Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Ahmad El Soufi
Saïd Ilias
Antonio Ros

Sur la première valeur propre des tores

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 17-23
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__17_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (17–23)

SUR LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DES TORES

Ahmad EL SOUFI, Saïd ILIAS & Antonio ROS

1. Introduction

Soit Σ une surface orientable compacte sans bord, de genre γ. Pour toute métrique riemannienne g sur Σ, on désigne par $\lambda_1(g)$ la première valeur propre non nulle de l'opérateur laplacien défini sur $C^\infty(\Sigma)$ à partir de g.

Notons $C(g)$ l'ensemble des métriques d'aire 1, conformément équivalentes à g (la normalisation de l'aire est justifiée par la non invariance du λ_1 sous l'effet des homothéties). Il est bien connu (cf. [5] et [8]) que la fonctionnelle λ_1 est bornée sur $C(g)$ et que l'on a :

$$\operatorname*{Inf}_{g' \in C(g)} \lambda_1(g') = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{g' \in C(g)} \lambda_1(g') \leq 8\pi \left[\frac{\gamma+3}{2}\right],$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le problème qui se pose naturellement est celui de déterminer la borne supérieure de λ_1 sur $C(g)$, de savoir si cette borne est atteinte et de trouver, éventuellement les métriques extrêmales.

Lorsque Σ est de genre zéro, i.e. Σ est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^2$, toutes les métriques sont conformément équivalentes à la métrique canonique et la réponse à ce problème est donnée dans ce cas par un résultat de Hersch ([4]) :

$$\operatorname*{Sup}_{g \in C(g_0)} \lambda_1(g) = 8\pi,$$

Classification math. : 58C40, 53A30, 58G25.

où g_0 est la métrique canonique d'aire 1. De plus, ce supremum est atteint pour la seule métrique g_0 (à une isométrie près).

L'objet principal du présent article est d'envisager le cas où la surface Σ est de genre 1, i.e. Σ est homéomorphe au tore $\mathbf{T}$. Li et Yau ([5]) ont obtenu, pour toute surface Σ, une majoration du λ_1 en fonction d'un invariant conforme dit "aire conforme" (cf [3] pour une version en toute dimension de ce résultat). Cette majoration leur permet en particulier de résoudre le problème ci-dessus pour deux classes conformes de métriques sur le tore : celle de la métrique plate de Clifford et celle de la métrique plate équilatérale. Hormis ces deux classes conformes, on ne connaît pas de cas où cette majoration serait optimale. Dans [6], Montiel et Ros calculent l'aire conforme pour une famille à un paramètre de classes conformes de métriques sur $\mathbf{T}$, rendant ainsi explicite la majoration de Li et Yau pour ces dernières (l'aire conforme n'avait en fait été calculé par Li et Yau que pour les deux classes particulières sus-citées).

Dans le présent article, nous allons donner une majoration explicite du λ_1 sur chacune des classes conformes du tore (Théorème2.1). Cette majoration améliore celles obtenues à partir de l'aire conforme pour toute une famille de classes conformes (remarque 2.1).

Le principal avantage de cette majoration est qu'elle est optimale pour une famille à un paramètre de classes conformes de métriques sur $\mathbf{T}$ (contenant en particulier celles de la métrique plate de Clifford et de la métrique plate équilatérale) permettant ainsi de résoudre le problème ci-dessus pour cette famille. En effet, nous montrons (Corollaire2.1) que, sur chacune de classes conformes de cette famille, le supremum du λ_1 est exactement atteint pour la métrique plate qui représente cette classe.

