Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

FRANÇOISE DAL'BO

Géométrie d'une famille de groupes agissant sur le produit de deux variétés d'Hadamard

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 85-98
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__85_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (85–98)

GÉOMÉTRIE D'UNE FAMILLE DE GROUPES AGISSANT SUR LE PRODUIT DE DEUX VARIÉTÉS D'HADAMARD

Françoise DAL'BO

A Hubert, d'une absence si présente...

Introduction

Une *variété d'Hadamard pincée* est une variété riemannienne complète simplement connexe dont la courbure sectionnelle est bornée. Nous supposons que la borne supérieure de la courbure est -1.

Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux variétés d'Hadamard pincées, pour $i = 1,2$ on note $X_i(\infty)$ le bord géométrique de X_i vu d'un point 0_i fixé au préalable dans X_i ([G-H]) et X l'espace produit $X_1 \times X_2$ muni de la métrique produit. Cet espace contient des sous-variétés totalement géodésiques plates de dimension 2 appelées *plats*. Un vecteur non nul (u_1, u_2) appartenant au fibré unitaire tangent en $0 = (0_1, 0_2)$ à X est tangent à un unique plat si et seulement si $\|u_1\|_1 \|u_2\|_2 \neq 0$, dans ce cas on dit que u est *régulier* et on le code par le triplet $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|_1}, \frac{u_2}{\|u_2\|_2}, \frac{\|u_2\|_2}{\|u_1\|_1}\right)$. Si $\|u_1\|_1 \|u_2\|_2 = 0$, u est *singulier* et on l'identifie à sa composante non nulle. Le bord de X noté $X(\infty)$ se compose donc d'une partie régulière $X_{\text{reg}}(\infty)$ codée par $X_1(\infty) \times X_2(\infty) \times \mathbb{R}_*^+$ et d'une partie singulière $X_{\text{sing}}(\infty)$ codée par $X_1(\infty) \cup X_1(\infty)$. Soit Γ un groupe d'isométries agissant proprement discontinûment sur X, on note $L(\Gamma) = X(\infty) \cap \overline{\Gamma 0}$ son ensemble limite, $P(\Gamma)$ la projection sur $\mathbb{R}_*^+$ de $L(\Gamma) \cap X_{\text{reg}}(\infty)$ et $\mathcal{F}(\Gamma)$ sa projection sur $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$. Dans ce texte nous démontrons les propositions A et B suivantes.

Classification math. : 53A35, 53C20, 20H10.

Proposition A. *Soient* $\Gamma_1 = < g_1, \ldots g_k >$ *et* $\Gamma_2 = < h_1, \ldots h_k >$ *deux groupes de Schottky (voir paragraphe* 2) *agissant respectivement sur* X_1 *et* X_2 *et* $\Gamma_1 \xrightarrow{\rho} \Gamma_2$ *l'isomorphisme défini par* $\rho(g_i) = h_i$. *On note* Γ *le groupe des isométries de* X *formé des couples* $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))$ où $\gamma_1 \in \Gamma_1$. *Les propriétés suivantes sont vérifiées* :

1) $L(\Gamma) \subset X_{\text{reg}}(\infty)$.

2) $P(\Gamma)$ *est un intervalle borné fermé de* $\mathbb{R}_*^+$ *qui coïncide avec l'ensemble* $\overline{\{\frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} / \gamma_1 \in \Gamma_1\}}$ *où* $\ell(\gamma_i) = d_i(z, \gamma_i z)$ *pour* z *sur l'axe de* γ_i.

3) $\mathcal{F}(\Gamma) = \{(x_1, \varphi(x_1)) / x_1 \in L(\Gamma)\}$ *où* φ *représente l'homéomorphisme de Nielsen induit par* ρ *entre* $L(\Gamma_1)$ *et* $L(\Gamma_2)$.

4) $L(\Gamma) = \mathcal{F}(\Gamma) \times P(\Gamma)$.

Au passage remarquons que l'image d'un point $\xi = (\xi_1, \xi_2, r)$ de $X_{\text{reg}}(\infty)$ par une isométrie $g = (g_1, g_2)$ est $g(\xi) = (g(\xi_1), g(\xi_2), r)$, par conséquent si $P(\Gamma)$ contient au moins deux points distincts p_1, p_2 alors $\mathcal{F}(\Gamma) \times \{p_1\}$ et $\mathcal{F}(\Gamma) \times \{p_2\}$ sont deux fermés Γ-invariants de $L(\Gamma)$ ce qui montre que $L(\Gamma)$ n'est pas le plus petit fermé Γ-invariant de $X(\infty)$ (contrairement au cas où X est une variété d'Hadamard pincée). En revanche on verra que $\mathcal{F}(\Gamma)$ est lui le plus petit fermé Γ-invariant de $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$. Si on remplace dans la proposition A, X_1 et X_2 par des espaces symétriques de rang 1, cette proposition est due à M. Burger [Bu]. Un résultat analogue dans le cadre général des espaces symétrique a été démontré par Y. Benoist [Be] (voir aussi [G]).
Nous notons $I(X_i)$ le groupe des isométries de X_i.

Proposition B. *Soit* G *un sous-groupe de* $I(X_1) \times I(X_2)$ *agissant proprement discontinûment et librement sur* $X_1 \times X_2$, *notons* G_i *la projection de* G *sur* $I(X_i)$. *Si* $L(\Gamma)$ *est inclus dans* $X_{\text{reg}}(\infty)$ *alors* G_i *agit proprement discontinûment librement sur* X_i, *de plus il existe un isomorphisme* $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ *préservant le type de chaque isométrie tel que* $G = \{(g_1, \rho(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}$.

La réciproque est fausse, il suffit pour s'en convaincre de considérer $G_1 = < h_1, p_1>$ et $G_2 = <h_2, p_2>$ deux groupes de *Schottky généralisés* avec h_i hyperbolique et p_i parabolique (Voir [D-P1] et [D-P2]) et $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(h_1) = p_2$ et $\rho(p_1) = h_2$. On peut également penser au cas où $G_1 = <g_1, h_1>$ est un sous-groupe de Schottky de $SO(n,1)$ avec $n \geq 3$ et $G_2 = <g_2, h_2>$ est un groupe libre de $SO(n)$, dans ce cas l'ensemble limite du groupe $\{(g, \rho(g)) / g \in G_1\}$ ne rencontre pas $X_{\text{reg}}(\infty)$.

