Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

JACQUELINE FERRAND

# Histoire de la réductibilité du groupe conforme des variétés riemanniennes (1964-1994)

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 17 (1998-1999), p. 9-25

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 17 (1999) 9–25

# HISTOIRE DE LA RÉDUCTIBILITÉ DU GROUPE CONFORME DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES (1964–1994)

*Jacqueline FERRAND*

## 1. Introduction

Le but de cet exposé est de préciser les diverses étapes de la démonstration du théorème suivant, qui établit et généralise une conjecture posée par A. Lichnérowicz en 1964 :

THÉORÈME A. — *Pour toute variété riemannienne de dimension $n \geq 2$, compacte ou non, non conformément équivalente à la sphère $S^n$ ou à l'espace euclidien $E^n$, il existe un changement conforme de métrique qui réduit son groupe conforme à un groupe d'isométries.*

Précisons d'abord les données et les notations.

Dans tout ce qui suit, $(M, g)$ ou simplement $M$ désigne une variété riemannienne quelconque de classe $C^\infty$ et de dimension $n \geq 2$ ; $E^n$ et $S^n$ désignent respectivement l'espace euclidien et la sphère canonique de même dimension $n$.

Un difféomorphisme $f$ de $(M, g)$ sur une variété $(N, h)$ est dit *isométrique* [resp. *conforme*] si, pour tout $x \in M$ sa différentielle $f'(x)$ est une isométrie [resp. une similitude] de l'espace tangent $T_xM$ sur $T_{f(x)}N$. Si un tel difféomorphisme existe, les variétés $(M, g)$ et $(N, h)$ sont dites *isométriques* [resp. *conformément équivalentes*].

Les isométries [resp. difféomorphismes conformes] de $M$ sur $M$ constituent un groupe noté $I(M, g)$ ou $I(M)$ [resp. $C(M, g)$ ou $C(M)$]. Chacun de ces groupes est muni

*Classification math.* : 53C20, 57S05, 30C65, 53A30 d'une structure de groupe de Lie : celle de $I(M,g)$ est déterminée par son action sur le fibré tangent $T(M)$ ; celle de $C(M,g)$ est déterminée par son action sur le fibré du second ordre $T^2(M)$ (cf. [K]).

Ces groupes peuvent aussi être considérés comme des sous-ensembles de l'espace $\mathcal{C}(M,M)$ des applications continues de $M$ dans $M$, naturellement muni de la topologie de la convergence compacte (dite aussi compacte-ouverte). D'après un résultat général (cf. [M-Z 2]) on sait que la restriction de cette topologie à $I(M)$ ou $C(M)$ coïncide avec la topologie de groupe de Lie. On sait aussi que $I(M)$ est fermé dans $\mathcal{C}(M,M)$ (cf. [M-S] et [P]) ; mais la question de savoir si $C(M)$ est fermé dans $\mathcal{C}(M,M)$ est un des points essentiels de notre étude.

Les composantes connexes de l'identité dans les groupes $I(M,g)$ et $C(M,g)$ sont notées respectivement $I_0(M,g)$ et $C_0(M,g)$.

DÉFINITION. — *On dit que le groupe $C(M,g)$* [resp. $C_0(M,g)$] *est* réductible à un groupe d'isométries *ou, plus brièvement, qu'il est* inessentiel, *s'il existe un changement conforme de métrique $g \to \rho g$ tel que $C(M,g) = I(M,\rho g)$* [resp. $C_0(M,g) = I_0(M,\rho g)$]. *Sinon ce groupe est dit* essentiel.

Il est bien connu que $C(S^n)$ (groupe de Möbius) et $C(E^n)$ (groupe des similitudes affines) sont essentiels, de même que $C_0(S^n)$ et $C_0(E^n)$ : on sait en effet que les sous-groupes d'isotropie d'un groupe d'isométries sont compacts, ce qui n'est pas réalisé pour les sous-groupes d'isotropie de $C_0(S^n)$ et $C_0(E^n)$. Par ailleurs, si $(M,g)$ est compacte, le groupe $I(M,g)$ est compact. Si le groupe $C(M,g)$ ou $C_0(M,g)$, est inessentiel, il est donc compact. La mesure de Haar permettant d'établir la réciproque, on a :

(1.1). — *Pour que le groupe $C(M,g)$* [resp. $C_0(M,g)$] *relatif à une variété compacte $(M,g)$, soit inessentiel, il faut et il suffit qu'il soit compact.*

C'est au début des années soixante, semble-t-il, que les géomètres commencèrent à s'intéresser à la réductibilité du groupe conforme, mais en se limitant aux variétés compactes qui étaient les plus étudiées à cette époque ; et les résultats obtenus conduisirent A. Lichnérowicz à poser, vers 1964, la conjecture suivante :

(CL). — *Si $(M,g)$ est une variété compacte, de dimension $n \geq 3$, non conformément équivalente à $S^n$, alors le groupe $C_0(M,g)$ est compact (donc inessentiel).*

Du fait que cet énoncé ne concernait que $C_0(M)$ –écartant en particulier le cas où $C(M)$ est discret– on pouvait espérer l'établir par des arguments classiques de géométrie différentielle en utilisant la propriété suivante [M-Z 1] :

(1.2). — *Tout groupe de Lie connexe et non-compact contient un sous-groupe à* *un paramètre isomorphe à* $\mathbb{R}$.

La conjecture (CL) accéléra les recherches relatives à $C_0(M)$, et on peut compter une bonne douzaine de mémoires établissant cette conjecture sous des hypothèses supplémentaires, concernant en général la courbure de $M$ (scalaire ou de Ricci). Certains s'appuyaient sur la conjecture de Yamabé, ou contenaient des erreurs ; d'autres étudiaient des problèmes voisins, par exemple l'étude des transformations infinitésimales conformes, ou la recherche des cas où $C_0(M,g) = I_0(M,g)$. Citons, par ordre alphabétique, les noms des principaux auteurs : A. Avez, C. Barbance, R. Bishop, J.P. Bourguignon, S. Goldberg, C.C. Hsiung, S. Kobayashi, A.J. Ledger, A. Lichnérowicz, T. Nagano, M. Obata, S. Sawaki, K. Yano –le plus intéressé par le problème étant M. Obata. Pour une bibliographie plus complète, cf. [F 1].

