Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Les équations de Maxwell

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 115-125

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__115_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (115–125)

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL *

Yves COLIN DE VERDIÈRE

À la mémoire de Hubert Pesce

Dans cet exposé, on présente les équations de Maxwell dans le formalisme des formes différentielles.

Sous forme simplifiée, ces équations sont :

$$dF = 0, \; d^* F = \alpha ,$$

où $F = B + E \wedge dt$ est une 2-forme sur l'espace-temps construite à partir des *champs magnétiques* B et *électriques* E, d^* est l'adjoint formel de d pour une métrique lorentzienne fabriquée à partir des constantes électriques et magnétiques du milieu (ϵ_0 et μ_0) et α est une 1-forme calculable à partir de la densité de charge électrique et du courant.

Ces équations admettent une formulation variationnelle donnée par un *lagrangien* dont on peut aussi déduire l'invariance lorentzienne.

Le *théorème de Noether* construit une 3-forme fermée à partir de tout champ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui préserve le lagrangien. Il donne accès à des quantités conservées.

Les équations de Maxwell peuvent se lire comme des équations de Yang-Mills pour le groupe commutatif $U(1)$. On discute, en relation avec ce point de vue théorie de jauge, l'effet Bohm-Aharonov et les monopoles magnétiques.

On ne discute pas en détail les idées physiques qui ont conduit à ces équations : la reconnaissance d'une interaction électricité-magnétisme remonte au début du XIX ème siècle (Oersted, Ampère vers 1820).

La formulation théorique des équations de Maxwell dans les années 1870 a été

Classification math. : 53C05, 58A14, 78A25

* Séminaire *quantique* de l'Institut Fourier, les 18 et 25 mars 1997.

suivie de la mise en évidence expérimentale en 1887 des ondes électromagnétiques par Hertz.

Ces travaux annoncent bien sûr la relativité restreinte et même générale du début du XX ème siècle.

1. Électrostatique et magnétostatique

On considère ici des phénomènes indépendants du temps. On est dans $\mathbb{R}^3$ euclidien ou plus généralement dans une variété riemannienne orientée de dimension 3. On utilise l'opérateur $\star$ de Hodge de cette métrique (voir § 2).

Le *champ électrique* est donné par une 1-forme fermée E. La force exercée par le champ E sur une particule chargée de charge q est $F = qE$. On a :

$$dE = 0 .$$

Donc, sous quelques hypothèses topologiques, $E = -dV$.

Puis le *déplacement diélectrique* est une 2-forme D telle que :

$$dD = 4\pi\rho dx \wedge dy \wedge dz, \ D = \star \varepsilon_0 E ,$$

où ε_0 est la constante diélectrique du milieu et ρ la densité de charge électrique. On en déduit $\Delta V = \pm\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\rho$.

De même, le *champ magnétique* est une 2-forme B telle que $dB = 0$ et donc, modulo une condition topologique, $B = dA$ où A est le *potentiel magnétique.* La force agissant sur une particule de charge q et de vitesse v est donnée par $\iota(qv)B$ (une force est une 1-forme, penser au travail ou à la formulation hamiltonienne).

L'excitation magnétique H est une 1-forme donnée par

$$B = \mu_0 \star H ,$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique. Si J le courant est une 2-forme, on a la loi d'Ampère

$$dH = 4\pi J .$$

Il y a en fait une interaction découverte au début du XIXème siècle entre électricité et magnétisme.

Oersted a découvert accidentellement qu'un courant électrique fait bouger l'aiguille d'une boussole.

Ampère a découvert les formulations mathématiques de ces interactions. Si S est un morceau de surface orientée de bord γ, soit $B(t)$ un champ magnétique dépendant du temps, il crée un courant dans γ associé au potentiel $-\int_\gamma dE$ où

$$\frac{d}{dt}\int_S B = -\int_\gamma E .$$

En appliquant Stokes,

$$\int_S \frac{\partial B}{\partial t} + d_x E = 0\,,$$

qui équivaut à :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + d_x E = 0\,,$$

qui est une conséquence des équations de Maxwell.

2. Opérateur $\star$ de Hodge

Soit M une variété orientée de dimension n et g un métrique pseudo-riemannienne que l'on étend à tous les tenseurs, on définit alors un opérateur $\star$ (de Hodge) qui est un isomorphisme des k-formes différentielles sur les $(n-k)$-formes différentielles, par l'identité :

$$\alpha \wedge \beta = g(\star\alpha, \beta)\omega_0\,,$$

où ω_0 est la forme volume associée à g et à l'orientation. Plus précisément ω_0 vaut 1 sur toute base $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, $g(e_i, e_i) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant p$ et $g(e_j, e_j) = -1$, $p \leqslant j \leqslant n$.