1. Compactification de $X = X_1 \times X_2$

Soient X_1, X_2 deux variétés d'Hadamard pincées, on note $X_i(\infty)$ leur bord géométrique vu de 0_i, point fixé dans X_i (voir [G-H]). On compactifie $X_1 \times X_2$ en lui ajoutant $X_{reg}(\infty) = X_1(\infty) \times X_2(\infty) \times \mathbb{R}_*^+$ et $X_{sing}(\infty) = X_1(\infty) \cup X_2(\infty)$ de la façon suivante : une suite non bornée $x_n = (x_n^1, x_n^2)$ de X converge vers $(\xi_1, \xi_2, p) \in X_{reg}(\infty)$ si $\lim_{n\to+\infty} x_n^i = \xi_i$ pour $i = 1,2$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(0_2, x_n^2)}{d_1(0_1, x_n^1)} = p$; cette suite converge vers un point singulier $\eta \in X_i(\infty)$ si $\lim_{n\to\infty} x_n^i = \eta$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(0_2, x_n^2)}{d_1(0_1, x_n^1)} = 0$ (si $i=1$) ou $+\infty$ (si $i=2$). L'espace $X(\infty)$ s'identifie au fibré unitaire tangent à X en $0 = (0_1, 0_2)$; soit $u = (u_1, u_2)$ un vecteur *régulier* de ce fibré (i.e. $\|u_1\|_1 \|u_2\|_2 \neq 0$) la sous-variété totalement géodésique $\mathcal{P}_0(u_1, u_2) = \{ (\exp_{0_1} t_1 u_1, \exp_{0_2} t_2 u_2) \,/\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ est un plat. Remarquons que deux plats $\mathcal{P}_0(u_1, u_2)$ et $\mathcal{P}_0(v_1, v_2)$ se rencontrent soit uniquement en 0, soit le long d'une géodésique singulière $(0_1, \exp_{0_2} tu_2)_{t\in\mathbb{R}}$ ou $(\exp_{0_1} tu_1, 0_2)_{t\in\mathbb{R}}$. Si u est régulier u est donc tangent en un unique plat.

Soit γ_i une transformation hyperbolique de X_i, on note γ_i^+ son point attractif et $\ell(\gamma_i)$ son déplacement (i.e. $\ell(\gamma_i) = d_i(z_i, \gamma_i(z_i))$ où z_i appartient à l'axe de γ_i). Notons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(0_2, \gamma_2^n(0_2))}{d_1(0_1, \gamma_1^n(0_1))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(z_2, \gamma_2^n(z_2))}{d_1(z_1, \gamma_1^n(z_1))}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \gamma^n(0) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+, \frac{\ell(\gamma_2)}{\ell(\gamma_1)})$.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ une isométrie de X, γ est *mélangée* si γ_1 et γ_2 ne sont pas du même type. Supposons que γ_1 soit parabolique et γ_2 hyperbolique, on note γ_1^+ l'unique point fixe de γ_1. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $n > 0$, $d_1(0_1, \gamma_1^n 0_1) \leq \mathrm{Log}((1+n)A)$ ([D-P2] chap. IV), par ailleurs $d_2(0_1, \gamma_2^n 0_2) \underset{+\infty}{\sim} n\ell(\gamma_2)$ donc $\lim_{+\infty} d_2(0_1, \gamma_2^n 0_2) / d_1(0_1, \gamma_1^n 0_1) = +\infty$; ceci montre que $\gamma^n(0)$ converge vers $\gamma_2^+ \in X_{sing}(\infty)$. Si γ est mélangé et si l'un des γ_i est elliptique, il est clair que $\gamma^n(0)$ converge vers $\gamma_j^+ \in X_{sing}(\infty)$ où γ_j représente la composante non elliptique de γ. En résumé on a la

1.1. Propriété. *Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ une isométrie de X, si γ_1 et γ_2 sont hyperboliques $\gamma^n(0)$ converge en $+\infty$ vers $(\gamma_1^+, \gamma_2^+, \frac{\ell(\gamma_2)}{\ell(\gamma_1)}) \in X_{reg}(\infty)$, si γ est mélangé $\gamma^n(0)$ converge en $+\infty$ vers $\gamma_j^+ \in X_{sing}(\infty)$ où γ_j représente la composante hyperbolique de γ s'il y en a une et parabolique sinon.*

Supposons que γ_1 et γ_2 soient paraboliques, si $X_1 = X_2 = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ on obtient $\lim\limits_{+\infty} \gamma^n(0) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+, 1)$ et si $X_1 = X_2 = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $\lim\limits_{+\infty} \gamma^n(0) = (\gamma_1^+, \gamma_2^+, q)$ avec $q \in \{1/2, 1/4\}$. Dans le cas général, il semble qu'aucun résultat ne soit connu, ce problème est directement relié à la question suivante

1.2.Question. *Soient (Y, d) une variété d'Hadamard pincée et p une isométrie parabolique, existe-t-il $B > 0$ tel que $d(0, p^n(0)) \geq \mathrm{Log}((1+n)B)$ pour tout $n > 0$?*

2. Groupes de Schottky

Soient Y une variété d'Hadamard pincée et 0 un point fixé dans Y. On munit le bord géométrique $Y(\infty)$ de Y vu de 0 de la métrique D définie par $D(\xi, \eta) = e^{-(\xi/\eta)}$ où (ξ/η) représente le produit de Gromov en 0 de ξ et η (voir [Bo] et [K]). Une isométrie g agit par transformation conforme sur $(Y(\infty), D)$ ([Bo]), son facteur conforme en $\xi \in Y(\infty)$ est noté $|g'(\xi)| = \lim\limits_{\xi \to \eta} D(g(\xi), g(\eta)) / D(\xi, \eta)$.
Les propriétés suivantes découlent directement de la structure conforme de $(Y(\infty), D)$.