## 2. Solution du cas compact

C'est par la thèse de C. Barbance (Paris 1969) que je pris connaissance du problème de réduction de $C(M)$ et j'eus l'idée de le rattacher à un problème plus général relatif aux transformations quasiconformes. Le théorème d'Ascoli relie en effet la compacité de $C(M)$ à l'équicontinuité de ses éléments, et il m'est apparu qu'on pouvait l'établir en utilisant les modules de continuité qui venaient de permettre à G.D. Mostow [Mo] de prouver son célèbre théorème de rigidité des espaces hyperboliques.

Je rappellerai donc ici qu'un homéomorphisme de variétés riemanniennes de même dimension $n$, $f : (M,g) \to (N,h)$ est dit *K-quasiconforme* s'il admet une différentielle généralisée $f'(x)$ définie presque partout sur $M$, telle que $J_f(x) = \det f'(x)$ soit de signe constant et vérifie, pour tout $h \in T_xM$ avec $|h| = 1$ :

$$K^{-1}|J_f(x)| \leq |f'(x)\cdot h|^n \leq K|J_f(x)|\,. \tag{2.1}$$

Les difféomorphismes conformes sont évidemment 1-quasiconformes et les transformations 1-quasiconformes de $M$ constituent un groupe que nous noterons provisoirement $Q_1(M)$, l'égalité $Q_1(M) = C(M)$ étant loin d'être évidente.

Les homéomorphismes $K$-quasiconformes peuvent être considérés comme « approximativement conformes », déformant d'autant moins la variété que $K$ est plus voisin de 1.

En désignant par $Q_K(M,N)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(M,N)$ constitué par les homéomorphismes $K$-quasiconformes de $M$ sur $N$, où $M$, $N$ sont deux variétés compactes, et en étudiant les phénomènes de dégénérescence qui se produisent lorsque $Q_K(M,N)$ n'est pas équicontinu, j'ai pu établir en 1969 [F 1] :

THÉORÈME (2.2). — *Si $M, N$ sont deux variétés compactes de dimension $n \geq 2$ et* *si pour une valeur de $K \geq 1$ l'ensemble $Q_K(M,N)$ est non vide et non compact, il existe un homéomorphisme $K$-quasiconforme de $M$ sur la sphère $S^n$.*

Si $M = N$ et $K = 1$, on obtient :

Corollaire (2.3). — *Si $M$ est une variété compacte de dimension $n \geq 2$ et si le groupe $Q_1(M)$ des homéomorphismes 1-quasiconformes de $M$ sur $M$ n'est pas compact, il existe un homéomorphisme 1-quasiconforme de $M$ sur $S^n$.*

Le résultat obtenu était à la fois plus général que (CL) (puisqu'il ne se limitait pas à la composante connexe du groupe conforme), et moins précis puisque la conclusion était apparemment plus faible. Je restai donc longtemps préoccupée par l'existence possible de sphères exotiques dont le groupe conforme serait non-compact !

Malgré son imperfection, ce résultat attira l'attention des géomètres et me valut diverses invitations ainsi qu'un prix de l'Académie Royale de Belgique qui publia le mémoire [F 1] en 1972.

Entre temps M. Obata avait réussi à prouver la conjecture (CL) elle-même par des méthodes plus classiques. Sa démonstration, partagée entre plusieurs articles de 1970 et 1971 ([O 1], [O 2]) présentait cependant une lacune notable (cf. appendice 2) qui fut comblée par J. Lafontaine dans un exposé synthétique paru en 1988 [L].

De mon côté, c'est dans un article paru en 1976 [F4] que je pus compléter le théorème 2.1 en établissant

Théorème (2.4). — *Les homéomorphismes 1-quasiconformes de variétés riemanniennes de classe $C^\infty$ sont de classe $C^\infty$ et sont donc conformes au sens usuel. L'égalité $Q_1(M) = C(M)$ en résulte.*

En fait ce résultat était beaucoup plus délicat à établir que le théorème (2.2). Le cas euclidien avait été résolu en 1960–61 par F.W. Gehring et J.G. Reshetnjak (cf. [R 1]), à la suite d'une série de travaux visant à réduire les hypothèses de régularité dans le théorème de Liouville. Mais les méthodes utilisées dans $E^n$ ne s'étendaient pas aisément au cas riemannien, et nous pouvons remarquer à ce propos que la régularité des isométries de variétés riemanniennes (définies par la conservation des distances) n'avait été prouvée qu'assez récemment (cf. [C-H], [M-S], [P], [R 2]).

La démonstration du théorème 2.3 proposée dans [F4] s'appuie sur une interprétation géométrique de la courbure scalaire et sur le fait que si $f : (M,g) \to (N,h)$ est 1-quasiconforme, la fonction $J_f$, définie presque partout par $J_f(x) = \det|f'(x)| = |f'(x)|^n$ est une solution faible de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta J = \frac{n+2}{2n} J^{-1}\,\mathrm{grad}^2 J + \frac{n}{2n-2}\left(RJ - \overline{R}\circ f J^{1+2/n}\right)$$

où $R$, $\overline{R}$ désignent respectivement les courbures scalaires de $M$ et $N$.

L'article [F 4] est passé longtemps inaperçu et n'a pas été cité avant 1992 dans les travaux ultérieurs, de nature plus générale, de T. Iwaniec et J.G. Reshetnjak (voir [I M]).

Notons aussi qu'à sa date de parution il n'avait apparemment qu'un intérêt limité du fait qu'en 1972 D.V. Alekseevskii avait présenté, dans [A 1] et [A 2] une démonstration du théorème A. Mais en analysant cette démonstration (qui s'est révélée inexacte par la suite) on aurait pu constater qu'elle utilisait implicitement le résultat suivant, qui n'est pas évident et qui découle de (2.4), sachant que la limite uniforme d'une suite d'homéomorphismes $K$-quasiconformes est un homéomorphisme $K$-quasiconforme ou une constante (cf. [V]).

THÉORÈME (2.5). — *La limite uniforme d'une suite de difféomorphismes conformes est un difféomorphisme conforme ou une constante.*

Suggérons qu'il serait peut-être possible d'établir directement ce dernier énoncé en utilisant, sur les variétés, des coordonnées liées aux géodésiques de leur structure conforme (cf. [F 8], [F 9]) et même de l'étendre aux automorphismes de $G$-structures de type fini.

