Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

RICHARD PÉREYROL

Une inégalité isopérimétrique en courbure négative d'après Christopher B. Croke

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 49-57
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__49_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 49–57

UNE INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE EN COURBURE NÉGATIVE d'après Christopher B. Croke

Richard PÉREYROL

1. Le problème

Le problème isopérimétrique classique consiste à chercher les domaines de $\mathbb{R}^2$ d'aire maximale parmi les domaines de périmètre fixé. Les disques sont les solutions à ce problème. On peut en fait traduire ce résultat par une inégalité – dite isopérimétrique – liant le périmètre P et l'aire A :

$$P^2 \geqslant 4\pi A,$$

dans laquelle il y a égalité si et seulement si le domaine est un disque. Ce résultat demeure pour les domaines (ouverts relativement compacts à bord lisse) de $\mathbb{R}^n$: pour un domaine D, on a l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Vol}(\partial D)^n \geqslant \overline{C}(n)\mathrm{Vol}(D)^{n-1},$$

avec $\overline{C}(n) = \dfrac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^n}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n)^{n-1}} = n^{n-1}\alpha(n-1)$, si $\alpha(n) = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)$ est le volume de la sphère unité euclidienne de dimension n.

À propos de ce résultat classique, voir par exemple [Ch].

Une généralisation de ce résultat consiste en la conjecture suivante :

CONJECTURE 1. — *Pour tout domaine compact M d'une variété complète simplement connexe de courbure négative ou nulle, on a l'inégalité suivante*

$$Vol(\partial M)^n \geqslant \overline{C}(n)\, Vol(M)^{n-1}$$

avec égalité si et seulement si M est isométrique à une boule euclidienne.

Remarques.

- si pour les domaines M on se restreint aux boules géodésiques, la conjecture se montre par des théorèmes de comparaison ;

Classification math. : 53C20, 52A40.

– si l'espace ambiant est de courbure négative constante, la conjecture se prouve par symétrisation.

Cette conjecture a été prouvée en dimension 2 par A. WEIL en 1926, et elle est ouverte dans les autres dimensions sauf 4 (prouvé par C.B. CROKE : c'est l'objet de cet exposé) et 3 (prouvé par Bruce KLEINER dans [K], voir à ce propos l'exposé de Constantin VERNICOS ([V]) dans le présent volume).

Dans la suite, nous exposons la preuve de C.B. CROKE en montrant le théorème suivant, dont les hypothèses découlent de celles de la conjecture.

THÉORÈME 1.1. — *Soit M une variété compacte de dimension n* ($n \geqslant 3$) *et de courbure négative ou nulle telle que toute géodésique est minimisante jusqu'au bord.*

Alors

$$Vol(M)^n \geqslant C(n)\, Vol(\partial M)^{n-1},$$

où,

$$C(n) = \frac{\alpha(n-1)^{n-1}}{\alpha(n-2)^{n-2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/n-2}(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{n-2}}.$$

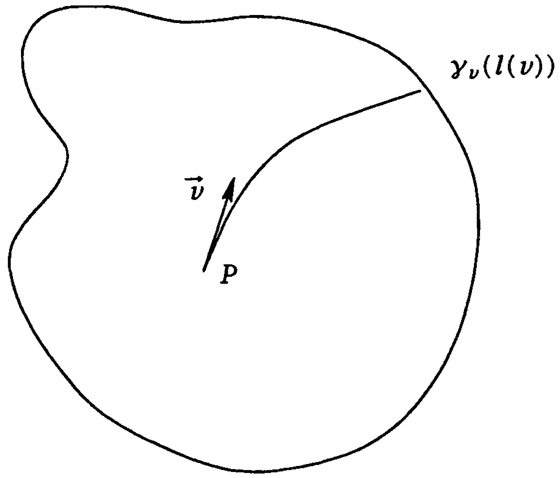
Si $n \neq 4$, *il n'y a jamais égalité. Si* $n = 4$, *il y a égalité si et seulement si M est isométrique à une boule euclidienne.*

Il est à remarquer que ce théorème donne une inégalité isopérimétrique pour toute dimension $n \geqslant 3$, mais résout la conjecture uniquement dans le cas $n = 4$, et dans ce cas, $C(4) = \overline{C}(4) = 128\pi^2$.