2.1. Propriétés

1) $\forall\, \xi, \eta \in Y(\infty),\ D(g(\xi), g(\eta)) = \sqrt{|g'(\xi)||g'(\eta)|}\ D(\xi, \eta)$
2) *Si g est hyperbolique, $e^{\ell(g)} = |g'(g^-)|$ où g^- est le point répulsif de g.*

Soient $g_1, \dots, g_k$ des transformations hyperboliques, le groupe engendré par $g_1, \dots, g_k$ est un *groupe de Schottky* (voir [D-P1], [D-P2]) si pour chaque $i = 1, \dots, k$ il existe deux voisinages compacts de g_i^- et g_i^+ dans $\overline{Y} = Y \cup Y(\infty)$ notés respectivement $V(g_i^{-1})$ et $V(g_i)$ vérifiant les conditions suivantes :

1) Les $2k$ voisinages $V(g_1), V(g_1^{-1}), \dots, V(g_k), V(g_k^{-1})$ sont deux à deux disjoints.
2) Pour $i = 1, \dots, k$ $\overline{g_i(\overline{Y} - V(g_i^{-1}))} = V(g_i)$.

Voici une façon (classique) de construire de tels groupes. Soient h une transformation hyperbolique et U^-, U^+ deux voisinages compacts disjoints dans $Y(\infty)$ de h^-, h^+. D'après [G-H] (chap. 8, thm 16), il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$

$$h^n(Y(\infty) - U^-) \subset U^+ \quad \text{et} \quad h^{-n}(Y(\infty) - U^+) \subset U^-.$$

Notons $V^- = U^-$ et $V^+ = \overline{h^N(Y(\infty) - U^-)}$, ces deux ensembles sont des voisinages, compacts disjoints de h^- et h^+. Notons $\mathscr{C}^-$ le cône issu de 0 formé de tous les rayons géodésiques $[0,\xi)$ avec $\xi \in V^-$, ce cône est un voisinage de h^- dans $\overline{Y}$.

2.2. Lemme. *Il existe* $N_1 > N$ *tel que* $h^{N_1}(\overline{Y} - \mathscr{C}^-) \cap \mathscr{C}^- = \phi$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $p > N$ il existe $c_p \in \mathscr{C}^-$ vérifiant $h^{-p}(c_p) \notin \mathscr{C}^-$. Notons v_p l'extrémité du rayon géodésique issu de 0 pasant par c_p, puisque $c_p \in \mathscr{C}^-$ on a $v_p \in V^-$. On déduit des propriétés 2.1 les égalités suivantes :

$$D(h^{-p}\,v_p,\, h^-) = |h^{-p\prime}(v_p)|^{1/2}\, e^{-\frac{p}{2}\ell(h)}\, D(v_p,\, h^-) \quad \text{et} \quad |h^{-p\prime}(v_p)|^{1/2} = \frac{D(h^{-p}(v_p), h^+)}{e^{p/2\ell(h)}D(v_p, h^+)}.$$

Pour tout p, $v_p \in V^-$ et $h^+ \in V^+$ donc il existe $A > 0$ tel que $D(v_p\,, h^+) > A$. On en déduit l'existence d'une constante $B > 0$ telle que

$$|h^{-p\prime}(v_p)|^{1/2} \leq e^{-\frac{p}{2}\ell(h)}\, B\,.$$

Ceci montre que $\lim_{p\to+\infty} h^{-p}(v_p) = h^-$. Par ailleurs $\lim_{p\to+\infty} h^{-p}(0) = h^-$ donc $h^{-p}(c_p)$ converge vers h^- ce qui contredit le fait que $h^{-p}(c_p) \notin \mathscr{C}^-$.

Notons $V(h^{-1}) = \mathscr{C}^-$ et $V(h) = \overline{h^{N_1}(\overline{Y} - \mathscr{C}^-)}$, On vient de montrer la

2.3. Propriété. *Il existe deux voisinages compacts disjoints* $V(h^{-1})$ *et* $V(h)$ *de* h^- *et* h^+ *dans* $\overline{Y}$ et N_1 *tels que :* $h^{N_1}(\overline{Y} - V(h^{-1})) = V(h)$.

Soient $g_1, ..., g_k$ des transformations hyperboliques n'ayant aucun point fixe en commun, on obtient par la construction précédente l'existence de $N_1, ... N_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $< g_1^{N_1}, ... g_k^{N_1} >$ soit un groupe de Shottky.

On déduit facilement de la dynamique des générateurs les deux résultats suivants :

2.4. Propriété du Ping-Pong. *Soient* $< g_1, ..., g_k >$ *un groupe de Schottky et* $a_1 ... a_\ell$ *un mot réduit* (i.e. $a_i \in \{ g_1^{\pm 1}, ..., g_k^{\pm 1} \}$, $a_{i+1}^{-1} \neq a_i$) *pour tout* $x \in \overline{Y} - \bigcup_{i=1}^{k} V(g_i) \cup V(g_i^{-1})$, *on a* $a_1 ... a_\ell(x) \in V(a_1)$.

2.5. Corollaire. *Le groupe* $< g_1, ..., g_k >$ *est libre, purement hyperbolique et agit proprement discontinûment sur Y.*

On suppose pour simplifier que $< g_1\,, ..., g_k >$ est un groupe de Schottky et que pour chaque i, $V(g_i^{\varepsilon_i})$ est un secteur c'est-à-dire, un ensemble de rayon géodésique issu d'un point $y_{i,\varepsilon_i} \in Y$ (la construction indiquée précédemment fournit de tels voisinages).

2.6. Remarque. Le domaine $\mathcal{D} = Y - \bigcup_{i=1}^{k} V(g_i) \cup V(g_i^{-1})$ est un domaine fondamental de $<g_1, \ldots, g_k>$.