## 3. Difficultés du cas général

Les recherches sur le groupe conforme cessèrent en 1972 après la parution des deux mémoires d'Alekseevskii ([A 1], [A 2]). Le premier proposait une démonstration synthétique de l'assertion suivante :

(3.1) (CA). — *Si $M$ est une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$, compacte ou non, non conformément équivalente à $S^n$ ou $E^n$, le groupe $C_0(M)$ est inessentiel.*

Le second mémoire avait pour but d'étendre ce résultat à $C(M)$ ; n'ayant pas été traduit en anglais il n'a pas attiré l'attention, mais il m'a paru soulever beaucoup de difficultés.

Bien que les arguments développés dans ces mémoires fussent difficiles à suivre, la notoriété de leur auteur les a fait admettre sans discussion pendant vingt ans. Une seule lacune avait été découverte dans [A 1] et aussitôt comblée, par Y. Yoshimatsu [Y]. Cette lacune intervenait dans l'étude, au voisinage d'un point fixe, d'une transformation infinitésimale conforme. Dans [F 6] j'ai pu préciser le résultat qui a un intérêt intrinsèque.

Ce fut donc une grande surprise lorsque, en 1992, R. J. Zimmer construisit un contre-exemple au théorème suivant qui était à la base de la démonstration de (CA) (théorème 4 de [A1]; voir appendice 1).

(3.2) (Inexact). — *Soit $M$ une variété différentielle et $C$ un groupe fermé d'auto-*

*morphismes d'une $G$-structure de type fini sur $M$. Si tous les sous-groupes d'isotropie de $C$ sont compacts, alors $C$ agit proprement sur $M$.*

J'ai été avertie de ce problème en Août 1992 par R. Gutschera, à qui R. J. Zimmer avait demandé d'analyser la démonstration de (3.2) et je ne puis mieux faire que de reproduire en appendice le texte de cette démonstration suivi du commentaire de R. Gutschera et du contre-exemple. Il est à noter que ce contre-exemple montre que (3.2) n'est même pas valable lorsque $M$ est compacte et que $C$ agit librement sur $M$. L'argument erroné dans la démonstration de (3.2) concerne le prolongement de l'action de $C$ au fibré $B_G^{k-1}$ associé à la $G$-structure : admettre qu'il existe une métrique riemannienne $C$-invariante sur $B_G^{k-1}$ équivaut à supposer que $C$ agit proprement sur ce fibré, ce qui constitue une pétition de principe (cf. appendice 2).

Notons aussi que la notion d'action propre dans (3.2) est relative à la topologie compacte-ouverte et que pour pouvoir appliquer (3.2) au groupe $C_0(M,g)$ il aurait fallu prouver que ce groupe est fermé dans $C(M,M)$ –ce qui équivaut au théorème (2.5) et n'était pas encore établi.

Du mémoire [A 1] nous ne pouvons donc retenir que les théorèmes 5 et 6, qui entraînent le résultat suivant :

THÉORÈME (3.3). — *Pour que le groupe $C(M)$ [resp. $C_0(M)$] soit inessentiel, il faut et il suffit qu'il agisse proprement sur $M$.*

Rappelons ici qu'un groupe topologique $G$ est dit *agir proprement* sur la variété $M$ si l'application $G \times M \to M \times M$, $(g,x) \to (x, g(x))$ est propre (*i.e.* l'image réciproque d'un compact est un compact).

Si $M$ est compacte, le théorème (3.3) se réduit à (1.1).

Le plus gros morceau restait donc à prouver, à savoir que si $M$ est non-compacte et non conformément équivalente à $E^n$, le groupe $C(M)$ agit proprement sur $M$. Or les arguments utilisés par M. Obata n'étaient plus valables, puisque le contre-exemple de R. J. Zimmer prouvait que la compacité des sous-groupes d'isotropie n'entraînait pas que l'action de $C_0(M)$ soit propre. La méthode utilisée dans [F 1] n'était pas, non plus, extensible au cas de variétés non-compactes, faute de modules de continuité valables à l'infini. Mon seul espoir était l'utilisation des *invariants conformes* que j'avais introduits dans [F 2] ; mais j'hésitai longtemps sur le choix des «bons invariants» jusqu'à ce qu'enfin tout s'éclaire harmonieusement. Il fallait en effet distinguer deux cas selon que la variété était «parabolique» ou «hyperbolique» au sens de la théorie des capacités conformes (termes remplacés par ceux de classe I ou de classe II dans [F 10] pour éviter les confusions) –les variétés compactes constituant un troisième cas que cette nouvelle méthode permettait de traiter plus simplement que dans [F 1] :

## 4. Schéma d'une démonstration du théorème A

La démonstration exposée dans [F 10] est basée sur les propriétés d'invariants conformes qui sont des fonctions $\varphi$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, dépendant d'un nombre fini $p$ $(= 2, 3, 4)$ de points de $M$, telles que, pour tout $f \in C(M)$, on ait

$$\varphi\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p)\big) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,. \tag{4.1}$$

Nous exposerons plus loin (§ 6) les procédés de construction de tels invariants à partir des « capacités conformes », et nous donnons seulement ici les propriétés de ces invariants qui nous sont utiles.

Pour abréger, dans tout ce qui suit, nous dirons qu'une suite d'éléments de $C(M, M)$ est *convergente* si elle est convergente pour la topologie compacte-ouverte ; et, par extension, nous dirons qu'une suite $(f_k)$ de $C(M, M)$ *converge vers l'infini* si, pour tout couple $(H, K)$ de compacts de $M$ il existe un entier $p$ tel que, pour $k \geq p$, on ait $f_k(H) \cap K = \emptyset$.

*a) Le cas des variétés hyperboliques* est le plus simple : sur une telle variété $M$ il existe un invariant conforme $\mu_M : M \times M \to \mathbb{R}^+$ qui constitue *une distance* compatible avec la topologie de variété de $M$. Par une extension facile d'une propriété générale des isométries ([K-N], Th. 4.7) il est facile de prouver que toute suite $(f_k)$ d'éléments de $C(M)$ contient une suite partielle convergente, d'où il résulte que $C(M)$ agit proprement sur $M$.