$\star$ est une isométrie des k-formes sur les $(n-k)$-formes.

Dans le cas riemannien compact, $\star$ induit la dualité de Poincaré sur les formes harmoniques.

Dans le cas riemannien, on a $\star^2 = (-1)^{k(n-k)}$. Dans le cas de la relativité ($n = 4$), et de $k = 2$, on a : $\star^2 = -1$. Cela munit Λ^2 d'une structure complexe. C'est l'analogue du cas riemannien de dimension 2 pour les 1-formes.

Si $g = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$,

$$\star dx \wedge dy = c\,dz \wedge dt, \quad \star\, dx \wedge dt = -\frac{1}{c}dy \wedge dz\,, \cdots.$$

On peut ainsi construire l'adjoint formel de d par : $d^* = (-1)^{d(\alpha)+1} \star^{-1} d\star$.

En effet, on a :

$$\int g(d\alpha|\beta)\omega_0 = \int g(\star d\alpha|\star\beta)\omega_0 = \int d\alpha \wedge \star\beta =$$

$$(-1)^{d(\alpha)+1}\int \alpha \wedge d\star\beta = (-1)^{d(\alpha)+1}\int g(\alpha|\star^{-1} d\star\beta)\omega_0\,.$$

Contrairement à ce que l'on voit dans certaines références classiques, l'adjoint d^* de d est défini même si la variété n'est pas orientable. Il n'est alors donné que localement au moyen de l'opérateur $\star$, mais si on change d'orientation cela ne change rien, car $\star$ et donc $\star^{-1}$ sont changés en leurs opposés. On pourra donc écrire les équations de Maxwell dans un espace-temps non-orientable si on a envie !!

3. Les équations de Maxwell

On construit à partir de B et E une 2-forme dans $\mathbb{R}^4$:

$$F = B + E \wedge dt$$

et une 2-forme :

$$G = D - H \wedge dt\,.$$

On vérifie que si on prend $g = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ avec $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ alors :

$$G = -\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \star F\,.$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors en définissant la 3-forme j par :

$$j = \rho dx \wedge dy \wedge dz - J \wedge dt$$

$$dF = 0,\ d \star F = \pm 4\pi \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\, j\,.$$

On peut remplacer la 2ème équation par :

$$d^\star F = \pm 4\pi \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \star j\,.$$

Si on écrit dans le vide,

$$(d^\star d + dd^\star)F = \pm(\Delta_x - c^2 \partial_t^2)F = 0$$

cela montre que chaque composante de F satisfait l'équation des ondes avec vitesse c : les ondes électromagnétiques se propagent à une vitesse inférieure à c.

Cas où $j = 0$ *:*

Si $F(x,t)$ est une solution de $dF = 0$, $d^\star F = 0$, $\star F$ aussi, on peut donc chercher des solutions propres pour $\star$, ie telles que $\star F = iF$. L'analogue pour Yang-Mills (en riemannien) sera la notion de solution autoduale ou anti-autoduale. Pour de tels F, Maxwell se réduit à :

$$\star F = iF,\ dF = 0\,.$$

Toute solution s'écrit $\Re F$ avec un F de ce type.

Dans le cas de $\mathbb{R}^4$ lorentzien, il y a des solutions complexes particulières qui engendrent les autres par Fourier : si on cherche une onde plane de la forme :

$$F(x,t) = F_0 e^{i(kx_1 - \omega t)}\,,$$

avec $F_0 = B_0 + E_0 \wedge dt$ et $k > 0, \omega > 0$, on trouve :

$$\star F_0 = iF_0,\ (kdx_1 - \omega dt) \wedge F_0 = 0\,.$$

Cela se résoud avec :

$$kc = \omega,\ B_0 = b dx_1 \wedge (dx_3 - i dx_2),\ E_0 = cb(dx_2 - i dx_3)\ .$$

En prenant la partie réelle de F_0, on trouve l'onde électromagnétique décrite dans les livres de physique des lycées !!