2. Préliminaires et énoncé des résultats

Soit g une métrique riemannienne sur le tore $\mathbf{T}$. La variété riemannienne $(\mathbf{T}, g)$ est conformément difféomorphe à un tore plat $(\mathbf{R}^2/\Gamma, g_\Gamma)$, où Γ est un réseau de $\mathbf{R}^2$ et où g_Γ est la métrique plate induite sur $\mathbf{R}^2/\Gamma$ par la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^2$. Or (cf. [2]) tout tore plat est en fait homothétique à un tore plat $\mathbf{T}_{a,b} = (\mathbf{R}^2/\Gamma(a,b), g_{a,b})$ où $\Gamma(a,b) = \mathbf{Z}(1,0) \oplus \mathbf{Z}(a,b)$ est le réseau engendré par $\{(1,0),(a,b)\}$ et où $(a,b) \in H = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / 0 \le x \le \frac{1}{2}, y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \ge 1\right\}$. L'ensemble H représente en fait l'espace des modules des structures conformes sur le tore $\mathbf{T}$. Comme l'aire de g est égale à b, l'espace que nous noterons $M_0(\mathbf{T})$, des métriques plates d'aire 1 sur $\mathbf{T}$ est constitué des métriques isométriques aux métriques $\frac{1}{b} g_{a,b}$, où $(a,b) \in H$. Deux de ces métriques plates sont connues pour leurs propriétés particulières : la métrique $g_{cl} = g_{0,1}$ dite de *Clifford* et la métrique $g_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\, g_{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}}$ dite *équilatérale*.

Le spectre d'un tore plat $(\mathbf{R}^2/\Gamma,\ g_\Gamma)$ est déterminé par le réseau dual Γ^* de Γ, défini par : $\Gamma^* = \{X \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q.} \forall Y \in \Gamma, < X, Y > \in \mathbf{Z}\}$. En effet, $\lambda \in \mathbf{R}$ est valeur propre du laplacien de g_Γ si et seulement si il existe un vecteur $\tau \in \Gamma^*$ tel que $|\tau|^2 = \lambda/4\pi^2$. La multiplicité de λ est donnée par le nombre d'éléments distincts $\tau \in \Gamma^*$, vérifiant cette dernière égalité. L'espace propre associé à λ est engendré par les fonctions induites sur $\mathbf{R}^2/\Gamma$ par les fonctions :

$$f_\tau(X) = \cos 2\pi < X, \tau > \text{ et } g_\tau(X) = \sin 2\pi < X, \tau >,$$

où $\tau \in \Gamma^*$ et $|\tau|^2 = \lambda/4\pi^2$. Ainsi, pour le tore plat $\mathbf{T}_{a,b}$, où $(a,b) \in H$, le réseau dual de $\Gamma(a,b)$engendré par $\{(1,-a/b),(0,1/b)\}$. Par suite, le spectre de $g_{a,b}$ est constitué des valeurs propres:

$$\lambda_{pq}^{a,b} = 4\pi^2\left(q^2 + ((p-qa)/b)^2\right),$$

où $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, et la famille de fonctions propres ci-dessus est donnée par :

$$f_{pq}^{a,b}(x,y) = \cos\, 2\pi < (q,(p-qa)/b)\ ,\ (x,y) >,$$

et

$$g_{pq}^{a,b}(x,y) = \sin\, 2\pi < (q,(p-qa)/b)\ ,\ (x,y) >.$$

Nous pouvons ainsi observer que la plus petite valeur propre non nulle de $\mathbf{T}_{a,b}$ est $\lambda_1(g_{a,b}) = \frac{4\pi^2}{b^2}$. Par suite on a, pour tout $g \in M_0(\mathbf{T})$,

$$\lambda_1(g) \le \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} = \lambda_1(g_e),$$

l'égalité n'ayant lieu que si g est isométrique à g_e.

Ayant observé ce fait, Berger ([1]) s'était alors posé la question de savoir si la métrique g_e réalisait le maximum du λ_1 sur l'espace de toutes les métriques d'aire 1 sur $\mathbf{T}$. La réponse, de nature affirmative, à cette question vient d'être obtenue par Nadirashvili ([7]).

Le résultat principal du présent article est le :

Théorème 2.1. *Pour tout $(a,b) \in H$ et toute métrique g sur $\mathbf{T}$ conformément équivalente à $g_{a,b}$, on a :*

$$\lambda_1(g)\, \mathrm{A}(g) \le \frac{3\pi^2}{2b}\left(a^2 + b^2 + \frac{5}{3}\right).$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$ et si g est homothétique à $g_{a,b}$.