*b) Si $M$ est une variété parabolique*, la fonction $\mu_M$ est identiquement nulle ; mais on peut contrôler l'action de $C(M)$ en utilisant l'invariant conforme $\nu_M$ (introduit dans [F 2] avec d'autres notations) : cette fonction, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est définie sur $M^3 \setminus \Delta$ où $\Delta$ désigne la diagonale de $M^3$ (ensemble des triplets $(x, x, x)$). Une étude approfondie [F 12] permet de prouver que $\nu_M$ est continue, à condition de poser $\nu_M(x, x, z) = 0$, $\nu_M(x, y, y) = \nu_M(x, y, x) = +\infty$. Inversement la relation $\nu_M(x, y, z) = 0$ implique $x = y$ tandis que $\nu_M(x, y, z) = +\infty$ implique $z \in \{x, y\}$. On a de plus la propriété fondamentale suivante :

(4.2). — *Si $M$ est une variété parabolique, $\nu_M(x, y, z)$ tend vers zéro lorsque $x$, $y$ ont des limites finies et que $z$ tend vers l'infini.*

En d'autres termes $\nu_M$ s'étend par continuité à $(M \times M \times \widehat{M}) \setminus \Delta$, où $\widehat{M}$ est le compactifié d'Alexandrov de $M$, en posant $\nu_M(x, y, \infty) = 0$.

*c) Si $M$ est une variété compacte*, nous pouvons encore contrôler l'action de $C(M)$ en utilisant l'invariant conforme $\rho_M$, introduit aussi dans [F 2]. C'est une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, définie sur $M^4 \setminus E$, où $E$ désigne l'ensemble des points $(x, y, z, t)$ de $M^4$ dont 3 des coordonnées au moins sont égales. La continuité de $\rho_M$ et les propriétés suivantes sont établies dans [F 12] :

$$\begin{array}{lll} \rho_M(x,y,z,t) & = 0 & \iff & (x = y \text{ ou } z = t) \\ \rho_M(x,y,z,t) & = +\infty & \iff & \{x,y\} \cap \{z,t\} \neq \emptyset . \end{array}$$

On remarquera que le comportement de $\nu_M(x,y,z)$ sur une variété parabolique est analogue à celui de $|\ln(|z-x| : |z-y|)|$ dans $E^n$, tandis que $\rho_M(x,y,z,t)$ se comporte comme $\left|\ln\left(\frac{|z-x|}{|z-y|} : \frac{|t-x|}{|t-y|}\right)\right|$ dans l'espace de Möbius $\widehat{E}_n$.

Par une étude très élémentaire qui se réduit à une discussion, cas par cas, du comportement de $C(M)$, les propriétés des fonctions $\nu_M$ et $\rho_M$ nous permettent d'établir le théorème de base suivant :

THÉORÈME (4.3).

*a) Si $M$ est une variété parabolique sur laquelle $C(M)$ n'agit pas proprement, il existe une suite $(g_p)$ d'éléments de $C(M)$ convergeant vers une constante $a$, la suite $(g_p^{-1})$ convergeant alors vers l'infini sur $M \setminus \{a\}$.*

*b) Si $M$ est une variété compacte sur laquelle $C(M)$ n'agit pas proprement, il existe une suite $(g_p)$ d'éléments de $C(M)$ et un couple $(a,b)$ de points de $M$ tels que la suite $(g_p)$ converge vers $a$ sur $M \setminus \{b\}$ tandis que la suite $(g_p^{-1})$ converge vers $b$ sur $M \setminus \{a\}$ (les points $a$, $b$ n'étant pas nécessairement distincts).*

Notons que l'on passe de l'assertion *b)* à l'assertion *a)* en posant $b = \infty$, et que l'assertion *b)* avait été établie beaucoup plus péniblement dans [F 1].

Pour donner une idée de la démonstration du théorème (4.3), nous traiterons l'un des cas qui se présentent dans la discussion (prop. 4.5) ; mais au préalable nous rappellerons que $C(M,M)$ étant métrisable nous pouvons nous borner à utiliser des suites (ce qui permet d'éviter les erreurs de topologie!) en appliquant le principe suivant :

(4.4). — *Pour qu'une suite $(f_k)$ d'éléments de $C(M,M)$ converge vers un élément $f$ il faut et il suffit que pour toute suite convergente $(a_k)$ de points de $M$, de limite $a$, la suite $f_k(a_k)$ tende vers $f(a)$ (la limite $f$ pouvant être la constante $\infty$).*

À titre d'exemple, nous établissons :

(4.5). — *Soit $M$ une variété parabolique et $(f_k)$ une suite d'éléments de $C(M)$. S'il existe deux suites convergentes $(a_k)$ et $(b_k)$ de points de $M$, de limites distinctes $a$, $b$ telles que la suite $f_k(a_k)$ tende vers une limite finie $\alpha$ et que $f_k(b_k)$ tende vers l'infini, alors la suite $(f_k)$ converge vers l'infini sur $M \setminus \{a\}$.*

*Preuve.* — Soit $(x_k)$ une suite convergente quelconque de points de $M$, de limite

$x \neq a$. Si la suite $f_k(x_k)$ avait une valeur d'adhérence finie $\xi$, on aurait

$$\begin{aligned} \nu_M(a,x,b) &= \lim \nu_M(a_k,x_k,b_k) \\ &= \lim \nu_M\big(f_k(a_k),f_k(x_k),f_k(b_k)\big) = \nu_M(\alpha,\xi,\infty) = 0 \end{aligned}$$

ce qui est faux puisque $x \neq a$. D'où le résultat.

Les autres cas se traitent de manière analogue et ne demandent qu'un peu de patience.

## 5. Fin de la démonstration du théorème A et généralisations

Il reste à prouver que l'existence de la suite $(g_p)$ annoncée dans (4.3). *a)* [resp. (4.3). *b)*] entraîne l'existence d'un difféomorphisme conforme de $M$ sur $E^n$ [resp. $S^n$].

Dans le cas parabolique *a)*, $(g_p)$ est une suite de contractions de $M$ vers le point $a$ (un «big crush»), ce qui montre que tout ouvert relativement compact de $M$ contenant $a$ est conforme (donc homéomorphe) à un voisinage arbitrairement petit de $a$. Il en résulte que $M$ est homéomorphe à $E^n$. De plus, en utilisant le tenseur de Weyl si $n \geq 4$, ou celui de Schouten si $n = 3$, on voit que $M$ est conformément plate (le cas $n = 2$ étant trivial) : donc $M$ est conformément équivalente à $E^n$.

