Yves Colin de Verdière

Le trou spectral des graphes et leurs propriétés d'expansion

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 51-68
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__51_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (51–68)

LE TROU SPECTRAL DES GRAPHES ET LEURS PROPRIÉTÉS D'EXPANSION

Yves COLIN DE VERDIÈRE

Dans la suite $\Gamma = (V, E)$ est un graphe fini ou non, mais de degré uniformément borné par une constante k. Le laplacien canonique Δ_Γ est l'opérateur autoadjoint borné sur $\mathcal{H} = l^2(V)$ associé à la forme quadratique

$$q(f) = \sum_{\{i,j\} \in E} (f(i) - f(j))^2 .$$

On a donc:

$$\Delta_\Gamma(f)(i) = \sum_{j \sim i} (f(i) - f(j)) ,$$

de façon à avoir:

$$q(f) = < \Delta_\Gamma f | f > .$$

On définit aussi la matrice d'adjacence M_Γ par la relation

$$M_\Gamma = k\mathrm{Id} - \Delta_\Gamma ,$$

où k est le sup des degrés des sommets.

Si Γ est fini et connexe, le spectre de Δ_Γ est de la forme:

$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{\#V} .$$

Le *trou spectral* ou gap de Γ, noté $g(\Gamma)$ est alors défini par $g(\Gamma) = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$.

Le but de cet exposé est de donner des relations entre le gap et des propriétés plus géométriques de Γ (diamètre, expansion, constante de Cheeger, etc...).

On s'intéressera aussi à la construction de familles infinies de graphes ayant de bonnes propriétés d'expansion. En particulier, on donnera une construction proche

---

Classification A.M.S. : 05C50.

de celle de Gabber-Galil ([G-G]) et on montrera comment elle permet de retrouver la propriété (T) pour $SL_3(\mathbb{Z})$, grâce à l'inégalité de Kato pour les graphes.

1. Constantes de Cheeger

Dans les années 70, J. Cheeger a introduit une constante isopérimétrique $h(X,g)$ attachée à toute variété riemannienne compacte connexe (X,g) et qui est définie de la façon suivante: pour tout domaine régulier $D \subset X$, on pose $h(D) = vol(\partial D)/vol(D)$, où les volumes sont calculés grâce à g. La constante de Cheeger $h(X,g)$ est le inf des $h(D)$, où D parcourt les domaines de volume $\leq vol(X)/2$. Cheeger montre ensuite que la première valeur propre non nulle du laplacien est $\geq h(X,g)^2/4$ (pour la définition et les propriétés de $h(X,g)$, voir [B-G-M]).

On peut facilement étendre ces résultats aux graphes et les utiliser dans les 2 sens: soit lorsqu'on a des informations sur h, soit lorsqu'on en a sur le gap λ_2.

En fait, on va définir 2 constantes de Cheeger: h_o pour un graphe infini ou à bord; h pour un graphe fini sans bord.

DÉFINITIONS. — *Si $\Gamma = (V, V_o, E)$ est un graphe à bord V_o (éventuellement infini), ce qui signifie que V_o est un sous-ensemble de V, on pose*

$$h_o(\Gamma) = \inf \frac{|\partial A|}{|A|} ,$$

où le inf *porte sur les parties finies de V ne rencontrant pas V_o et ∂A est l'ensemble des arêtes issues de A et dont l'extrémité n'est pas dans A.*

Si $\Gamma = (V, E)$ est un graphe fini, on pose

$$h(\Gamma) = \inf \frac{|\partial A|}{|A|} ,$$

où cette fois, le inf porte sur les $A \subset V$ tels que $|A| \leq |V|/2$.

Il n'est pas difficile de montrer, par exemple, que $h_o(\mathbb{Z}^n) = 0$; en effet, pour un cube de côté N, le nombre de sommets intérieurs est de l'ordre de N^n, alors que le nombre d'arêtes issues du cube est seulement de l'ordre de N^{n-1} qui est négligeable devant N^n lorsque $N \to \infty$.

Pour un arbre homogène T_q de degré $q+1$, on a $h_o(T_q) = q - 1$. En effet, il suffit évidemment de considérer les parties connexes A de V: ce sont des arbres et on a alors: $(q+1)|A| = |\partial A| + 2I$ où I est le nombre d'arêtes intérieures de A. De plus, on a évidemment (caractéristique d'Euler):

$$|A| - I = 1 ,$$

d'où l'on conclut que:

$$(q-1)|A| = |\partial A| - 2 ,$$

et le calcul de h_o.

