Alain Dufresnoy

Sur le problème de Bennequin : un contre-exemple (d'après Alexander)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 13-15

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__13_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (13–15)

SUR LE PROBLÈME DE BENNEQUIN : UN CONTRE-EXEMPLE (d'après Alexander)

Alain DUFRESNOY

Le but de l'exposé est de présenter un exemple dû à H. Alexander répondant par la négative à une question due à Bennequin :

«Soit $X \subset \mathbb{C}^2$ un tore totalement réel ; existe-t-il un disque analytique continu s'appuyant sur X [autrement dit existe-t-il $f : \overline{D} \to \mathbb{C}^2$ continue, où $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, holomorphe dans D, non constante et telle que $f(\partial D) \subset X$] ?»

Nous indiquerons, d'autre part, à la fin de l'exposé le résultat obtenu par H. Alexander dans Invent. Math., 125 (1), 1996.

Un autre exemple, plus élaboré (mais que je ne connais pas) a été obtenu par J. Duval.

C'est Jean-Pierre Rosay qui m'a parlé de ces questions et seules des contraintes matérielles ont fait que ce n'est pas lui qui a fait cet exposé ici ; cet exposé lui doit beaucoup.

1. L'exemple d'Alexander

On commence par construire dans $\mathbb{C}^2$ un tore X pour lequel on saura décrire les disques analytiques continus s'appuyant sur X.

On considère dans $\mathbb{C}$ une courbe fermée C^∞ avec un point double et telle que $0 \notin \gamma$ [Autrement dit, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$, il existe $t_1, t_2 \notin \{0,1\}$ $t_1 \neq t_2$ avec $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ et qui se prolonge en une fonction C^∞ 1-périodique sur $\mathbb{R}$].

On prend alors r une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, 1-périodique,

---

Classification math. : 53C23.

telle que $r(t_1) \neq r(t_2)$ et soit

$$X = \{(z, w) \mid z = \gamma(t); |w| = r(t)\}.$$

On vérifie facilement que X est totalement réel (c'est-à-dire que le plan tangent à X n'est pas un sous espace affine $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^2$).

Parmi les disques analytiques continus s'appuyant sur X, il y a évidemment les applications $f : \overline{D} \to \mathbb{C}^2$ où la première coordonnée est constante.

Remarquons que ces «disques» rencontrent $\{w = 0\}$ sans rencontrer $\{z = 0\}$ (on utilise ici que $0 \notin \gamma$).

En fait ce sont les seuls disques analytiques continus s'appuyant sur X : si $f = (f_1, f_2)$ était un disque analytique continu tel que f_1 n'est pas constante, on montrerait facilement que $f_1(D)$ serait une des deux composantes bornées de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ (notons la A) et $f_1(\partial D) = \partial A$.

Si on remarque que l'image réciproque de ∂A par $\pi_1 : (z, w) \to z$ admet une fibre de $\pi_{1|X}$ comme rétract par déformation, $f_1(\partial D)$ serait un arc homotope à un point dans ∂A, ce qui serait en contradiction avec le fait que $f_1(D) = A$, d'après le principe de l'argument.

Remarque. — Si on permet à f d'être discontinue, ne serait-ce qu'en un point, on peut construire un disque qui ne rencontre pas $\{w = 0\}$.

On définit alors $\widetilde{X}$ l'image réciproque de X par l'application $(z_1, z_2) \overset{\Phi}{\mapsto} (z_1 \times z_2, z_2)$.

Puisque X ne rencontre pas $\{z = 0\}$, l'application est localement inversible et $\widetilde{X}$ est un tore totalement réel. De plus il n'y a pas de disque analytique (continu) qui s'appuie sur $\widetilde{X}$: si f était un tel disque $\Phi \circ f$ serait un disque analytique (continu) qui s'appuierait sur X et qui rencontrerait $\{w = 0\}$ sans rencontrer $\{z = 0\}$.

2. Les réponses positives partielles au problème de Bennequin

Tout d'abord M. Gromov a montré dans [2] que si L était une variété lagrangienne (pour une forme kählerienne sur $\mathbb{C}^n$) compacte de $\mathbb{C}^n$ il existe un disque analytique (continu) qui s'appuie sur L.

Dans [1], en reprenant des idées analogues, H. Alexander montre :

THÉORÈME. — *Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une variété totalement réelle de dimension n ; alors il existe un disque analytique presque continu qui s'appuie sur X [où $f : D \to \mathbb{C}^n$ est une application holomorphe bornée est un disque presque continu qui s'appuie sur X si f se prolonge continûment à $\overline{D} \setminus \{z_0\}$ et si $f(\partial D \setminus \{z_0\}) \subset X$.*

En fait, la démonstration de H. Alexander utilise de façon essentielle le résultat suivant dû à Smale :

THÉORÈME (Smale). — *Soit* $\Delta : H \to G$ *une application* C^∞ *entre variétés banachiques ; on suppose que* Δ *est une application Fredholm [c'est-à-dire qu'en tout point de* H, $d_\xi \Delta$ *est un opérateur de Fredholm]. On suppose de plus que* $\Delta^{-1}(0) = \{\xi_0\}$ *et* $d_{\xi_0}(\Delta)$ *est un isomorphisme. Alors si* Δ *est propre,* Δ *est surjective.*

Enfin H. Alexander remarque que le résultat de Gromov s'obtient à partir de son résultat en utilisant que le disque, presque continu construit dans son théorème, se trouve être d'aire finie lorsque la variété est lagrangienne et cette dernière condition entraîne la continuité du disque.

Références

[1] ALEXANDER H. — *Gromov's method and Bennequin's problem*, Invent. Math., **125** (1), 1996.

[2] GROMOV M. — *Pseudo holomorphic curves in symplectic geometry*, Invent. Math., **82**, 1985.

Alain DUFRESNOY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)