Dans le cas compact on démontre de même que $M \setminus \{a\}$ est conformément équivalente à $E^n$ et on en déduit que $M$ est conformément équivalente à $S^n$.

On peut aussi, dans les deux cas, achever la démonstration sans utiliser les tenseurs de courbure conforme, en utilisant le «procédé d'éclatement» des applications $g_p$ exposé dans [F 1] : on construit une suite $(U_k)$ de voisinages de $a$ convergeant vers $a$ telle que chaque $U_k$ admette un homéomorphisme $(1 + k^{-1})$ quasiconforme $\theta_k$ sur une boule de $S^n$ ; et on choisit $\theta_k$ de manière que, pour une suite $(p_k)$ d'entiers, la suite $\theta_k \circ g_{p_k}$ converge vers un homéomorphisme 1-quasiconforme $g$ de $M$ dans $S^n$ ; on démontre enfin que $S^n \setminus g(M)$ se réduit à un point (cf. prop. (11.2) de [F 11]). Pour conclure il faut évidemment utiliser alors le théorème (2.4), alors que la première méthode n'utilise que (2.5).

L'avantage de la seconde méthode est de s'étendre au cas où, au lieu de $C(M)$, on considère l'ensemble $Q_K(M)$ des applications $K$-quasiconformes de $M$ sur $M$. Les invariants conformes que nous avons utilisés sont en effet «quasi-invariants» par transformation quasiconforme, et, plus précisément, vérifient pour tout $f \in Q_K(M)$, des inégalités de la forme

$$K^{-1}\varphi(x_1,\dots,x_p) \leq \varphi\big(f(x_1),\dots,f(x_p)\big) \leq K\varphi(x_1,\dots,x_p)\,. \tag{5.1}$$

Nous obtenons ainsi le résultat général suivant :

THÉORÈME B. — *Si l'ensemble $Q_K(M)$ [resp. $C(M)$] n'agit pas proprement sur $M$, il existe un homéomorphisme $K$-quasiconforme [resp. un difféomorphisme conforme] de $M$ sur $S^n$ ou $E^n$.*

On notera que $Q_K(M)$ n'est pas un groupe, mais que la notion d'action propre s'étend à toute partie de $\mathcal{C}(M,M)$.

On trouvera dans [F 11] une discussion détaillée de l'action des applications $K$-quasiconformes (non supposées bijectives) d'une variété $M$ *dans* une variété $N$.

## 6. Construction d'invariants conformes

Cette construction est basée sur la théorie des capacités conformes que nous allons présenter brièvement.

Soit toujours $M$ une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$.

Un *condensateur* $\Gamma(C_0, C_1)$ de $M$ est défini par la donnée de deux ensembles fermés $C_0$, $C_1$, que nous qualifierons de «continus» s'ils sont connexes, sans les supposer compacts. Nous désignons par $H(M) = \mathcal{C}(M) \cap L_n^1(M)$ l'espace des fonctions numériques continues sur $M$ admettant un gradient généralisé $\nabla u$, avec $I(u,M) = \int_M |\nabla u|^n \, dx < +\infty$ (si $M$ est non-compacte, il est important de noter que nous ne supposons pas ici, comme le font beaucoup d'auteurs, que $u \in L_n(M)$). À chaque condensateur $\Gamma(C_0; C_1)$ nous associons l'ensemble $A(C_0, C_1)$ des fonctions $u \in H(M)$ vérifiant $u = 0$ sur $C_0$ et $u = 1$ sur $C_1$ (fonctions dites admissibles pour $\Gamma(C_0, C_1)$).

La *capacité conforme* de $\Gamma(C_0, C_1)$ est alors définie par

$$\mathrm{Cap}_M(C_0, C_1) = \inf_{u \in A(C_0, C_1)} I(u,M)$$

en convenant que si $A(C_0, C_1) = \emptyset$ (ce qui se produit en particulier si $C_0 \cap C_1 \neq \emptyset$), on a $\mathrm{Cap}(C_0, C_1) = +\infty$.

Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme conforme, on a pour tout $v \in H(N)$, l'égalité $I(v \circ f, M) = I(v, N)$ d'où

$$\mathrm{Cap}_M(C_0, C_1) = \mathrm{Cap}_N(f C_0, f C_1)\,. \tag{6.1}$$

Plus généralement, si $f : M \to N$ est $K$-quasiconforme, les inégalités (2.1) impliquent, pour tout $v \in H(N)$, les inégalités $K^{-1} I(v,N) \leq I(v \circ f, M) \leq K I(v,N)$ d'où

$$K^{-1}\,\mathrm{Cap}_M(C_0, C_1) \leq \mathrm{Cap}_N(f C_0, f C_1) \leq K\,\mathrm{Cap}_M(C_0, C_1)\,. \tag{6.2}$$

Cela étant, on obtient des invariants conformes sur $M$ en cherchant le minimum de $\mathrm{Cap}(C_0, C_1)$ parmi les condensateurs dont les bornes sont des continus contenant des points donnés, le minimum ne dépendant que de ces points.

*a) Pour toute variété* $M$ la fonction $\rho_M(a,b,c,d)$ est définie par

$$\rho_M(a,b,c,d) = \inf_{C_0, C_1} \mathrm{Cap}_M(C_0, C_1)$$

où $C_0$, $C_1$ sont des continus compacts, $C_0$ contenant $a$ et $b$ et $C_1$ contenant $c$ et $d$.

Cette fonction (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est bien définie à moins que trois des points $a, b, c, d$ soient confondus.

*b) Pour toute variété non-compacte $M$* la fonction $\nu_M(x, y, z)$ est définie par

$$\nu_M(x, y, z) = \inf_{C_0, C_1} \mathrm{Cap}_M(C_0, C_1)$$

où $C_1$ est un continu compact contenant $x$ et $y$ et $C_0$ un continu non-compact contenant $z$ (donc joignant $z$ au point à l'infini de $M$).

Cette fonction, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est bien définie à moins que $x = y = z$.

*c) La fonction $\mu_M(x, y)$* est définie de manière un peu différente sur toute variété non-compacte $M$. On définit d'abord la *capacité d'un compact $K$* de $M$ par

$$\mathrm{Cap}_M(K) = \inf_{u \in A(K)} I(u, M)$$

où $A(K)$ désigne l'ensemble des fonctions $u \in H(M)$ à support compact dans $M$ et égales à 1 sur $K$.