En fait, h_o mesure les propriétés d'expansion de Γ: si A ne rencontre pas le bord de Γ, le volume de la boule $B(A,1)$ de centre A et de rayon 1 vérifie:

$$|B(A,1)| \geq (1 + \frac{h_o}{k})|A| ,$$

où k est la borne supérieure du degré de Γ. Si $h_o > 0$, les boules $B(A,N)$ ont un volume à croissance exponentielle tant qu'elles ne rencontrent pas le bord de Γ.

Dans le cas fini, l'estimation précédente est valable avec h au lieu de h_o tant que la volume n'atteint pas la moitié du volume de V. On en déduit facilement l'estimation suivante sur le diamètre D de Γ:

$$D(\Gamma) \leq \frac{\log(n/2)}{\log(1 + (h/k))} + 1 .$$

En particulier, si on a une famille infinie de graphes finis Γ_n de degrés bornés, de nombre de sommets n, et tels que $h(\Gamma_n)$ ne tend pas vers 0, leur diamètre croit comme $O(\log n)$. Il n'est pas simple de construire de telles familles, mais elles présentent un grand intérêt dans la théorie des réseaux et des algorithmes.

2. λ_1, gap et inégalités de Cheeger

Soit Δ_Γ le laplacien canonique de Γ.

Alors, on peut estimer les valeurs propres de Δ_Γ à l'aide des constantes de Cheeger: la remarque de base est que le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique d'un ensemble de sommets A est exactement $|\partial A|/|A|$.

On a les inégalités suivantes:

THÉORÈME. — *Si $\Gamma = (V, V_o, E)$ est éventuellement infini et avec conditions de Dirichlet au bord et que le sup des degrés des sommets est k:*

$$\frac{h_o^2(\Gamma)}{2k} \leq \lambda_1 \leq h_o(\Gamma) .$$

Si $\Gamma = (V, E)$ est fini,

$$\frac{h^2(\Gamma)}{2k} \leq g(\Gamma) = \lambda_2 - \lambda_1 \leq 2h(\Gamma) .$$

Preuve.

1) Pour majorer λ_1, on calcule le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique de A, il vaut $|\partial A|/|A|$. On en déduit, pour tout A ne rencontrant pas V_o:

$$\lambda_1 \leq |\partial A|/|A| .$$

Pour minorer, on prend f à support fini disjoint de V_o. On évalue alors

$$S = \sum_E |f^2(i) - f^2(j)| .$$

Par Cauchy-Schwarz, on a:

$$S \leq \sqrt{2k}||df||||f|| .$$

Pour minorer S, on considère les valeurs $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_r$ prises par f^2 et les ensembles $A_l = \{i \in V | f^2(i) \geq a_l\}$. On a

$$S = \sum f^2(i) - f^2(j) ,$$

où la somme porte sur les arêtes (i, j) orientées de façon que $f^2(i) - f^2(j) \geq 0$. On peut réécrire cette somme sous la forme d'une somme $S = \sum(a_l - a_{l-1})$, où le nombre de répétition de $a_l - a_{l-1}$ est égal au nombre d'arêtes (i, j) telles que $f^2(i) \geq a_l$ et $f^2(j) \leq a_{l-1}$, donc $(i, j) \in \partial A_l$. Utilisant la définition de $h_o(\Gamma)$, il vient:

$$S \geq h_o \sum_{l=1}^{r}(a_l - a_{l-1})|A_l| ,$$

qui est égal à $h_o \sum_k f^2(i)$.

D'où l'on tire

$$||df||^2 \geq \frac{h_o^2}{2k}||f||^2$$

et la minoration de λ_1.

2) Pour la majoration de $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$, on fabrique une fonction d'intégrale nulle de la façon suivante: si $V = A \cup B$ est une partition de V avec $|A| = a \leq |B| = b$, on prend $f = b$ sur A et $-a$ sur B. On a

$$\frac{||df||^2}{||f||^2} = \frac{(a+b)^2|\partial A|}{(a+b)ab} ,$$

d'où l'on déduit le résultat.