Démonstration. En utilisant la propriété du Ping-Pong, on montre facilement que pour tout $g \neq e$, appartenant à $<g_1, \ldots, g_k>$ on a $g\mathring{\mathcal{D}} \cap \mathring{\mathcal{D}} = \phi$. Soit $y \subset Y - \mathcal{D}$, il existe $s_1 \in \{1, \ldots, k\}$ et $\varepsilon_1 \in \{\pm 1\}$ tels que $y \in V(g_{s_1}^{\varepsilon_1})$, notons $y_1 = g_{s_1}^{-\varepsilon_1}(y)$. Si $y_1 \in \mathcal{D}$, on a montré l'existence d'un $g \in G$ tel que $g(y) \in \mathcal{D}$, sinon il existe $s_2 \in \{1, \ldots, k\}$ et $\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ avec $g_{s_2}^{\varepsilon_2} \neq g_{s_1}^{-\varepsilon_1}$ tels que $y_1 \in V(g_{s_2}^{\varepsilon_2})$, on pose $y_2 = g_{s_2}^{-\varepsilon_2}(y_1)$. On construit de cette façon une suite y_n. Le but est de démontrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $y_n \in \mathcal{D}$. Supposons que pour tout $n > 0$, $y_n \notin \mathcal{D}$ ainsi $y \in g_{s_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{s_n}^{\varepsilon_n} (V(g_{s_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}})$ pour tout $n > 0$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $y \in g_{s_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{s_{n_p}}^{\varepsilon_{n_p}}(V)$ où V est un voisinage fixé de la forme $V(g_s^{\varepsilon})$. Notons $V_p = g_{s_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{s_{n_p}}^{\varepsilon_{n_p}}(V)$, il découle de la propriété du Ping-Pong que $V_{p+1} \subset V_p$, ainsi $y \in \bigcap_{p=1}^{+\infty} V_p$. Posons $V_p(\infty) = V_p \cap Y(\infty)$ et $\gamma_p = g_{s_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{s_{n_p}}^{\varepsilon_{n_p}}$, on a

$$D(\gamma_p(\xi), \gamma_p(\eta)) = |\gamma_p'(\eta)|^{1/2} \, |\gamma_p'(\xi)|^{1/2} D(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad |\gamma_p'(\xi)|^{1/2} = \frac{D(\gamma_p(\xi), \gamma_p^-)}{e^{\frac{\ell(\gamma_p)}{2}} \, D(\xi, \gamma_p^-)}.$$

Puisque $\gamma_p^- \in V(g_{s_{n_p}}^{-\varepsilon_p})$ et $g_{s_{n_p}}^{-\varepsilon_p} \neq g_s^{\varepsilon}$, si ξ et η appartiennent à V il existe $B > 0$ tel que pour tout $p > 0$ $|\gamma_p'(\xi)|$ et $|\gamma_p'(\eta)|$ soient majorés par $\frac{B}{e^{\frac{\ell(\gamma_p)}{2}}}$ donc Diam $V_p(\infty) \leq \frac{K}{e^{\frac{\ell(\gamma_p)}{2}}}$.

D'après [D-P2] (corollary II-3), $\lim_{p \to +\infty} \ell(\gamma_p) = +\infty$ donc $\lim_{p \to +\infty} \text{Diam } V_p(\infty) = 0$.
Cela entraîne que pour tout $z \in Y$ et pour toute suite $\xi_p \in V_p(\infty)$, quitte à extraire une sous-suite $\lim_{p \to +\infty} \gamma_p(z) = \lim_{p \to \infty} \gamma_p(\xi_p) = \xi$ avec $\{\xi\} = \bigcap_{p=1}^{+\infty} V_p(\infty)$. Montrons que pour tout compact $K \subset Y$, il existe $p > 0$ tel que $V_p \cap K \neq \phi$, ceci montrera que le point y considéré au départ appartient à $Y(\infty)$ on aboutira ainsi à une contradiction. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe K tel que pour tout $p > 0$, $V_p \cap K \neq \phi$. Soit v_p une suite de V telle que $\gamma_p(v_p) \in K$ et converge. Le voisinage V est un cône issu d'un point z fixé, soit $\gamma_p(\infty)$ l'extrémité du rayon issu de z passant par v_p, on a $\gamma_p(\infty) \in V$, ainsi $\gamma_p(z)$ et $\gamma_p(v_p(\infty))$ (quitte à extraire une sous-suite) converge vers ξ donc $\gamma_p(v_p)$ aussi ce qui est contradictoire. □

2.7. Corollaire. *Soit $<g_1,\dots,g_k>$ un groupe de Schottky, il existe un compact sur la variété $Y/<g_1,\dots,g_k>$ contenant toutes les géodésiques fermées.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(\overline{\mathcal{G}}_n)_{n\geq 1}$ de géodésiques fermées sur $Y/<g_1,\dots,g_k>$ et une suite de points non bornée $\overline{x}_n \in \overline{\mathcal{G}}_n$. Ceci se traduit sur le domaine fondamental $\mathcal{D}$ introduit précédemment par l'existence d'une suite non bornée $x_n \in \mathcal{D}$ et d'une suite d'axes de transformations hyperboliques h_n contenant x_n. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $h_n = a_1 \dots a_{\ell_n}$ est un mot réduit et que x_n, h_n^+, h_n^- convergent dans $\overline{Y}$. Comme $h_n^+ \in a_1\, V(a_2)$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in a_1 V(a_2) \cap \overline{\mathcal{D}}$. Or $\mathcal{D} = Y - \bigcup\limits_{i=1}^{k} V(g_i) \cup V(g_i^{-1})$ donc $x \in \partial V(a_1)$ où $\partial V(a_i)$ désigne la frontière de $V(a_i)$. Ainisi $x \in \partial V(a_1) \cap a_1 V(a_2)$, par ailleurs $\partial V(a_1) = a_1(\partial V(a_1^{-1}))$ donc $a_1^{-1}x \in \partial V(a_1^{-1}) \cap V(a_2)$ ce qui est impossible car $a_1 \neq a_2^{-1}$. □