On démontre que l'existence d'un continu compact $C$, non réduit à un point, tel que $\mathrm{Cap}_M(C) = 0$ entraîne la nullité de $\mathrm{Cap}_M(K)$ pour tout compact $K$ ; dans ce cas la variété $M$ est dite *parabolique* –sinon elle est dite *hyperbolique.* Dans ce dernier cas, on obtient une fonction non identiquement nulle $\mu_M : M \times M \to \mathbb{R}$ en posant

$$\mu_M(a, b) = \inf_C \mathrm{Cap}_M(C)$$

où $C$ est un continu compact contenant $a$ et $b$.

De (6.1) on déduit facilement que $\rho_M$, $\nu_M$ et $\mu_M$ sont des invariants conformes. De (6.2) on déduit que ces fonctions vérifient des inégalités de la forme (5.1). Leurs autres propriétés –en particulier leur continuité– sont moins immédiates (cf. [F 12]).

*Autres invariants.* — Le même procédé permet de construire d'autres invariants conformes, en particulier la fonction $\lambda_M : M \times M \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\lambda_M(x, y) = \inf_{C_0, C_1} \mathrm{Cap}_M(C_0, C_1)$$

où $C_0$, $C_1$ sont des continus non compacts tels que $x \in C_0$ et $y \in C_1$. J'ai établi ([F 13], [F 15]) que si cette fonction n'est pas identiquement nulle, $\lambda_M^{1/(1-n)}$ est une distance compatible avec la topologie de $M$, qui peut exister même sur des variétés paraboliques (en particulier sur toutes les variétés ayant au moins deux bouts).

Si la variété $M$ possède au moins deux bouts on peut aussi généraliser la définition de $\mu_M$ en considérant des condensateurs dont l'une des bornes $C_0$ est un bout de la variété, l'autre $C_1$ étant un compact ou un autre bout –voire un ensemble de bouts. On peut alors considérer $\mathrm{Cap}_M(K)$ comme étant la capacité du condensateur $\Gamma(K, \partial M)$ où $\partial M$ est la frontière idéale de $M$. Cette généralisation nous a permis d'établir des conditions suffisantes pour que le groupe $C(M)$ soit compact sans que $M$ le soit [F 14] ; et nous pouvons compléter le théorème A en énonçant :

THÉORÈME C. — *Pour que le groupe conforme $C(M)$ soit compact, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :*

*1) $M$ est compacte et non conformément équivalente à une sphère.*

*2) $M$ a un nombre fini $p \geq 3$ de bouts.*

*3) $M$ a deux bouts dont l'un au moins est de capacité positive.*

## 7. Conclusion

La démonstration du théorème A présentée ci-dessus peut apparaître comme très détournée, et plus «géométrique» que «différentielle», la structure de groupe n'y intervenant que très faiblement. C'est sans doute pour cette raison qu'elle n'a pu être publiée dans le «Journal of differential geometry» qui avait pourtant accueilli [F 2]. Je suis d'autant plus reconnaissante à J.-P. Bourguignon d'avoir fait paraître [F 10] dans «Mathematische Annalen». Une démonstration plus classique, purement analytique, eut été sans doute mieux appréciée des géomètres. Mais on peut douter qu'une telle démonstration existe ; car, dans le cas de variétés non-compactes, le théorème A fait intervenir la *géométrie à l'infini* de la variété pour laquelle les structures locales sont de peu de secours : le «tout algébrique» ne résout pas tout.

Je tiens à remercier également R.J. Zimmer, grâce à qui [F 12] a été publié dans «Geometriae Dedicata», ainsi que le Journal d'Analyse de Jérusalem qui a accepté [F 11] malgré sa longueur. Plus récemment, c'est la bienveillance de Pierre Bérard qui m'a donné l'occasion d'exposer le présent historique et le plaisir de voir [F 14] publié dans le même volume. Qu'il en soit vivement remercié ! Je dois enfin redire combien je suis reconnaissante à R.J. Zimmer et à K.R. Gutschera de m'avoir signalé un problème qui, s'il était passé de mode, n'en était pas moins passionnant –et dont on peut dire que l'honneur des mathématiques exigeait qu'il soit résolu.

# Appendice 1

(extrait du mémoire d'Alekseevskii [A 1])

THEOREM 4. — *An isotropy-compact closed group $C$ of automorphisms of a $G$-structure $B_G$ of finite type on a manifold $M$ acts on $M$ completely.*

*Proof.* — Let the $k$-th prolongation $G^{(k)}$ be $\{e\}$. Then the $k$-th prolongation of the $G$-structure $B_G$ on $M$ is an $\{e\}$-structure (*i.e.* a parallelization) $B_G^{(k)}$ on $B_G^{(k-1)}$. According to Bourbaki (see [B][1], Chapter III, § 4, Proposition 7) a Lie group $C$ of transformations of a manifold $M$ will act on $M$ completely if for any two points $p, q \in M$ one can find neighbordhoods $U_p \ni p$ and $U_q \ni q$, such that the set $C(U_p, U_q) = \{a \in C \mid aU_p \cap U_q \neq \emptyset\}$ is relatively compact in $C$. Let us choose for $U_p$ and $U_q$ relatively compact neighborhoods over which the fiber bundle $\pi : B_G^{(k-1)} \to M$ is trivial, and let $\widetilde{U}_p$ be the section of this bundle over $U_p$.

Let $\{a_i\}$ be a sequence of elements in $C(U_p, U_q)$. We must prove that it contains a convergent subsequence. There exist sequences $\{u_i\}$, $u_i \in U_p$, and $\{v_i\}$, $v_i \in U_q$, such that $a_i u_i = v_i$. We may suppose that $u_i \to u \in \overline{U}_p$ and $v_i \to v \in \overline{U}_q$. We lift the sequence $\{u_i\}$ to the section $\widetilde{U}_p$, *i.e.* consider a sequence $\tilde{u}_i \in \widetilde{U}_p$, where $\pi(\tilde{u}_i) = u_i$. Then $\tilde{u}_i \to \tilde{u}$, where $\pi(\tilde{u}) = u$. The action of $C$ on $M$ extends in a natural way to an action of $C$ on $B_G^{(k-1)}$, and moreover this action leaves the $\{e\}$-structure $B_G^{(k)}$ over $B_G^{(k-1)}$ invariant and consequently also leaves invariant its Riemannian metric $g$ (relative to which the frames of the $\{e\}$-structure are orthogonal).