Dans le cas courbe, on peut considérer la limite de l'optique géométrique (grandes fréquences) et on trouve des analogues des ondes planes associé à des sous-variétés lagrangiennes de $T^\star \mathbb{R}^4$ contenues dans $g^\star(\xi) = 0$ (dual du cône de lumière).

Maxwell voyant cela conjecture que le rayonnement lumineux est électromagnétique.

Les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz, car $\star$ ne dépend que de la métrique. La vitesse de la lumière est un absolu. Maxwell était tout près de la relativité.

4. Le lagrangien et l'invariance lorentzienne

À partir de cette section, on suppose qu'on a pris des unités telles que $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$. Il est agréable et utile de reformuler les équations de la physique comme équations d'Euler-Lagrange d'un problème variationnel : cela met en évidence les symétries du problème et surtout permet de quantifier la théorie.

Ici, on pose, pour la 1-forme $C = A - V\,dt$ telle que $dC = F$,

$$\mathscr{L}(C) = \int \frac{1}{2} g(F, F) + 4\pi C \wedge j\ .$$

On peut réécrire ce lagrangien en termes du produit scalaire global :

$$\mathscr{L}(C) = \frac{1}{2}(F|F) + 4\pi(\star C|\,j)\ .$$

On a ainsi :

$$\delta\mathscr{L} = (d\delta C|F) + 4\pi(\delta C|\,\star^{-1}\,j)\ ,$$

ou encore :

$$\delta\mathscr{L} = (\delta C|d^\star F + 4\pi\,\star^{-1}\,j)\ .$$

Les extrémales satisfont donc l'équation d'Euler-Lagrange :

$$d^\star F + 4\pi\,\star^{-1}\,j = 0\ ,$$

qui est la 2ème équation de Maxwell.

Les équations d'Euler-Lagrange de $\mathscr{L}$ donnent ainsi la seconde équation de Maxwell, alors que $F = dC$ donne la première.

Supposons $j = 0$, on a ainsi invariance lorentzienne et même invariance conforme lorentzienne ($2 = \frac{4}{2}$).

5. Théorème de Noether

Soit M_n et $X : M \to \mathbb{R}^N$ un champ vectoriel, si

$$L(x, X(x), X'(x)) = L_0(x, X(x), X'(x))\omega_0,$$

(X' est la différentielle de X, ω_0 une forme volume sur M) est une n–forme sur M_n, on considère le lagrangien $\mathscr{L}(X) = \int_M L(x, X(x), X'(x))$.

Soit ξ un champ de vecteur sur M de flot ϕ_t qui préserve L au sens

$$\varphi_t^*(L(x, X(x), X'(x))) = L(x, X_t(x), X_t'(x))$$

avec $X_t = X \circ \phi_t$.

Le théorème de Noether produit, pour chaque extrémale X, une $(n-1)$–forme fermée.

Ex. : $M = \mathbb{R}$, pour $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $L = L_0(X(x), X'(x))dx$ et $\xi = \frac{d}{dx}$, on trouve que la 0–forme $E = X'(x)\partial_v L_0(X(x), X'(x)) - L_0(X(x), X'(x))$ est fermée et donc constante. L'invariance par translation se traduit par la conservation de l'énergie.

Cette conservation se montre de la façon suivante :

$$I(t) = \int_{a-t}^{b-t} L(X_t(x), X_t'(x))dx$$

est indépendant de t comme on le voit en faisant le changement de variable $y = x + t$.

On dérive par rapport à t et on pose $\delta X(x) = \frac{d}{dt}X_t(x) = X'(x)$, on obtient :

$$I'(0) = -[L(X(x), X'(x))]_a^b + [\frac{\partial L_0(X(x), X'(x))}{\partial X'}\delta X(x)]_a^b,$$

(le terme $\int_a^b$ disparaît à cause d'Euler-Lagrange) et remplaçant δX par sa valeur :

$$L(X(a), X'(a)) - \partial_{X'} L_0(X(a), X'(a))$$

est indépendante de a.

On pose, pour une variation infinitésimale δX du champ ($\delta X : M \to \mathbb{R}^N$) :

$$\beta(\delta X) = \iota(\frac{\partial L_0}{\partial X'}(x, X(x), X'(x))\delta X)\omega_0 .$$

C'est intrinsèque : la dérivée partielle de L_0 par rapport à X' est une application linéaire de $L(T_x M, \mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}$ qui s'identifie à une application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $T_x M$, et donc, quand on l'applique à δX, on trouve un champ de vecteurs dont on fait le produit intérieur avec ω_0.