Soit Σ l'espace symbolique des mots réduits infinis $(a_i)_{i\geq 1}$ (i.e. $a_i \in \{g_1^{\pm 1},\dots,g_k^{\pm 1}\}$, $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$) muni de la distance δ définie par $\delta((a_i)_{i\geq 1}, (b_i)_{i\geq 1}) = 0$ si $a_i = b_i$ $\forall\, i \geq 1$ et $1/N$ avec $N = \min\{\, i\geq 1 \,/\, a_i \neq b_i \,\}$ sinon. L'application $\Sigma \xrightarrow{\varphi} L(G)$ définie par $\varphi((a_i)_{i\geq 1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_1 \dots a_i(y)$ pour y fixé dans Y est un homéomorphisme (indépendant de y) de (Σ, δ) sur $L(G)$ muni de la métrique D. Soient X_1 et X_2 deux variétés d'Hadamard pincées et $G_1 = <g_{11},\dots,g_{1k}>$, $G_2 = <g_{21},\dots,g_{2k}>$ deux groupes de Schottky agissant respectivement sur X_1 et X_2. On note Σ_i l'espace symbolique des mots réduits associé à G_i et $\Sigma_i \xrightarrow{\varphi_i} L(G_i)$ l'homéomorphisme défini ci-dessus. Soit $L(G_1) \xrightarrow{\varphi} L(G_2)$ l'application définie pour $x = \varphi_1((a_{1j})_{j\geq 1}) \in L(G_1)$ par $\varphi(x) = \varphi_2((a_{2j})_{j\geq 1}))$ avec la convention suivante : si $a_{1j} = g_{1\ell}$ alors $a_{2j} = g_{2\ell}$. Comme φ_1, φ_2 sont des homéomorphismes on a la :

2.8. Propriété. *L'application $L(G_1) \xrightarrow{\varphi} L(G_2)$, appelée application de Nielsen associée à G_1, G_2, est un homéomorphisme.*

On rappelle que $<g_1,\dots g_k>$ est un groupe de Schottky

2.9. Lemme de comparaison. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $p > 0$ et pour tout mot fortement réduit $g = a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$ (i.e. $a_i \in \{g_1^{\pm 1},\dots,g_k^{\pm 1}\}$, $n_i > 0$, $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ et $a_1 \neq a_p^{-1}$) on ait*

$$| \ell(g) - \sum_{i=1}^{p} n_i\, \ell(a_i)| \leq c \times p\,.$$

Remarquons que $c \times p$ ne peut pas être remplacé par une constante uniforme, il suffit pour s'en convaincre de prendre $g = (g_1 g_2)^n$ et de supposer $\ell(g_1 g_2) \neq \ell(g_1) + \ell(g_2)$.

Démonstration du lemme. D'après les propriétés 2-1, le lemme revient à montrer l'existence de $d > 1$ tel que pour tout mot fortement réduit $g = a_1^{n_1} \dots a_p^{n_p}$ on ait :

$$d^{-p} \leq \frac{e^{\ell(g)}}{\prod_{i=1}^{p} e^{n_i \ell(a_i)}} \leq d^p .$$

Pour alléger la démonstration on se restreint au cas où p=2 et $g = g_1^{n_1} g_2^{n_2}$ avec $n_i > 0$.

On a

$$e^{\ell(g)} = |g'(g^-)| \quad \text{et} \quad |g'(g^-)| = |g_1^{n_1'}(g_2^{n_2}(g^-))| \; |g_2^{n_2'}(g^-)| \, .$$

D'après la propriété 2-1 1)

$$|g_2^{n_2'}(g^-)|\,|g_2^{n_2'}(g_2^+)| = D^2(g_2^{n_2}(g^-), g_2^+) \,/\, D^2(g^-, g_2^+).$$

Notons A le diamètre de $Y(\infty)$ et $B = \inf_{\substack{i,j \in \{1,\dots k\} \\ \varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\} \\ (i,\varepsilon) \neq (j,\varepsilon')}} D(V_\infty(g_i^\varepsilon), V_\infty(g_j^{\varepsilon'}))$,

où $V_\infty(g_i^\varepsilon) = V_\infty(g_i^\varepsilon) \cap Y(\infty)$.

Comme $g_2^{n_2}(g_-) \in V_\infty(g_1^{-1})$, $g_2^+ \in V_\infty(g_2)$ et $g^- \in V_\infty(g_2^{-1})$ on obtient

$$\frac{B^2}{A^2} \leq \frac{|g_2^{n_2'}(g^-)|}{e^{n_2 \ell(g_2)}} \leq \frac{A^2}{B^2}$$

le même raisonnement appliqué cette fois à $|g_1^{n_1'}(g_2^{n_2}(g^-))|$ montre que

$$\frac{B^2}{A^2} \leq \frac{|g_1^{n_1'}(g_2^{n_2}(g^-))|}{e^{n_1 \ell(g_1)}} \leq \frac{A^2}{B^2} .$$

Posons $d = \frac{B^2}{A^2}$, on a

$$d^{-2} \leq \frac{e^{\ell(g)}}{\prod_{i=1}^{2} e^{n_i \ell(g_i)}} \leq d^2 . \ \square$$

3. Démonstrations des propositions A et B

Soient $\Gamma_1 = \langle g_1, \dots g_k \rangle$, $\Gamma_2 = \langle h_1, \dots h_k \rangle$ des groupes de Schottky agissant respectivement sur des variétés d'Hadamard pincées X_1, X_2 et $\Gamma_1 \xrightarrow{\varphi} \Gamma_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(g_i) = h_i$.

On note $\Gamma = \{(\gamma_1, \rho(\gamma_1)) \,/\, \gamma_1 \in \Gamma_1\}$, ce groupe est libre et agit proprement discontinûment sur $X = X_1 \times X_2$. On rappelle que $L(\Gamma) = X(\infty) \cap \overline{\Gamma 0}$ et que $P(\Gamma)$ représente la projection de $L(\Gamma) \cap X_{\text{reg}}(\infty)$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Dans ce paragraphe nous démontrons en plusieurs étapes les propositions A et B énoncées dans l'introduction.

3.1. Proposition A 1) 2).

1) $L(\Gamma) \subset X_{\text{reg}}(\infty)$

2) *$P(\Gamma)$ est un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}_*^+$ qui coïncide avec* $\overline{\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} / \gamma_1 \in \Gamma_1 \}}$.