Let us note that the intersection of an orbit $C\tilde{u}$ of the group $C$ in $B_G^{(k-1)}$ with any fiber $\pi^{-1}(x)$ is compact. (In fact, if $x = au$, then $C\tilde{u} \cap \pi^{-1}(x) = C_u a\tilde{u}$; but the isotropy group $C_u$ is compact by hypothesis.) Therefore we can find a compact neighborhood $U_v$ of the point $v$ for which the intersection $C\tilde{u} \cap \pi^{-1}(U_v)$ is compact. Since $\rho(a_i\tilde{u}, a_i\tilde{u}_i) = \rho(\tilde{u}, \tilde{u}_i) \to 0$ (where $\rho$ is the distance function for the metric $g$) and $\pi(a_i\tilde{u}_i) = a_i u_i \to v$, the sequence $\{a_i\tilde{u}\}$, after a certain $i = i_0$, belongs to $C\tilde{u} \cap \pi^{-1}(U_v)$, and consequently contains a convergent subsequence $\{a_{i_\alpha}\tilde{u}\}$. But then by Kobayashi's theorem (see [S]) the sequence $\{a_{i_\alpha}\}$ converges in $C$ to a certain element $a$, and hence $C(U_p, U_q)$ is relatively compact.

---

(1) Les références sont reportées dans la bibliographie générale

# Appendice 2[1]

(extrait du preprint de Gutschera [G])

## 2. Some counterexamples

There is a gap in [O 2] involving Obata's use of what he calls "Theorem K", namely that "A conformally flat simply connected Riemannian $n$-manifold is conformorphic to an open submanifold of a Euclidean $n$-sphere". This statement is not, however, true in general; Obata attributes it to Kuiper [Ku] but it does not seem to be stated there. Given any conformally flat simply connected Riemannian $n$-manifold $M$, there exists a smooth conformal immersion $\delta : M \to S^n$ which is unique up to conjugacy by a conformal transformation of $S^n$; $\delta$ is called the *developing map* [Ku], p. 31. So Obata's Theorem K is equivalent to saying that the developing map is necessarily injective. However, if we let $M$ be the universal cover of $S^n \setminus S^{n-2}$, then the map $\pi : M \to S^n$ obtained by lifting the inclusion of $S^n \setminus S^{n-2}$ in $S^n$ to $M$ must be the developing map, and it is not injective. However, Lafontaine shows that in the specific case that Obata requires, the developing map is indeed injective [L], p. 101.

In [A1], Alekseevskii states in his Theorem 4 that "An isotropy compact [with all isotropy subgroups compact] closed group $C$ of automorphisms of a $G$-structure of finite type on a manifold $M$ acts on $M$ completely" (recall that a group $C$ acts *completely* or *properly* on $M$ is the action map $C \times M \to M \times M$, $(a, p) \mapsto (ap, p)$, is proper). While this statement is true for conformal structures (it follows from Theorem A1 in [F 10]), it is not true for general $G$-structures.

The mistake in the proof of Theorem 4 is difficult to spot at first; we will not go over the entire proof, but instead simply point out the key problem (using the notation of [A1]). It involves the assertion that the sequence $\{a_i\bar{u}\}$ in the $(k-1)$ frame bundle $B^{(k-1)}$ must contain a convergent subsequence. Since the $G$-structure is not necessarily a metric structure, the map $\pi : B^{(k-1)} \to M$ need not respect the invariant metric on $B^{(k-1)}$, so $\{a_i\bar{u}\}$ may never meet $\pi^{-1}(U_v)$ even though the distance between $a_i\bar{u}$ and $a_i\bar{u}_i$ goes to zero and $a_i\bar{u}_i$ eventually lies in $\pi^{-1}(U_v)$. Thus $\{a_i\bar{u}\}$ need not lie in the compact set $C\bar{u} \cap \pi^{-1}(U_v)$ as Alekseeskii claims, so there may not be a convergent subsequence.

[1] Author's acknowledgement: We would like to thank R.J. Zimmer for showing us the counterexample to Alekseevskii's Theorem 4, and John M. Lee for telling us about the gap in [O 2].

We now show that Theorem 4 is not true for an arbitrary $G$-structure of finite type by constructing a freely acting group $C$ of automorphisms of an $O(p,q)$-structure on a compact manifold $M$, where $C$ is closed in the full automorphism group of $M$ but $C$ is not compact. The group $C$ is isotropy compact (each stabilizer $C_p$ is in fact trivial) but cannot act properly, since the inverse image of $M \times M$ under the action map is the noncompact set $C \times M$.

Let $G$ be a non-compact simple algebraic $\mathbb{R}$-group with finite center (for example, we could take $G = SL(2,\mathbb{R})$); such a group will admit a cocompact lattice $\Gamma$ [R 1], Chapter XIV; this lattice will have no unipotent element [R], Theorem 10.19. Now take any closed unipotent subgroup $U \subset G$; $U$ will act on $G/\Gamma$, and the action will be free since $\Gamma$ has no unipotent elements. Since $G$ (and hence $U$) preserves the semi-Riemannian metric on $G/\Gamma$ arising from the Killing form on the Lie algebra of $G$, and since $U$ cannot act properly (since $G/\Gamma$ is compact but $U$ is not), to see we have a counterexample to Alekseevskii's Theorem 4 it remains only to show that $U$ is closed in the automorphism group of $G/\Gamma$. But $G$ is closed in the automorphism group (since any simple finite center subgroup of a Lie group must be closed by the lemma below with $H = \overline{G}$), so $U$ is also.