Remarque 2.1. *(i), pour tout* $(a,b) \in H$ t.q. $a^2 + \left(b - 8/3\sqrt{3}\right)^2 < 19/27$ *notre majorant est strictement inférieur à* $8\pi^2/\sqrt{3}$ *(qui est le majorant universel).*

(ii) Compte tenu du calcul de l'aire conforme des métriques $g_{0,b}$, *pour* $b \le \sqrt{5/3}$, *fait par Montiel et Ros ([6]) on peut voir que notre résultat améliore la majoration de Li et Yau par l'aire conforme pour les classes conformes correspondantes.*

Une conséquence immédiate du théorème précédent est la solution du problème posé en introduction pour les classes conformes des métriques $g_{a,b}$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$.

Corollaire 2.1. *Si* $(a,b) \in H$ *est tel que* $a^2 + b^2 = 1$, *alors, pour toute métrique* g *sur* **T** *conformément équivalente à* $g_{a,b}$, *on a :*

$$(*) \qquad \lambda_1(g)\, A(g) \;\le\; \lambda_1(g_{a,b})\, \mathrm{A}(g_{a,b}) = \frac{4\pi^2}{b}.$$

Autrement dit, on a :

$$\sup_{g \in C\left(\frac{1}{b} g_{a,b}\right)} \lambda_1(g) = \lambda_1\left(\frac{1}{b} g_{a,b}\right) = \frac{4\pi^2}{b}.$$

De plus, l'égalité dans (*) a lieu si et seulement si g *est homothétique à* $g_{a,b}$.

Il serait intéressant de déterminer toutes les métriques plates du tore qui réalisent le maximum du λ_1 (à aire fixée) sur leurs classes conformes respectives.

3. Preuve des résultats

On désigne par $\mathbf{S}^n$ la sphère unité, munie de sa métrique canonique notée *can*, et par $G(n)$ son groupe conforme. Pour toute application $\varphi : (\mathbf{T}, g) \to \mathbf{S}^n$, on notera $E(\varphi)$ son énergie définie par $E(\varphi) = \int_{\mathbf{T}} |d\varphi|^2 v_g$, où $|d\varphi|$ est la norme d'Hilbert-Schmidt de $d\varphi$ par rapport aux métriques g et *can* et où v_g est l'élément de volume riemannien associé à g. Il est important de noter que $E(\varphi)$ ne change pas lorsqu'on remplace g par une métrique qui lui est conforme.

La remarque fondamentale de cette preuve est la proposition suivante dans laquelle nous allons exhiber des applications dont le rapport d'énergie est invariant sous l'action du groupe conforme de la sphère.

Proposition 3.1. *Soient $(A_i)_{1\le i\le n}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} A_i^2 = 1$ et soient $(p_i, q_i)_{1\le i\le n}$ des couples d'entiers. Pour tout $(a,b)\in H$, on considère l'application $\psi_{a,b}: \mathbf{T}_{a,b} \to \mathbf{S}^{2n-1}$ donnée par $\psi_{a,b} = \left(A_1 f^{a,b}_{p_1q_1}, A_1 g^{a,b}_{p_1q_1}, \dots, A_n f^{a,b}_{p_nq_n}, A_n g^{a,b}_{p_nq_n}\right)$. Alors, pour tout $\gamma \in G(2n-1)$, tout $(a,b)\in H$et tout $(a',b')\in H$, on a*

$$E(\gamma o \psi_{a,b}) / E(\gamma o \psi_{a',b'}) = E(\psi_{a,b}) / E(\psi_{a',b'}).$$

Autrement dit, l'application $\gamma \to E(\gamma o \psi_{a,b}) / E(\gamma o \psi_{a',b'})$ est constante sur $G(2n-1)$.