Démonstration. Soit $\xi \in L(\Gamma)$, il existe une suite $\gamma_n = (\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2})$ avec $\gamma_{n_2} = \rho(\gamma_{n_1})$ dans Γ telle que $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(0) = \xi$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\gamma_{n_1} = a_1 \dots a_{\ell_n}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \ell_n = +\infty$, $a_1 \neq a_{\ell_n}^{-1}$ et $a_1 \dots a_{\ell_n}$ réduit. On note C_n la géodésique de X_1 d'extrémités $\gamma_{n_1}^+$ et $\gamma_{n_1}^-$.

1) D'après le corollaire 2.7, il existe un compact connexe d'intérieur non vide K_1 de X_1 inclus dans un domaine fondamental $\mathcal{D}$ (qui contient 0_1) de Γ_1 fixé au préalable tel que $\partial K_1 \subset \partial\mathcal{D}$ et $C_n \subset \bigcup_{\gamma_1 \in \Gamma_1} \gamma_1 K_1$ pour toute géodésique C_n. Soit $z_n \in C_n \cap \partial K_1$, on note $[y_j, y_{j+1}]$ le segment de C_n inclus dans $a_1 \dots a_{j+1}(K_1)$, on a

$$[z_n, \gamma_{n+1}(z_n)] = \bigcup_{j=0}^{\ell_n - 1} [y_j, y_{j+1}].$$

On obtient ainsi

$$\sum_{j=0}^{\ell_n-1} d_1(y_j, y_{j+1}) - 2d_1(z_{n_1}, 0_1) \leq d_1(0_1, \gamma_{n_1} 0_1) \leq 2d_1(z_{n_1}, 0_1) + \sum_{j=0}^{\ell_n-1} d_1(y_j, y_{j+1}).$$

Notons $(\partial\mathcal{D}_i)_{i \leq i \leq 2k}$ les côtés deux à deux disjoints de $\mathcal{D}$ et posons $A_1 =$ diamètre K_1,

$$B_1 = \operatorname*{Inf}_{\substack{x \in \partial\mathcal{D}_i \cap K_1 \\ y \in \partial\mathcal{D}_j \cap K_1 \\ i \neq j}} d_1(x, y), \quad C_1 = \operatorname*{Sup}_{k \in K} d_1(0_1, k),$$

on a $\ell_n B_1 - 2C_1 \leq d_1(0_1, \gamma_{n_1} 0_1) \leq 2C_1 + \ell_n \times A_1$.

La même inégalité (en changeant les constantes) a lieu si on remplace γ_{n_1} par $\rho(\gamma_{n_1})$. On en déduit l'encadrement suivant

$$\frac{\ell_n B_2 - 2C_2}{\ell_n A_1 + 2C_1} \leq \frac{d_2(0_2, \rho(\gamma_{n_1})(0_2))}{d_1(0_1, \gamma_{n_1}(0_1))} \leq \frac{\ell_n A_2 - 2C_2}{\ell_n B_1 - 2C_1}$$

ce qui montre que $P(\Gamma)$ est inclus dans $[\frac{B_2}{A_1}, \frac{A_2}{B_1}]$ et donc que $L(\Gamma) \cap X_{\text{Sing}}(\infty) = \phi$.

2) Soit $p \in P(\Gamma)$, il existe $(\gamma_{n_1})_{n \geq 1}$ tel que

$$p = \lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(0_2, \rho(\gamma_{n_1})(0_2))}{d_1(0_1, \gamma_{n_1}(0_1))}$$

Notons $\gamma_{n_2} = \rho(\gamma_{n_1})$ et choisissons pour $i = 1,2$ un point z_{n_i} sur l'axe de γ_{n_i} appartenant au compact K_i introduit en 1) on a

$$\ell(\gamma_{n_i}) - 2d(0_i, z_{n_i}) \leq d_i(0_i, \gamma_{n_i}, 0_i) \leq 2d(0_i, z_{n_i}) + \ell(\gamma_{n_i})$$

puisque $d(0_i, z_{n_i})$ est uniformément borné on obtient $p = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(\gamma_{n_2})}{\ell(\gamma_{n_1})}$ et donc $P(\Gamma) \subset I = \overline{\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} / \gamma_1 \in \Gamma_1 \}}$.

Soit $q \in I$, si $q = \frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)}$ alors $q \in P(\Gamma)$ car $(\gamma_1, \rho(\gamma_1))^n(0)$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers $(\gamma_1^+, \rho(\gamma_1)^+, q)$. Si maintenant $q = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(\rho(\gamma_{n_1}))}{\ell(\gamma_{n_1})}$ alors $q \in P(\Gamma)$ car $L(\Gamma)$ est fermé.

En conclusion $P(\Gamma) = I$. Montrons à présent que I est un intervalle, pour cela il suffit de montrer que si $r = \frac{\ell(r_2)}{\ell(r_1)}$ et $s = \frac{\ell(s_2)}{\ell(s_1)}$ avec $r_1, s_1 \in \Gamma_1$, et $r_2 = \rho(r_1)$, $s_2 = \rho(s_1)$ alors l'intervalle $[r, s]$ est inclus dans I. On suppose $r \neq s$, ceci entraîne que pour i=1,2 r_i et s_i ne fixent aucun point en commun et donc que pour N assez grand les groupes $< r_i^N, s_i^N >$ sont des groupes de Schottky. D'après le lemme 2.9 on a pour $n > 0$ et $m > 0$ $(\ell(r_1^{Nn}, s_1^{Nm}), \ell(r_2^{Nn}, s_2^{Nm})) = n(\ell(r_1^N), \ell(r_2^N)) + m(\ell(s_1^N), \ell(s_2^N)) + U_{nm}$ avec $\| U_{nm} \|$ uniformément bornée.