Soit

$$\omega_{X,\xi} = \beta(\mathscr{L}_\xi X) - \iota(\xi)L(x, X(x), X'(x)) \, ,$$

qui est une $(n-1)$-forme sur M.

Le théorème de Noether affirme que, si X est une extrémale pour le lagrangien L, on a $d\omega_{X,\xi} = 0$.

Preuve: on calcule la dérivée par rapport à t de $I(t) = \int_{D_{-t}} L(x, X_t, X_t'))$, avec $D_t = \varphi_t(D_0)$, $D_0 \subset M$. Cette dérivée est nulle à cause de l'invariance de L.

Elle se compose de 2 termes, la dérivée à $D_t = D_0$ fixée qui comme X est extrémale donne $\int_{\partial D_0} \beta(\mathscr{L}_\xi X)$ et la dérivée par rapport à la variation du domaine, qui en appliquant Cartan et Stokes, donne l'autre terme.

Cas de Maxwell:

si $j = 0$, on peut prendre pour ξ tout champ de vecteurs du groupe des transformations Lorentz-conforme de $\mathbb{R}^4$.

On trouve alors :

$$\omega_{F,\xi} = F \wedge \iota(\xi) \star F - \iota(\xi) F \wedge \star F \, .$$

Par exemple, si $\xi = \partial_t$,

$$\omega_{F,\xi} = (\|E\|^2 + \|B\|^2) dx \wedge dy \wedge dz - 2P \wedge dt \, ,$$

où

$$P = E \wedge \star_{\mathbb{R}^3} B$$

est une 2-forme, le vecteur de Poynting. Si on intègre ω sur des surfaces $t = cte$ cela donne la conservation de l'énergie au cours du temps.

6. Interprétation en termes de théorie de jauge

6.1. Fibrés en droites avec connexion et courbure

Soit M une variété, un fibré vectoriel E au-dessus de M est la donnée pour chaque $x \in M$ d'un espace vectoriel réel ou complexe E_x ($E = \cup E_x$) et de trivialisations locales au dessus d'ouverts U_i de X identifiant $\cup_{x \in U_i} E_x$ avec $U_i \times \mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{C}^N$) de façon que les changements de trivialisation soient linéaires sur chaque fibre et C^∞.

Les exemples de base sont les fibrés tangents et cotangents et plus généralement les produits tensoriels de tels objets et leurs sous-fibrés ; on peut aussi construire de nouveaux fibrés par images réciproques, produits tensoriels, sommes directes, quotients, *etc.*

On notera (M, E) un fibré vectoriel sur M. Une section (C^∞) s de E sur un ouvert U de M est la donnée pour chaque $x \in U$ d'un $s(x) \in E_x$ qui soit C^∞ dans chaque trivialisation qui l'identifie à une application de U_i dans $\mathbb{R}^N$.

On veut maintenant dériver une section s définie au voisinage de $x_0 \in M$ dans la direction $V \in T_{x_0}M$. On a besoin d'une information supplémentaire sinon la dérivée directionnelle va dépendre de la trivialisation, une telle donnée s'appelle une *dérivée covariante* ou *connexion.*

On note ∇ une telle connexion et $\nabla_V s(x_0) \in E_{x_0}$ la dérivée de s en x_0 dans la direction V.

Si $E = M \times \mathbb{R}^N$, on a la connexion triviale $\nabla_0 = d$ définie par $(\nabla_0)_V s = s'(x_0)(V)$.

On demande que $\nabla_V s$ soit linéaire en V et en s et vérifie :

$$\nabla_V(fs)(x) = f(x)\nabla_V s(x) + f'(x)(V)s(x) .$$

Soit $U \times \mathbb{R}^N$ une trivialisation de E au-dessus de U et soit $(x_1, \cdots, x_n)$ des coordonnées locales dans U. Il suffit pour se donner ∇ de se donner les $\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$.

Les axiomes nous prédisent que

$$\nabla_i s = \frac{\partial s}{\partial x_i} + A_i(x)$$

où $A_i(x)$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^N$ dépendant de x.

On peut montrer plus généralement que la différence de 2 connexions est une 1-forme (dépendance de V) à valeurs dans le fibré vectoriel $\mathrm{End}(E)$. L'ensemble des connexions est donc un bel exemple d'espace affine sans origine canonique !!

Exemple 1 : connexion adiabatique (Berry) et le cas d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2 : fibré en droites complexes.