Pour la minoration, si f est une fonction propre pour λ_2, et $A = \{i \in V | f(i) > 0\}$, on peut supposer $|A| \leq \frac{|V|}{2}$. Soit alors f_1 égale à f sur A et à 0 sur le complémentaire de A. D'après ce qui précède,

$$\frac{||df_1||^2}{||f_1||^2} \geq \frac{h^2}{2k} .$$

Maintenant, on a aussi:

$$\sum_E (f_1(i) - f_1(j))^2 = \sum_{i \in A} f_1(i) \sum_{j \sim i} (f_1(i) - f_1(j)) \leq \sum_{i \in A} f(i) \Delta f(i) = \lambda_2 \sum_{i \in A} f(i)^2 .$$

D'où le résultat. □

3. Expanseurs et graphes de Ramanujan

Un graphe Γ sera appelé (n, k, μ)-expanseur si $|V(\Gamma)| = n$, degré $(\Gamma) \leq k$ (dans la pratique k est le sup des degrés des sommets) et les valeurs propres de M_Γ sont contenues dans l'intervalle $[-\mu, \mu]$ sauf celles qui valent k ou $-k$ (ce dernier cas ne se produit que pour les graphes bipartites). Leur gap est $\geq k - \mu$.

Remarque. — Si le degré n'est pas constant et que l'on définit la matrice d'adjacence comme $kId - \Delta_\Gamma$, où k est le plus grand degré, cela revient à penser que l'on ajoute l-boucles aux sommets de degré $k - l$.

On veut construire des familles infinies ($n \to \infty$) de graphes Γ_n qui soit des (n, k, μ)-expanseurs où k est fixé et μ indépendant de n le plus grand possible. On peut alors minorer uniformément $h(\Gamma_n)$ et majorer le diamètre par $c \log n$.

Remarque. — F. Chung [CH] a donné une estimation du diamètre pour un (n, k, μ) expanseur:

THÉORÈME. — *Si Γ est un (n, k, μ) expanseur, le diamètre $D(\Gamma)$ vérifie*

$$D(\Gamma) \leq \frac{\operatorname{Log}(n-1)}{\operatorname{Log}(k/\mu)} + 1 .$$

Preuve. — Si M_Γ est la matrice d'adjacence de Γ, alors les coefficients M_Γ^m sont tous > 0 si et seulement si $m \geq D(\Gamma)$. Soit $\lambda_1 = k > \mu \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq -\mu$ les valeurs propres de M_Γ et u_i une b.o. de fonctions propres associées avec $u_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On peut alors calculer les coefficients matriciels $M_\Gamma^m(r,s)$ à l'aide de la décomposition propre de M_Γ:

$$M_\Gamma^m(r,s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m u_i(r) u_i(s) ,$$

et donc:

$$M_\Gamma^m(r,s) \geq \frac{k^m}{n} - \mu^m \sum_{i>1} |u_i(r)||u_i(s)| .$$

On utilise Cauchy-Schwarz et $\sum_{i=1}^n |u_i(r)|^2 = 1$ ce qui donne:

$$M_\Gamma^m(r,s) \geq \frac{k^m}{n} - \mu^m (1 - \frac{1}{n}) ,$$

d'où le résultat. □

Il y a un seuil asymptotique infranchissable par les (n,k,μ)-expanseur, c'est $\mu_k = 2\sqrt{k-1}$. Un (n,k,μ_k)-expanseur est appelé *graphe de Ramanujan.* On a en effet la:

PROPOSITION. — *Si Γ_n est une suite de $(n,k,\mu(\Gamma_n))$-expanseurs, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu(\Gamma_n) \geq 2\sqrt{k-1} (= \mu_k) .$$

Preuve. — Soit ν une mesure de probabilité à support compact sur $\mathbb{R}$. On pose $r(\nu) = \sup\{|t| \mid t \in support(\nu)\}$. Si $m_l(\nu) = \int t^l d\nu(t)$, on a

$$r(\nu) = \limsup m_l(\nu)^{1/l} ,$$

ainsi qu'il résulte du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent

$$\sum m_l(\nu)\lambda^{-l} = \int \frac{d\nu(t)}{1 - t/\lambda} .$$

Soit dP_k la mesure spectrale (voir aussi [CV5] pour cette notion) de l'arbre homogène T_k de degré k, caractérisée par la relation:

$$\int f(t) dP_k = f(M_{T_k})(x,x) ,$$

où $f(M_{T_k})(x,y)$ est la matrice de l'opérateur $f(M_{T_k})$. On a $r(dP_k) = 2\sqrt{k-1}$, car le spectre de la matrice d'adjacence M_{T_k} de T_k est l'intervalle $[-2\sqrt{k-1}, 2\sqrt{k-1}]$.