2. Preuve du théorème

2.1. Notations

On note $UM \xrightarrow{\pi} M$ le fibré unitaire de M muni de la mesure canonique de Liouville (produit local). Pour $v \in UM$ on désigne par γ_v la géodésique telle que $\gamma_v'(0) = v$ et par $\Phi_t(v) = \gamma_v'(t)$ le flot géodésique. Pour $v \in UM$ soit $l(v) = \max\{t \mid \gamma_v([0,t]) \subset M\}$.



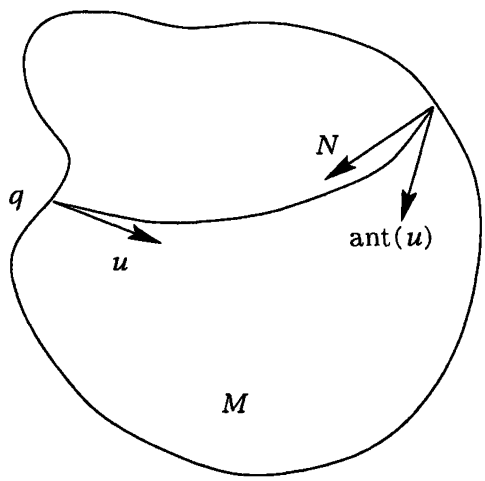
On considère aussi le fibré $U^+\partial M \longrightarrow \partial M$: si N_p est la normale intérieure au bord en $p \in \partial M$,

$$U^+\partial M = \{u \in UM \mid \pi(u) \in \partial M \text{ et } \langle u, N_{\pi(u)}\rangle > 0\}.$$

On utilisera les notations suivantes :

$\operatorname{ant} u = -\Phi_{l(u)}(u)$;

$\cos u = \langle u, N_{\pi(u)}\rangle$.



On peut alors obtenir la formule suivante, qui consiste à intégrer le long des rayons géodésiques issus de chaque point du bord :

Formule de Santalo : *Pour f intégrable,*

$$\int_{UM} f(v)\,\mathrm{d}v = \int_{U^+\partial M}\int_0^{l(u)} f(\Phi_t(u))\cos(u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

Cette formule appliquée à la fonction constante $f \equiv 1$ donne l'égalité :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\mathrm{Vol}(M) = \int_{U^+\partial M} l(u)\cos u\,\mathrm{d}u.$$

Nous pouvons alors commencer le preuve du théorème.

2.2. L'inégalité

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(M) = &\quad \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{U^+\partial M} l(u)\cos u\,\mathrm{d}u \\
= &\quad \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{U^+\partial M} \frac{l(u)}{(\cos(\mathrm{ant}u))^{1/(n-1)}}\cos^{1/(n-1)}(\mathrm{ant}u)\cos u\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, avec les coefficients $n-1$ et $\dfrac{n-1}{n-2}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(M) \leqslant &\quad \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}\left[\int_{U^+\partial M}\frac{l(u)^{n-1}}{\cos(\mathrm{ant}u)}\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{n-1}}\times \\
&\quad \times\left[\int_{U^+\partial M}\cos^{1/(n-2)}(\mathrm{ant}u)\cos^{(n-1)/(n-2)}u\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{n-2}{n-1}}
\end{aligned} \tag{1}$$

Nous allons maintenant majorer chacun des deux facteurs. Pour cela, nous utilisons les lemmes suivants.

LEMME 2.1.

$$\int_{U^+\partial M}\frac{l(u)^{n-1}}{\cos(\mathrm{ant}u)}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathit{Vol}(\partial M)^2$$

et il y a égalité si et seulement si M est plate et convexe.

LEMME 2.2.

$$\int_{U^+\partial M}\cos^{1/(n-2)}(\mathrm{ant}u)\cos^{(n-1)/(n-2)}u\,\mathrm{d}u \leqslant \mathit{Vol}(\partial M)C_0(n)$$

avec $C_0(n) = \mathit{Vol}(\mathbb{S}^{n-2})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n/(n-2)}(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t.$

De plus il y a égalité si et seulement si $\cos u = \cos(\mathrm{ant}u)$ *presque partout.*

Utilisant ces deux lemmes, on obtient la majoration :

$$\mathrm{Vol}(M) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}\mathrm{Vol}(\partial M)^{\frac{2}{n-1}}\times\mathrm{Vol}(\partial M)^{\frac{n-2}{n-1}}\times C_0(n)^{\frac{n-2}{n-1}} \tag{2}$$

soit

$$\mathrm{Vol}(\partial M)^n \geqslant \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{n-1}}{C_0(n)^{n-2}}\mathrm{Vol}(M)^{n-1}$$

Cela est exactement l'inégalité annoncée dans l'énoncé du théorème avec

$$C(n) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{n-1}}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-2})^{n-2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/n-2} t \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t\right)^{n-2}}.$$

2.3. Le cas d'égalité

Dans le cas où il y a égalité dans le théorème, il y a égalité dans (2), c'est-à-dire dans le lemme 2.2, et donc $\cos(\mathrm{ant}\, u) = \cos u$ presque partout. De même, l'égalité doit avoir lieu dans le lemme 2.1, ce qui force M à être plate.

De plus, l'égalité dans l'inégalité de Hölder (1) donne

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^+, \frac{l(u)^{n-1}}{\cos(\mathrm{ant}\, u)} = \mu \cos^{1/(n-2)}(\mathrm{ant}\, u) \cos^{(n-1)/(n-2)} u$$

On en déduit $l(u)^{n-1} = \mu \cos^{(n+1)/(n-2)} u$

Si $n = 4$, cela s'écrit $l(u)^3 = \mu \cos^3 u$, c'est-à-dire $l(u) = \mu^{\frac{1}{3}} \cos u$. En posant $r = \frac{1}{2}\mu^{\frac{1}{3}}$, on obtient dans $\mathbb{R}^4$ (puisque M est plate) – ou plutôt dans le demi-espace supérieur, étant donné que u reste dans une demi-sphère – l'équation en coordonnées polaires

$$l(u) = 2r\cos(u)$$

qui est l'équation d'une sphère de rayon r.

Pour montrer que l'égalité n'a jamais lieu si $n \neq 4$, on raisonne comme ci-dessus et on parvient à l'équation en coordonnées polaires

$$l(u) = \alpha \cos^{2/(n-2)} u.$$

On va voir alors que cela est impossible, car alors on ne peut pas avoir $\cos(u) = \cos(\mathrm{ant}\, u)$ presque partout.

Dans $\mathbb{R}^n$, $\forall u$, $\mathrm{ant}\, u = -u$.

Choisissons un repère tel que $0 \in \partial M$, et la normale intérieure est $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Il apparaît que le groupe d'isométries constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} \boxed{\quad A \quad} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \cdots \; 0 \; \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A \in O(n-1)$$

laisse invariant $l(u)$. On peut alors se ramener à une étude dans des 2-plans. En effet, il suffit de déterminer $\mathrm{ant}\,u$ pour u de la forme $(0,\dots,0,\cos\theta,\sin\theta)$, mais ce vecteur est laissé invariant par le groupe des matrices :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & & \\ & B & \\ & & \end{matrix}} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \cdots\ 0\ \cdots & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \qquad B \in O(n-2).$$

Par conséquent, la normale en le point de ∂M paramétré par u est aussi invariante par ce groupe et donc est de la forme $(0,\dots,0,\cos\phi,\sin\phi)$.

Tout se passe donc dans le 2-plan $\{x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0\}$. Dans ce plan, l'angle que fait la tangente avec u est donné par sa tangente :

$$\tan V = \frac{l(\theta)}{l'(\theta)} = \frac{n-2}{2}\frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{n-2}{2}\tan(\theta + \frac{\pi}{2}).$$

Il est alors clair que $\cos u = \cos(\mathrm{ant}\,u)$ (c'est-à-dire u et $\mathrm{ant}\,u$ font le même angles avec les normales respectives) n'est possible (presque partout, donc au moins en un point) que si $\frac{n-2}{2} = 1$ i.e. $n = 4$.

3. Preuve des lemmes

3.1. Lemme 1

Le membre de gauche est à rapprocher d'un calcul d' «aire» en coordonnées polaires ; c'est pourquoi nous allons voir comment calculer le volume du bord en coordonnées polaires depuis un point $q \in \partial M$.

Soit $q \in \partial M$. Par la carte exponentielle, on peut utiliser les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \left\{(u,r) \in U_q^+\partial M \times \mathbb{R}^+ \mid 0 \leqslant r \leqslant l(u)\right\} & \longrightarrow \quad M \\ \qquad (u,r) & \longmapsto \quad \mathrm{Exp}(ru) \end{cases}$$

Dans $\mathrm{Exp}\left\{tu \mid u \in U_q^+\partial M \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant l(u)\right\}$, le volume est donné par la mesure $\mathrm{d}x = F(u,r)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r$ pour une certaine densité F.

Maintenant, si A est le «bord visible à partir de q», c'est-à-dire

$$A = \mathrm{Exp}\left\{tu \mid u \in U_q^+\partial M \text{ et } t = l(u)\right\},$$

on peut exprimer le volume sur A par une densité par rapport à $\mathrm{d}u$ la mesure sur la sphère unité.

Pour cela, considérons que A est paramétré dans la carte exponentielle en coordonnées polaires (les rayons géodésiques sont alors des demi-droites issues de l'origine) par :

$$\begin{cases} U_q^+\partial M & \xrightarrow{R} & M \\ u & \longmapsto & r(u) = l(u) \end{cases}$$

Alors, si $(X_1,\dots,X_{n-1})$ est une base orthonormée de vecteurs tangents en $u \in U_q^+\partial M$, on veut calculer $i_{n(u)}\omega_{R(u)}(R_*X_1,\dots,R_*X_{n-1})$ où $n(u)$ est la normale extérieure et ω est la forme volume de M. En effet, ce calcul donnera «l'élément de volume» sur A comme densité par rapport à $\mathrm{d}u$.

On a :

$$\begin{aligned} i_{n(u)}\omega_{R(u)}(R_*X_1,\dots,R_*X_{n-1}) &= \frac{1}{\langle\frac{\partial}{\partial r},n(u)\rangle} i_{\frac{\partial}{\partial r}}\,\omega_{R(u)}(R_*X_1,\dots,R_*X_{n-1}) \\ &= \frac{1}{\langle\frac{\partial}{\partial r},n(u)\rangle} i_{\frac{\partial}{\partial r}}\,\omega_{R(u)}(X_1,\dots,X_{n-1}) \end{aligned}$$

Ici, X_i représente la projection de R_*X_i sur l'espace tangent à la sphère de rayon $l(u)$. On peut identifier cette projection avec le vecteur X_i car ce sont des vecteurs dans un espace vectoriel (la carte exponentielle) et qu'ils ont les mêmes composantes (par définition des coordonnées polaires).

On a montré que, si ω_A et ω_0 sont les formes volumes sur A et la demi-sphère unité,

$$\omega_A(R_*X_1,\dots,R_*X_{n-1}) = \frac{1}{\langle\frac{\partial}{\partial r},n(u)\rangle}\omega_0(X_1,\dots,X_{n-1}),$$

ce qui donne pour l'élément de volume sur A

$$\frac{1}{\langle\frac{\partial}{\partial r},n(u)\rangle}F(u,l(u))\,\mathrm{d}u = \frac{F(u,l(u))}{\cos(\operatorname{ant} u)}\,\mathrm{d}u$$

Maintenant, on peut calculer le volume de $A \subset \partial M$:

$$\int_{U_q^+\partial M}\frac{F(u,l(u))}{\cos(\operatorname{ant} u)}\,\mathrm{d}u = \mathrm{Vol}(A) \leqslant \mathrm{Vol}(\partial M)$$

Avec égalité si et seulement si M est étoilé par rapport à q (c'est une conséquence du fait qu'alors $A = \partial M$).