On peut demander que la connexion soit compatible avec une structure supplémentaire donnée sur les fibres, par exemple un produit hermitien. Dans ce cas, on impose :

$$(\nabla s|t) + (s|\nabla t) = d(s|t) ,$$

où l'on note $(s|t)$ le produit hermitien (ponctuel) de 2 sections. Dans ce cas, on parle de connexion hermitienne.

Si on a un fibré (M, L) hermitien en droites complexes et une trivialisation par une section de norme 1, une telle connexion est donnée par :

$$\nabla = \nabla_0 - iA ,$$

où A est une 1-forme à valeurs réelles sur M.

Transport parallèle et holonomie.

La notion la plus intuitive liée à une connexion est celle de transport parallèle. Soit $\gamma : [a, b] \to M$ un chemin C^1, $x_0 = \gamma(a)$, $x_1 = \gamma(b)$ et $V_a \in E_{x_0}$, on définit $V(t) \in E_{\gamma(t)}$ par la propriété suivante :

$$V(a) = V_a, \ \nabla_{\gamma'(t)} V(t) = 0 .$$

Cette équation différentielle linéaire a une solution unique qui donne lieu à $V_b = V(b)$. L'application linéaire ainsi définie de E_{x_0} dans E_{x_1} s'appelle transport parallèle le long de γ. Il est important de noter que ce transport dépend en général de γ, mais pas de son paramétrage. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (lacet), le transport parallèle est un endomorphisme de E_{x_0} qui ne dépend de $x_0 \in \gamma$ qu'à conjugaison près. Cet endomorphisme associé au lacet s'appelle *l'holonomie* de γ. Les valeurs propres de l'holonomie sont attachées au lacet. C'est le cas à fortiori de la trace de l'holonomie qui est un invariant de la connexion appelé *Wilson loop* et qui joue un rôle important dans l'approche de Witten des invariants de nœuds.

Si la connexion est hermitienne, son holonomie le long de tout lacet est unitaire. Dans le cas d'un fibré de rang 1, l'holonomie est un angle de $U(1)$.

Si on a un lacet γ contenu dans un ouvert de trivialisation où $\nabla = \nabla_0 - iA$, l'holonomie est donnée par

$$e^{i\int_\gamma A}.$$

Courbure.

Si S est une chaîne de dimension 2 de M de bord γ, on a envie de calculer l'holonomie le long de γ par Stokes. Faisons-le pour les fibré de rang 1, on voit que l'holonomie est donnée dans le cas où S est contenue dans un ouvert de trivialisation par

$$e^{i\int_S dA}.$$

La 2-forme $F = dA$ s'appelle la *courbure* de la connexion. Dans le cas de dimension quelconque, la courbure est une 2-forme à valeurs dans $End(E)$ donnée par :

$$F = dA + [A, A],$$

où le crochet est comme matrices. Il est remarquable que la courbure ne dépend pas de la trivialisation choisie. Soit S une surface passant par x_0, et γ un petit lacet basé en x_0,tracé sur S et bord d'un domaine D de S. Si on suppose le fibré trivialisé près de x_0, la restriction de F à S est une 2 forme à valeurs dans $End(E_{x_0})$. Alors l'holonomie de ∇ le long de γ est donnée approximativement par

$$Id - \int_D F.$$

Dans le cas d'un fibré en droites complexes, si S est un 2-cycle, la formule précédente prédit $\int_S F \in 2\pi Z$. La courbure a une classe de cohomologie entière $\times 2\pi$.

Groupe de jauge.

Si (M, E) est un fibré vectoriel, le groupe de jauge est le groupe des difféomorphismes de E qui préservent chaque fibre en étant linéaire sur chacune.

Dans le cas de rang 1, un élément du groupe de jauge est donc une fonction C^∞, $g : M \to \mathbb{C} \setminus 0$. On se restreint parfois au sous-groupe qui préserve la structure hermitienne. Dans ce cas, $|g(x)| = 1$. Il est aussi utile de considérer la composante connexe de l'identité, ici cela veut dire : $g(x) = e^{if(x)}$ avec $f : M \to \mathbb{R}$. La classe de cohomologie entière $g^*(d\theta)$ est alors triviale.

Le groupe de jauge opère naturellement sur les connexions On vérifie que cette opération ne change pas la courbure, dans le cas de rang 1, cela revient à ajouter à A une forme df (au moins localement).