LEMMA 2.1. — *If $G$ is a connected semisimple Lie group which is a dense subgroup of the Lie group $H$, then $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ where $\mathfrak{a}$ is Abelian. If $A$ is the Lie subgroup of $H$ corresponding to $A$, then $H \simeq G \times A/(Z(G) \cap A)$. In particular, if $Z(G)$ is finite, we must have $G = H$.*

*Proof.* — Since $\mathrm{Ad}(G)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$, we have $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$; thus $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$. Let $\mathfrak{a} = \ker \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$. Since $\mathrm{ad}_X$ is a derivation of $\mathfrak{g}$ for any $X \in \mathfrak{h}$, and all derivations of $\mathfrak{g}$ are inner (because $\mathfrak{g}$ is semisimple), we have a split exact sequence $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathfrak{a}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow 0$, *i.e.* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$. Any one parameter subgroup for $X \in \mathfrak{a}$ must commute with all elements of $G$, hence with all elements of $H$, so $\mathfrak{a}$ is central. To see $H \simeq G \times A/(Z(G) \cap A)$, simply note that the map $\phi : G \times A \longrightarrow H$ given by $\phi(g,a) = ga$ is a surjective homomorphism with kernel isomorphic to $Z(G) \cap A$. ∎

# BIBLIOGRAPHIE


[A 1] D.V. Alekseevskii. — *Groups of transformations of Riemannian spaces*, Mat. Sbornik, **89** (131) (1972), n$^{o}$ 2 and Math. USSR Sbornik **18** (2) (1972), , 285–301.

[A 2] D.V. Alekseevskii. — *$S^n$ et $E^n$ sont les seuls espaces riemanniens admettant une transformation conforme essentielle*, Uspehi Mat. Nauk **28** (5) (1973), 225–226 (en russe).

[B] N. Bourbaki. — *Topologie générale*, Ch. III, Hermann, Paris, 1960.

[C-H] A. Calabi and P. Hartman. — *On the smoothness of isometries*, Duke Math. J. **37** (4) (1970), 741–750.

[F 1] J. Lelong-Ferrand. — *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Mém. Acad. Royale de Belgique, **39** (5) (1971), 1–44 ; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **269** (1969), 583–586.

[F 2] J. Lelong-Ferrand. — *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geo., **8** (1973), 487–510 ; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **275** (1972), 119–122.

[F 3] J. Lelong-Ferrand. — *Construction de modules de continuité dans le cas limite de Soboleff et applications à la géométrie différentielle*, Arch. for Rat. Mech. and An., **52** (4) (1973), 297–311 ; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **276** (1973), 297–300.

[F 4] J. Lelong-Ferrand. — *Geometrical interpretation of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphisms. Differential geometry and relativity*, D. Reidel, Dordrecht (1976), 91–105 ; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **284** (1977), 77–79.

[F 5] J. Lelong-Ferrand. — *Regularity of conformal mappings of Riemannian manifolds*, Proc. Romanian Finnish Seminar Bucharest 1976, Lecture Notes **743** (1979), Springer-Verlag, 197–203.

[F 6] J. Lelong-Ferrand. — *Sur un lemme d'Alekseevskii relatif aux transformations conformes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **284** (1977), 121–123.

[F 7] J. Ferrand. — *Le groupe des automorphismes conformes d'une variété de Finsler compacte*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **291** (1980), 209–210.

[F 8] J. Ferrand. — *Les géodésiques des structures conformes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), 629–632.

[F 9] J. Ferrand. — *Un invariant conforme lié aux géodésiques conformes*, Lecture Notes **1013** Springer (1983), 76–86.

[F 10] J. Ferrand. — *The action of conformal transformations on a Riemannian manifold*, Math. Ann., **304** (1996), 277–291 ; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **218** (1994), 213–216.

[F 11] J. Ferrand. — *Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds*, J. Analyse Math., **69** (1996), 1–24 ; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 437–440.

[F 12] J. Ferrand. — *Conformal capacities and conformally invariant functions on Riemannian manifolds*, Geometriae dedicata, **61** (1996), 103–120; résumé dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **318** (1994), 213–216.

[F 13] J. Ferrand. — *Conformal capacities and extremal metrics*, Pacific J. of Math. **180** (1) (1997), 41–49.

[F 14] J. Ferrand. — *Generalized condensers and conformal properties of Riemannian manifolds with at least two ends*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble **17** (1999), .

[F 15] J. Ferrand. — *Conditions d'existence et propriétés d'une métrique conformément invariante sur les variétés riemanniennes non-compactes*, Analysis and topology, World scientific Singapore (1998), (dedicated to the memory of R. Stoilow) 285–291.

[G] K.R. Gutschera. — *Invariant metrics for groups of conformal transformations*, Preprint, 1994.

[I-M] T. Iwaniec and G. Martin. — *Quasiregular mappings in even dimensions*, Acta Math. **170** (1992), 29–81.

[K-N] S. Kobayashi and K. Nomizu. — *Foundations of differential geometry, vol. I*, Interscience publishers, 1963.

[K] S. Kobayashi. — *Transformation groups in differential geometry*, Erg. der Math., **70**, Springer, 1972.

[Ku] N.H. Kuiper. — *On conformally flat spaces in the large*, Ann. of Math. **50** (1949), 916–924.

[L] J. Lafontaine. — *The theorem of Lelong-Ferrand and Obata. Conformal geometry*, R. Kulkarni and U. Pinkall, ed. Max Planck Inst. für Math. Bonn, 1988.

[Mo] G.D. Mostow. — *Quasiconformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 53–104.

[M-S] S. Myers and N. Steenrod. — *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. **40** (1939), 400–416.

[M-Z 1] D. Montgomery and L. Zippin. — *Existence of subgroups isometric to the real numbers*, Ann. of Math. **53** (1951), 298–326.

[M-Z 2] D. Montgomery and L. Zippin. — *Topological transformation groups*, Interscience publishers, New-York-London, 1955.

[O 1] M. Obata. — *Conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **4** (1970), 311–333.

[O 2] M. Obata. — *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **6** (1971), 247–258.

[P] R.S. Palais. — *On the differentiability of isometries*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 805–807.

[R 1] M.S. Raghunathan. — *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[R 2] Y.G. Reshetnyak. — *On conformal mappings of a space*, Soviet. Math. Dokl. **1** (1960), 153–155.

[R 3] Y.G. Reshetnyak. — *Differential properties of quasiconformal maps and conformal maps of Riemannian manifolds*, Siber. Math. J. **19** (5) (1978), 1166–1183.

[S] S. Sternberg. — *Lectures on differential geometry*, Prenctice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[V] J. Väisälä. — *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229** Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Y] Y. Yoshimatsu. — *On a theorem of Alekseevskii concerning conformal transformations*, J. Math. Soc. Japan **28** (2) (1976), 278–289.

Jacqueline FERRAND
Université Pierre et Marie Curie
43 bis, rue du Lycée
92330 SCEAUX (France)