Notons $U_r = (\ell(r_1^N), \ell(r_2^N))$, $U_s = (\ell(s_1^N), \ell(s_2^N))$ et A une borne uniforme de $\| U_{nm} \|$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ il existe $\gamma_{1nm} \in \Gamma_1$ tel que le point de coordonnées $(\ell(\gamma_{1nm}), \ell(\rho(\gamma_{1nm}))$ appartienne au disque de rayon A et de centre $nU_r + mU_s$. Ceci montre que $\{ \frac{\ell(\rho(\gamma_{1nm}))}{\ell(\gamma_{1nm})} / n, m \in \mathbb{N} \}$ est dense dans $[r, s]$. (Cet argument est utilisé dans [Be]). □

Soit $x \in L(\Gamma_1)$, on rappelle qu'il existe une unique suite infinie de mots réduits $(a_1 \dots a_n)_{n\geq 1}$ en les générateurs de C_1 telle que $x = \lim_{n\to+\infty} a_1 \dots a_n(0_1)$, on note φ *l'application de Nielsen* définie par

$$L(\Gamma_1) \xrightarrow{\varphi} L(\Gamma_2)$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \rho(a_1) \dots \rho(a_n)(0_2).$$

Par construction de φ on a $\varphi \circ \gamma_1 = \rho(\gamma_1) \circ \varphi$ pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$. De plus φ est un homéomorphisme (propriété 2.8).

On rappelle que $\mathcal{F}(\Gamma)$ représente la projection de $L(\Gamma) \cap X_{\mathrm{reg}}(\infty)$ sur $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$.

3.2. Proposition A 3) 4)

3) $\mathscr{F}(\Gamma) = \{(x_1, \varphi(x_1)) \,/\, x_1 \in L(\Gamma_1)\}$

4) $L(\Gamma) = \mathscr{F}(\Gamma) \times P(\Gamma)$.

Démonstration.

3) Soient $(x_1, x_2) \in \mathscr{F}(\Gamma)$, il existe $(\gamma_{n_1}, \rho(\gamma_{n_1}))_{n\geq 1}$ dans Γ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{n_1}(0_1) = x_1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\gamma_{n_1})(0_2) = x_2$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $\gamma_{n_1} = a_1 \dots a_{\ell_n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = +\infty$ donc $x_2 = \varphi(x_1)$.

4) Soient $(x_1, \varphi((x_1), p) \in \mathscr{F}(\Gamma) \times P(\Gamma)$, il existe $(\gamma_{n1})_{n\geq 1}$ dans Γ_1 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell(\rho(\gamma_{n_1}))}{\rho(\gamma_{n_1})} = p$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_{n1}(0_1) = y_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(\gamma_{n1})(0_2) = \varphi(y_1)$, ainsi $(y_1, \varphi(y_1), p) \in L(\Gamma)$. L'ensemble $L(\Gamma_1)$ étant le plus petit fermé Γ-invariant de $X_1(\infty)$, il existe $(g_{n1})_{n\geq 1}$ dans Γ_1 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_{n1}(y_1) = x_1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(g_{n1})(\varphi(y_1)) = \varphi(x_1)$. Comme $(g_1, g_2)(x_1, \varphi(x_1), p) = (g_1(x_1), g_2(\varphi(x_1), p)$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} (g_{n1}, \rho(g_{n1}))(y_1, \varphi(y_1), p) = (x_1, \varphi(x_1), p)$ et donc $(x_1, \varphi(x_1), p) \in L(\Gamma)$. □

3.3. Remarque. *$\mathscr{F}(\Gamma)$ est le plus petit fermé Γ-invariant de $X_1(\infty) \times X_2(\infty)$.*

Cette remarque découle du fait suivant : soient $x_i \in X_i(\infty)$ et $\gamma_{i\ell} = a_{i1} \dots a_{i\ell}$ une suite de mots réduits emboités de Γ_i, quitte à extraire une sous-suite $\gamma_{i\ell}(x_i)$ converge vers le point de $L(\Gamma_i)$ codé dans l'espace symbolique Σ_i par la suite $a_{i1}\, a_{i2} \dots a_{in} \dots$.

3.4. Proposition B. *Soit G un sous-groupe de $I(X_1) \times I(X_2)$ agissant proprement discontinûment et librement sur $X_1 \times X_2$. Notons G_i sa projection sur $I(X_i)$. Si $L(G) \cap X_{\mathrm{sing}}(\infty) = \phi$ alors il existe un isomorphisme $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ préservant le type des isométries, G_i agit proprement discontinûment et librement sur X_i et $G = \{(g_1, \rho(g_1)) \,/\, g_1 \in G_1\}$.*

Démonstration. Supposons que G_1 n'agisse pas proprement discontinûment sur X, alors il existe une suite $(g_{n1})_{n\geq 1}$ de G_1 telle que $\lim\limits_{n_1\to\infty} g_{n1}(0_1) = 0_1$. Comme G agit proprement discontinûment sur X, $\lim\limits_{n_2\to+\infty} d_2(0_2, g_{n_2}(0_2)) = +\infty$ et donc $(g_{n_1}(0_1), g_{n_2}(0_2))$ converge vers un point de $X_{\mathrm{sing}}(\infty) \cap L(\Gamma)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Le même raisonnement s'applique à G_2. On en déduit que G_i agit proprement discontinûment sur X_i. Supposons à présent que G contienne un élément $g = (\mathrm{Id}, g_2)$ avec $g_2 \neq \mathrm{Id}$, comme l'action de G est libre, g_2 n'est pas elliptique donc $\lim_{n\to+\infty} g^n(0)$ appartient à $X_{\mathrm{sing}}(\infty) \cap L(\Gamma)$, ce qui est impossible ainsi la projection $G \xrightarrow{p_1} G_1$ est un isomorphisme, idem pour p_2. On note $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ l'isomorphisme défini par $\rho(g_1) = p_2(p_1^{-1}(g_1))$, cet isomorphisme conserve le type des isométries (i.e. ρ (hyperbolique) est hyperbolique, ρ(parabolique) est parabolique) car si g_1 et g_2 ne sont pas du même type alors d'après la propriété 1.1 $\lim_{n\to\infty} \frac{d_2(0_2, g_2^n(0_2))}{d_1(0_1, g_1^n(0_1))} \in \{0,+\infty\}$ et donc $L(\Gamma) \cap X_{\mathrm{sing}}(\infty) \neq \phi$. Par construction de ρ on a $G = \{ (g_1, \rho(g_1)) \,/\, g_1 \in G_1 \}$. □