Lorsque la courbure est nulle, le fibré avec connexion n'est pas toujours trivial : il est plat et caractérisé par les holonomies qui donnent un homomorphisme de $\pi_1(M, x_0)$ dans $GL(E_{x_0})$. Si M est 1-connexe, la courbure caractérise le fibré de façon unique.

6.2. Monopoles magnétiques, effet Ahoronov-Bohm

Pour cette discussion, restreignons-nous au cas d'une variété de dimension 3 et d'un champ magnétique B stationnaire. Il est important de pouvoir considérer un potentiel magnétique A qui est une 1-forme telle que $B = dA$. Bien sûr, ce n'est pas possible si la classe de cohomologie de B n'est pas nulle. Compte-tenu de la discussion précédente, il est naturel d'essayer de trouver un fibré hermitien de rang 1 avec une connexion ∇ dont cB soit la courbure où c est une constante liée aux unités.

Discutons ce point : localement l'holonomie sera donnée par $e^{ic\int_\gamma A}$ et donc $ic\int_\gamma A$ est sans dimension. Comme $\int_\gamma A$ a les dimensions d'une action divisée par une charge électrique, c est une charge électrique divisée par une action. Il y a un quantum de charge électrique, celle de l'électron ou du proton, e, et un quantum d'action en physique quantique, la constante de Planck $\hbar = h/2\pi$. On est ainsi amené à chercher un fibré de courbure $F = eB/\hbar$. Cela impose une quantification du champ magnétique : sa classe de cohomologie multipliée par e/h doit être entière.

Autrement dit, si S est un 2-cycle de M, on a :

$$e\int_S B \in h\mathbb{Z}\,.$$

On peut reformuler cela en termes d'un quantum de flux magnétique notée m et $me = h$.

L'existence de champs magnétiques dans $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ correspondant au quantum de flux *(monopoles magnétiques)* n'a jamais été observée expérimentalement

Le transport parallèle donné par $e^{iq\int_\gamma A/\hbar}$ est responsable d'un effet de physique quantique appelé effet *Bohm-Aharonov.*

Il s'agit d'un phénomène d'interférence : l'intégrale de Feynman qui décrit les amplitudes de transition incorpore dans le cas d'un champ magnétique un terme de transport parallèle $e^{iq\int_\gamma A/\hbar}$.

Ce n'est pas le champ qui détermine complètement la physique quantique du système, mais bien le fibré avec connexion.

Entrelacement de 2 courbes dans $\mathbb{R}^3$ (Gauss).

Ces considérations de théorie de jauge ont des interactions importantes avec la topologie de dimension 3 (Gauss, Witten).

Si on a un champ magnétique B localisé près d'un lacet γ de $\mathbb{R}^3$ et de flux transversal B_0 et si $dA = B$, l'intégrale de A sur un lacet γ_1 ne rencontrant pas le support de B est donné par $B_0 lk(\gamma, \gamma_1)$ où lk est le nombre (entier) d'entrelacement des 2 courbes.

Une généralisation (non triviale) au cas du groupe $SU(2)$ a été proposée par Witten et conduit au polynôme de Jones.

Les équations de Maxwell du point de vue théorie de jauge :

soit (M, L) un fibré hermitien en droite complexes, les fonctions d'ondes quantiques seront des sections de ce fibré. On cherche une connexion ∇ sur (M, L) dont la norme L^2 de la courbure par rapport à un élément de volume sur M soit extrémale. Cela se traduit localement par $d^* A = 0$.

La généralisation de ce point de vue à des fibrés hermitiens de rang $\geqslant 2$ conduit aux célèbres équations de Yang-Mills (voir exposé de Gérard Besson à ce séminaire).

Références

[1] J. Baez, J. Muniain. — *Gauge fields, knots and gravity*, World Scientific, 1994.

[2] P. Bamberg, S. Sternberg. — *A course in mathematics for students of physics 2*, Cambridge U. P., 1990.

[3] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands. — *The Feynman lectures in physics, vol 2*, Addison-Wesley, 1989.

[4] J. Jackson. — *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1975.

[5] L. Landau, E. Lifchitz. — *Théorie des champs*, Mir, 1970.

[6] G. Mackey. — *Mathematical foundations of Quantum mechanics*, Benjamin, 1963.

[7] W. Niven. — *The scientific papers of James Clerk Maxwell*, Dover, 1966.

Yves COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (CNRS-UJF)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
email: yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr