènes de degré k des variables complexes $z_j = x_j + iy_j$ et \bar{z}_j ($j = 1, \dots, n$), et de la variable réelle z . L'action de T^n est celle induite par $\mathcal{X}(\theta)z_j = e^{i\theta_j} z_j$. La décomposition de cette action en caractères est la suivante : un polynôme $P_k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ peut être écrit de façon unique :

$$P_k(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z) = \sum_{\substack{I, J, \ell \\ \ell + \sum_i I_i + J_i = k}} \text{Re}(\Lambda_{I, J, \ell} \left(\prod_i z_i^{I_i} \bar{z}_i^{J_i} \right) z^\ell)$$

avec $\overline{\Lambda_{I, J, \ell}} = \Lambda_{J, I, \ell}$. Le caractère correspondant à $z^\ell \prod_i z_i^{I_i} \bar{z}_i^{J_i}$ est $e^{i((I_1 - J_1)\theta_1 + \dots + (I_n - J_n)\theta_n)}$.

On étudie maintenant l'application exponentielle dans le cas de **dimension 4**. On définit les complexes Ae^{ia} , Be^{ib} , Ce^{ic} , De^{id} et λ par $\lambda = \frac{\partial(\omega(\frac{\partial}{\partial w}))}{\partial z}(p)$ et :

$$L_2[3] = \text{Re} [Ae^{ia}(x + iy)^2 + Be^{ib}z(x + iy)],$$

$$L_3[1] = \text{Re} [Ce^{ic}(x^2 + y^2)(x + iy) + De^{id}(x + iy)^3] + O(z, w).$$

où $L_i[j]$ est la partie homogène de degré i de la j^{me} composante de L . En d'autres termes, Ae^{ia} est $2\Lambda_{2,0,0}$ et Be^{ib} est $2\Lambda_{1,0,1}$ pour $P_2 = D^2\left(L \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)_p$, et si $V = \frac{\partial}{\partial x}$ dans ce système de coordonnées normales, alors Ce^{ic} est $2\Lambda_{2,1,0}$ et De^{id} est $2\Lambda_{3,0,0}$ pour $P_3 = D^3(L \cdot V)_p$. Les nombres réels A, B, C, D, λ et $(a - d)$ sont des invariants de la structure sous-riemannienne.

THÉORÈME 3. — Si A, B et $\text{Re}[96De^{i(d-a)} - 45A^2\lambda]$ ne sont pas nuls en p alors les seules singularités locales, correspondant à la première caustique, de l'application exponentielle de pôle p , sont des plis (\mathcal{A}_2), des fronces de Whitney (\mathcal{A}_3) et des singularités de type \mathcal{D}_4^+ (voir [8] pour définition).

D'autre part, la première figure ci-dessous représente une coupe de la première caustique à $z = z_0 \neq 0$ et la seconde figure une coupe à $w = w_0 \neq 0$. Les points où la caustique est lisse correspondent à des plis (\mathcal{A}_2), les autres à des fronces de Whitney (\mathcal{A}_3) sauf deux points, où une ligne de fronces s'arrête, qui sont des singularités de type \mathcal{D}_4^+ . La coupe de la

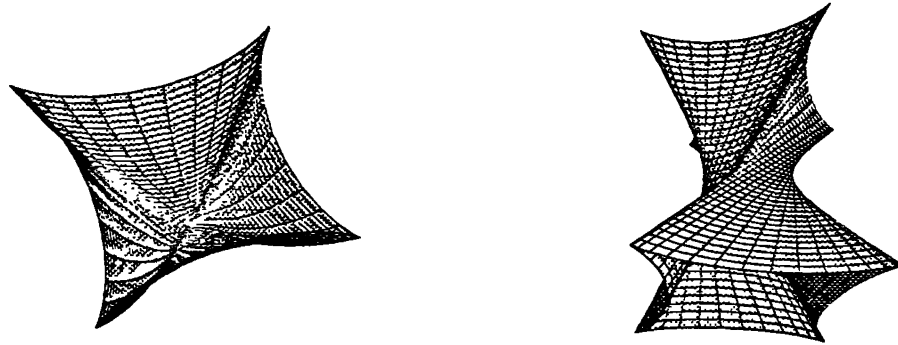


FIG. 1: Les coupes à $z = z_0 \neq 0$ et $w = w_0 \neq 0$

première caustique à $z = 0$ est identique à la première caustique dans le cas de contact de dimension 3 (voir [5] et FIG. 2) :

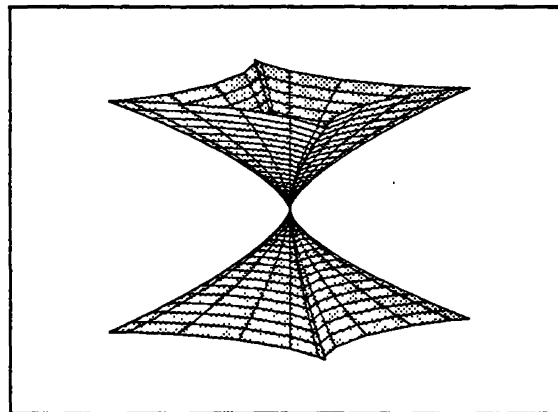


FIG. 2: Coupe à $z = 0$

Les preuves détaillées des théorèmes peuvent être trouvées dans [11].

Bibliographie

- [1] A.A. AGRACHEV, H. CHAKIR, J.P. GAUTHIER, *Sub-Riemannian metrics on \mathbf{R}^3* , Proceedings of Canadian Math. Soc., Vol. 25 (1998), 29–77.
- [2] A.A. AGRACHEV, H. CHAKIR, J.P. GAUTHIER, I. KUPKA, *Generic singularities of sub-Riemannian metrics on \mathbf{R}^3* , Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Vol 322, série 1 (1996), 377–384.
- [3] A.A. AGRACHEV, G. CHARLOT, J.P. GAUTHIER, V.M. ZAKALYUKIN, *On sub-Riemannian caustics and wave fronts, for contact distributions in the three space*, J. Dynam. Control Systems 6, n° 3 (2000), 365–395.
- [4] A.A. AGRACHEV, G. CHARLOT, J-PA. GAUTHIER, V.M. ZAKALYUKIN, *On stability of generic subriemannien caustic in the three-space*, C.R.A.S. Paris, t. 330, Série 1 (2000), 465–470.
- [5] A.A. AGRACHEV, J.P. GAUTHIER, *Sub-Riemannian metrics and isoperimetric problems in the contact case*, Contemporary Math., Tome 64, pp. 5–48, 1999 (in russian) or Journal of Math. Sciences, vol 103 n° 6, pp. 639–663, march 2001.
- [6] A.A. AGRACHEV, J.P. GAUTHIER, *On Subanalyticity of Carnot-Carathodory Distances*, Annales de l'I.H.P., Vol 18, analyse non linéaire (2001), 359–382.
- [7] A.A. AGRACHEV, A.V. SARYCHEV, *Sub-Riemannian metrics: minimality of abnormal geodesics versus sub-analyticity*, J. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, Vol. 2 (1997), 377–448.
- [8] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADÉ, *Singularités des applications différentiables*, Ed. MIR, Moscow, French translation, 1986.
- [9] A. BELLAÏCHE, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in “Sub-Riemannian Geometry”, edited by A. Bellaï che and J-J. Risler, Progress in Mathematics. Birkhäuser.
- [10] H. CHAKIR, J.P. GAUTHIER, I. KUPKA, *Small sub-Riemannian balls on \mathbf{R}^3* , Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 2, n° 3 (sept. 1996), 359–421.
- [11] G. CHARLOT, *Quasi-contact S-R metrics: normal form in \mathbf{R}^{2n} , wave front and caustic in \mathbf{R}^4* , à paraître dans Acta Applicandae Mathematicae.

Grégoire CHARLOT
Via Beirut 4
34014 TRIESTE (Italy)
charlot@ma.sissa.it