Preuve. Notons d'abord que, $\forall (p,q)\in \mathbf{Z}^2$, $\left(f^{a,b}_{pq}\right)^2 + \left(g^{a,b}_{pq}\right)^2 = 1$. Par suite, on a $|\psi_{a,b}|^2 = \sum_i A_i^2 = 1$ et l'application $\psi_{a,b}$ prend donc bien ses valeurs dans $\mathbf{S}^{2n-1}$.
Pour tout $\gamma \in G(2n-1)$, on a :

$$E(\gamma o \psi_{a,b}) = \int_{\mathbf{T}_{a,b}} |d(\gamma o \psi_{a,b})|^2 v_{g_{a,b}} = \int_{\mathbf{T}_{a,b}} |d\gamma|^2 o \psi_{a,b} |d\psi_{a,b}|^2 v_{g_{a,b}}.$$

Or, les applications $\psi_{a,b}$ ont une densité d'énergie $|d\psi_{a,b}|^2$ constante. En effet:

$$\begin{aligned}
|d\psi_{a,b}|^2 &= \sum_i A_i^2 \left(|df^{a,b}_{p_iq_i}|^2 + |dg^{a,b}_{p_iq_i}|^2 \right) \\
&= \sum_i A_i^2 \left\{ -\frac{1}{2}\Delta\left(\left(f^{a,b}_{p_iq_i}\right)^2 \left(g^{a,b}_{p_iq_i}\right)^2 \right) + f^{a,b}_{p_iq_i}\Delta f^{a,b}_{p_iq_i} + g^{a,b}_{p_iq_i}\Delta g^{a,b}_{p_iq_i} \right\} \\
&= \sum_i A_i^2 \lambda^{a,b}_{p_iq_i} \left(\left(f^{a,b}_{p_iq_i}\right)^2 + \left(g^{a,b}_{p_iq_i}\right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \lambda^{a,b}_{p_iq_i},
\end{aligned}$$

où Δ est le laplacien de $\mathbf{T}_{a,b}$. D'où :

$$E(\gamma o \psi_{a,b}) = |d\psi_{a,b}|^2 \int_{\mathbf{T}_{a,b}} |d\gamma|^2 o \psi_{a,b} v_{g_{a,b}}.$$

L'application linéaire $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ telle que $\varphi(x,y) = \left(x + \frac{a'-a}{b}y,\ \frac{b'}{b}y\right)$ induit un difféomorphisme ϕ de $\mathbf{T}_{a,b}$ sur $\mathbf{T}_{a',b'}$. Ce difféomorphisme envoie les fonctions $f^{a',b'}_{pq}$ et $g^{a',b'}_{pq}$ respectivement sur $f^{a,b}_{pq}$ et $g^{a,b}_{pq}$. En particulier, nous avons : $\psi_{a',b'} \,o\, \phi = \psi_{a,b}$. Ainsi, pour tout $\gamma \in G(2n-1)$, on a :

$$\begin{aligned}
E(\gamma o \psi_{a',b'}) &= |d\psi_{a',b'}|^2 \int_{\mathbf{T}_{a',b'}} |d\gamma|^2 o \psi_{a',b'} v_{g_{a',b'}} = |d\psi_{a',b'}|^2 \int_{\mathbf{T}_{a,b}} |d\gamma|^2 o \psi_{a',b'} o \phi |Jac\phi| v_{g_{a,b}} \\
&= |d\psi_{a',b'}|^2 \frac{b'}{b} \int_{\mathbf{T}_{a,b}} |d\gamma|^2 o \psi_{a,b} v_{g_{a,b}} = E(\gamma o \psi_{a,b}) E(\psi_{a',b'}) / E(\psi_{a,b}).
\end{aligned}$$

■

Une conséquence immédiate de cette proposition est le :

Corollaire 3.2. *Avec les notations de la proposition précédente, s'il existe* $(a_o, b_o) \in H$, *tel que* $E(\psi_{a_o,b_o}) = \underset{\gamma \in G(2n-1)}{Sup} E(\gamma o \psi_{a_o,b_o})$, *alors, pour tout* $(a,b) \in H$, *on a* $E(\psi_{a,b}) = \underset{\gamma \in G(2n-1)}{Sup} E(\gamma o \psi_{a,b})$.

Preuve du théorème. Dans [6], Montiel et Ros ont montré que si $1 \le b \le \sqrt{5/3}$, alors l'application $\psi_{o,b} : \mathbf{T}_{o,b} \to \mathbf{S}^3$, donnée par $\psi_{o,b} = \frac{1}{(1+b^2)^{1/2}}(bf_{10}^{o,b}, bg_{10}^{o,b}, f_{01}^{0,b}, g_{01}^{o,b})$, vérifie :

$$E(\psi_{o,b}) = \underset{\gamma \in G(3)}{Sup} E(\gamma o \psi_{o,b}).$$

De plus, ils montrent que ce supremum n'est atteint que pour les γ qui sont isométriques.