4. Remarques sur $P(\Gamma)$

On rappelle que $X = X_1 \times X_2$ est le produit de deux variétés d'Hadamard pincées et que Γ est un groupe d'isométries construit à partir de deux groupes de Schottky Γ_1, Γ_2, on note δ_Γ l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(0,\gamma(0))}$, par un procédé du type "Patterson-Sullivan" [A] [Bu][C], on peut construire sur $X(\infty)$ une famille de mesures $(\mu_x)_{x\in X}$ vérifiant $\frac{d\mu_x}{d\mu_0}(z) = e^{-\delta_\Gamma h_z(x)}$ où $h_z(x)$ désigne la fonction de Busemann normalisée par $h_z(0) = 0$. Le support de μ_x est inclus dans $L(\Gamma)$. Si X_1 et X_2 sont des espaces symétriques de rang 1 et si Γ est Zariski dense, d'après [A], [Bu] il existe $p_\Gamma \in P(\Gamma)$ tel que supp $\mu_x = \mathcal{F}(\Gamma) \times \{p_\Gamma\}$ pour tout $x \in X$, dans le cas particulier où le volume de X/Γ est fini, $p_\Gamma = 1$. Nous construisons ici des exemples de groupes Γ pour lesquels $P(\Gamma)$ ne contient pas 1 (ces groupes sont bien sûr de covolume infini).

4.1. Remarque. *Il existe des groupes* $\Gamma = \{(\gamma_1, \rho(\gamma_1))\ \gamma_1 \in \Gamma_1\}$ *tels que* $1 \notin P(\Gamma)$.

En effet, revenons à la démonstration de la proposition 3.1 partie A 1), dans cette démonstration apparaît l'inclusion suivante : $P(\Gamma) \subset [\frac{B_2}{A_1}, \frac{A_2}{B_1}]$. Fixons $\Gamma_1 = <g_1, g_2>$, on peut modifier $\Gamma_2 = <h_1, h_2>$ par exemple en prenant $V(h_1^{\pm 1})$ et $V(h_2^{\pm 1})$ de toute petite taille pour que $B_2 > A_1$, on obtient alors $P(\Gamma) \subset]1,+\infty[$.

D'autres exemples ayant cette propriété peuvent être construits en prenant $h_1 = g_1^N$ et $h_2 = g_2^N$. Soit $\gamma_1 = a_1^{n_1}...a_p^{n_p}$ d'après le lemme 2.9 on a :

$$\frac{\ell(\rho(\gamma_1))}{\ell(\gamma_1)} = \frac{N \sum_{i=1}^{p} n_i \ell(a_i) + c(\rho(\gamma_1)) \times p}{\sum_{i=1}^{p} n_i \ell(a_i) + c(\gamma_1) \times p}$$

où $|c(\gamma_1)|$ et $|c(\rho(\gamma_1))|$ sont uniformément bornées par un réel $A > 0$.
Notons $\ell = \min\{\ell(g_1), \ell(g_2)\}$, il suffit de choisir N tel que $(N-1)\ell \geq 2A$.
Signalons également l'existence dans l'espace de Teichmüller d'un pantalon d'un chemin de pantalons hyperboliques $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tels que si $t > t'$ la longueur des géodésiques fermées de P_t soit plus grande que la longueur des géodésiques fermées correspondantes sur $P_{t'}$ [S].

Pour i=1,2 on note δ_{Γ_i} l'exposant critique de la série de Poincaré associée à Γ_i, cet exposant coïncide avec celui de la série $\sum_{\gamma_i \in \Gamma_i} e^{-s\ell(\gamma_i)}$. Si $P(\Gamma) = [a, b]$ alors

$$\sum_{\gamma_1 \in \Gamma_1} e^{-s\ell(\gamma_1)} \geq \sum_{\gamma_2 \in \Gamma_2} e^{-s/a\, \ell(\gamma_2)} \quad \text{et} \quad \sum_{\gamma_2 \in \Gamma_2} e^{-s\ell(\gamma_2)} \geq \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_1} e^{-s\ell(\gamma_1) b}.$$

On en déduit la

4.2. Remarque. $\delta_{\Gamma_1} / \delta_{\Gamma_2} \in P(\Gamma)$.

Références

[A] Albuquerque P. : *Patterson-Sullivan Measure in Higher rank symmetric spaces.* CRAS (1997) Tome 324 série I n°4.

[Be] Benoist Y. : *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires* (preprint 96).

[Bo] Bourdon M. : *Structures conformes au bord et flot géodésique d'un* CAT(−1)*-espace.* L'Enseignement Mathématique, t. 41, (1995), 63-102.

[Bu] Burger M. : *Intersection, Manhattan curve, and Patterson-Sullivan theory in rank* 2. International Mathematics research notices (1993) n°7, 217-225.

[C] Coornaert M. : *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov.* Pacific Journal of Mathematics vol. 159 n°2 (1993) pp. 241-270.

[DP1] Dal'bo F., Peigné M. : *Groupes du Ping-Pong et géodésiques fermées en courbure* -1. Annales de l'Institut Fourier, 46, n°3 (1996).

[DP2] Dal'bo F., Peigné M. : *Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting.* J. reine angew. Math. (à paraître).

[G] Guivarc'h Y. : *Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire.* Ergod. th. and Dynam. Sys. (1990), 10, 483-512.

[G-H] Ghys E. et De La Harpe P. : *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov.* Progress in Mathematics. Vol. 83 Birkahauser (1990).

[K] Kaimanovitch V. : *Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces.* J. reine angew. Math. 455 (1994), 57-103.

[[S] Schmutz P. : *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length.* Geom. Funct. Anal. 3 (1993) n°6, 564-631.

F. Dal'bo
Institut Mathématiques de Rennes
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
dalbo@univ-rennes1.fr