Si on intègre par rapport à q, l'inégalité devient :

$$\int_{U^+\partial M}\frac{F(u,l(u))}{\cos(\operatorname{ant} u)}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{Vol}(\partial M)^2,$$

avec égalité si et seulement si M est étoilé par rapport à tout point q de son bord, donc si et seulement si M est convexe.

Ensuite, puisque $K_M \leqslant 0$, par comparaison de la densité F à la densité euclidienne : $F(u,r) \geqslant r^{n-1}$ avec égalité dans toutes les directions u si et seulement si $K \equiv 0$, i.e. M est plat.

3.2. Lemme 2

$$\int_{U^+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\mathrm{ant}\,u)\cos^{(n-1)/(n-2)} u \,\mathrm{d}u$$
$$= \int_{U^+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\mathrm{ant}\,u)\cos^{1/2} u \times \cos^{1/(n-2)} u \cos^{1/2} u\,\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \left(\int_{U^+\partial M} \cos^{2/(n-2)}(\mathrm{ant}\,u)\cos u\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{U^+\partial M} \cos^{2/(n-2)} u \cos u\,\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les deux facteurs sont en fait identiques grâce au lemme :

LEMME 3.1. — *Pour toute fonction g intégrable,*

$$\int_{U^+\partial M} g(u)\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{U^+\partial M} g(\mathrm{ant}\,u)\cos u\,\mathrm{d}u$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'application de

$$Q = \left\{(u,t) \mid u \in U^+\partial M \quad \text{et } 0 \leqslant t \leqslant l(u)\right\}$$

muni de la mesure $\cos u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$. dans UM donnée par le flot géodésique préserve la mesure. De même pour Φ^{-1} et l'application antipodale $a : UM \to UM$. Cela montre que l'application $\Phi^{-1}\circ a\circ\Phi : Q \to Q$ préserve elle-même la mesure. De plus $\Phi^{-1}\circ a\circ\Phi(u,t) = (\mathrm{ant}\,u, l(u) - t)$. Donc pour toute application mesurable $G : Q \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{U^+\partial M}\int_0^{l(u)} G(u,t)\cos u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \int_{U^+\partial M}\int_0^{l(u)} G(\mathrm{ant}\,u, l(u) - t)\cos u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

On finit la preuve du lemme en posant $G(u,t) = \dfrac{g(u)}{l(u)}$ et en intégrant par rapport à t. □

L'inégalité s'écrit alors :

$$\int_{U^+\partial M} \cos^{1/(n-2)}(\mathrm{ant}\,u)\cos^{(n-1)/(n-2)} u\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{U^+\partial M} \cos^{n/(n-2)} u\,\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \int_{\partial M}\left(\int_{U_q^+\partial M} \cos^{n/(n-2)} u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}q$$
$$\leqslant \mathrm{Vol}(\partial M)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n/(n-2)} t \sin^{n-2} t\,\mathrm{d}t.$$

C'est l'inégalité recherchée.

C'est une égalité si et seulement si (par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) il existe une constante réelle positive ou nulle λ telle que $\cos(\mathrm{ant}\,u) = \cos u$ presque partout. Or ces deux fonctions continues ont même maximum 1, donc $\lambda = 1$, i.e. $\cos(\mathrm{ant}\,u) = \cos u$ presque partout.

Bibliographie

[Cr] C.B. CROKE : *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment.Math.Helv. **59**, 187–192 (1984).

[Ch] I. CHAVEL : *Riemannian geometry - a modern introduction*, Cambridge University Press, 1993.

[K] B. KLEINER : *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108**, 37–47 (1992).

[V] C. VERNICOS : *Inégalité isopérimétrique en dimension 3 d'après K. Kleiner*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, 1999–2000.

Richard PÉREYROL
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
Richard.Pereyrol@ujf-grenoble.fr