Pour la suite de la preuve, nous considérons l'application $\psi_{a,b} : \mathbf{T}_{a,b} \to \mathbf{S}^3$ donnée par $\psi_{a,b} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} f_{10}^{a,b}, \sqrt{\frac{5}{3}} g_{10}^{a,b}, f_{01}^{a,b}, g_{01}^{a,b}\right)$ (i.e. $\psi_{a,b}$ est l'application de la proposition avec $A_1 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $(p_1, q_1) = (1,0)$ et $(p_{21}, q_2) = (0,1)$). Comme

$$E(\psi_{0,\sqrt{5/3}}) = \underset{\gamma \in G(3)}{Sup} E(\gamma o \psi_{0,\sqrt{5/3}}),$$

on a donc, par le corollaire précédent, pour tout $(a,b) \in H$:

$$E(\psi_{a,b}) = \underset{\gamma \in G(3)}{Sup} E(\gamma o \psi_{a,b}).$$

Soit g une métrique conformément équivalente à $g_{a,b}$. Par un argument standard (cf[5]), il existe $\gamma \in G(3)$ tel que les fonctions composantes de $\gamma o \psi_{a,b}$ soient d'intégrale nulle sur $(\mathbf{T}, g)$. Le principe du Min-Max appliquée à chacune des composantes de $\gamma o \psi_{a,b}$ donne après sommation:

$$\lambda_1(g)\, A(g) \le E(\gamma o \psi_{a,b}) \le E(\psi_{a,b}) = \frac{3\pi^2}{2b}\left(a^2 + b^2 + \frac{5}{3}\right).$$

D'où la majoration.

Supposons maintenant qu'on ait l'égalité. Nous en déduisons d'une part que les composantes de $\gamma o \psi_{a,b}$ sont des premières fonctions propres de g et, d'autre part, par la proposition précédente, que $E(\gamma o \psi_{0,b}) = E(\psi_{0,b})$ et donc que γ est une isométrie de $\mathbf{S}^3$. Par suite, les composantes de l'application $\psi_{a,b}$ elle-même sont des premières fonctions propres de g. Or ces fonctions sont aussi des premières fonctions propres de $g_{a,b}$. Il en découle immédiatement que g et $g_{a,b}$ sont homothétiques. Mais comme $\lambda_1(g_{a,b})\, A(g_{a,b}) = \frac{4\pi^2}{b}$, l'égalité ne peut en fait avoir lieu que si $a^2 + b^2 = 1$. ■

Bibliographie

1. **BERGER, M.** : Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes . Compositio. Math. **26**, 129-149 (1973).

2. **BERGER, M., GAUDUCHON, P., MAZET, E.** : Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math. Vol. **194**, Springer 1971.

3. **EL SOUFI, A. , ILIAS, S.** : Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme. Math. Ann. **275**, 257-267 (1986).

4. **HERSCH, J.** : Quatre propriétés isopérimétriques des membranes sphériques homogènes. C.R. Acad. Sci. Paris **270**, 1645-1648 (1970).

5. **LI, P., YAU, S.T.** : A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. Invent. Math. **69**, 269-291 (1982).

6. **MONTIEL, S., ROS, A.** : Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area. Invent. Math. **83**, 153-166 (1986).

7. **NADIRASHVILI, N.** : Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces. Geom. and Funct. Anal., **6**, 877-897 (1996).

8. **YANG, P., YAU, S.T.** : Eigenvalues of the laplacian of compact riemann surfaces and minimal submanifolds. Ann. Sc. Sup. Pisa **7**, 55-63 (1980).

A. El Soufi et S. Ilias
Laboratoire de Mathématiques
et Physique théorique
Université de Tours
Parc de Grandmont
37200 Tours (France)

A. Ros
Dep. Geometria y Topologia
Univ. Granada
18701 Granada (Espagne)