Soit maintenant $dQ_n = \frac{1}{n}\sum_j \delta(\lambda_{j,n})$, où $\lambda_{j,n}$ sont les valeurs propres de M_{Γ_n}. On a

$$m_l(dQ_n) \geq m_l(dP_k) ,$$

car le membre de gauche compte le nombre moyen de lacets de longueur l dans Γ_n alors que celui de droite compte le nombre de lacets de longueur l basé en un point de l'arbre homogène de degré k. Donc, si dQ_∞ est une limite vague des dQ_n: $m_l(dQ_\infty) \geq m_l(dP_k)$, ce qui implique que $r(dQ_\infty) \geq r(dP_k)$ et donc la proposition. □

Margulis [MA] a trouvé dans les années 1973 une construction générale de familles infinis de (n, k, c)-expanseurs avec $c > 0$ indépendant de n en utilisant des arguments de théorie des groupes assez délicats, basés sur la propriété (T) de Kazhdan. Malheureusement c n'est pas explicite.

Gabber et Galil [G-G] ont en 1980 trouvé des exemples plus explicites.

Enfin des exemples beaucoup plus sophistiqués qui sont des graphes de Ramanujan ont été trouvés par Lubotsky-Phillips-Samak [L-P-S 1].

4. Les graphes de Gabber-Galil

Commençons par repréciser la notion de graphe de Cayley:

X est un ensemble muni d'une action d'un groupe G de type fini engendré par une partie (finie) S symétrique. On définit alors le graphe de Cayley ou plutôt sa matrice d'adjacence $M_{X,S}$ qui opère sur $l^2(X)$: $M_{X,S}f(z) = \sum_{g\in S} f(g.z)$. On désignera par $\Gamma_{X,S}$ le graphe dont l'ensemble des sommets est X et la matrice d'adjacence $M_{X,S}$: c'est le graphe de Cayley, il peut avoir des boucles et des arêtes multiples.

La *valence* k est dans ce cas, *par convention*, le nombre d'éléments de S. On remarque aussi que le fait que S soit symétrique implique que $M_{X,S}$ est un opérateur symétrique.

Décrivons une variante de l'exemple de [G-G]; les exemples dont nous allons parler sont en fait des graphes de Cayley au sens précédent.

$\Gamma_n = \Gamma_{X_n,S_8}$ est le graphe de Cayley de degré 8, à $n = m^2$ sommets, que l'on peut décrire ainsi: $X_n = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$, le groupe $G = SA_2(\mathbb{Z})$ est le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^2$ à coefficients entiers de déteminant 1 qui opère de façon naturelle sur X_n; S est l'ensemble symétrique des 8 générateurs de G décrit ainsi: si $z = (x, y)$ et

$$\sigma_1(z) = (x, x+y), \sigma_2(z) = (x, x+y+1), \sigma_3(z) = (x+y, y), \sigma_4(z) = (x+y+1, y) \ ,$$

on définit S_8 comme l'ensemble des 8 transformations affines $\sigma_i^{\pm 1}$, $i = 1,2,3,4$ et S_4 comme l'ensemble des 4 transformations linéaires $\sigma_i^{\pm 1}$, avec $i = 1,3$.

THÉORÈME [G-G]. — *Si $\nu = 1 + 2\sqrt{2}$, les Γ_n, sont des ($n = m^2, 8, 2\nu$)-expanseurs et* $\lim_n \mu(\Gamma_n) = 2\nu$ *et donc aussi*

$$g(\Gamma_n) \geq 8 - 2\nu \sim 0.3431 \ .$$

Remarque. — On a $2\nu \sim 7.6569 > 2\sqrt{7} \sim 5.2915$; donc les Γ_n sont loin d'être des graphes de Ramanujan, mais ils sont infiniment moins chers !!

La preuve est élémentaire. Elle repose sur 3 lemmes:

LEMME 1. — *Soit Γ_∞ le graphe de Cayley $\Gamma_{\mathbb{Z}^2\setminus 0, S_4}$ de degré 4 dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2 \setminus 0$ et 2 sommets z, z' sont reliés par une arête si et seulement s'il existe $\tau \in S_4$ tel que $z = \tau(z')$. Alors le spectre de la matrice d'adjacence M_∞ de Γ_∞ est donné par*

$$\sigma(M_\infty) = [-\nu, \nu] \ .$$

LEMME 2. — *Soit $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, alors l'opérateur T_∞ défini sur $L^2(X)$ par*

$$T_\infty f(z) = 2 \sum_{\tau \in S_4} f(\tau z)$$

vérifie:

$$\sigma(T_\infty) = [-2\nu, 2\nu] \cup \{8\} \ .$$

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui de [L-P-S] (voir aussi [CV6] et [LU]) pour le cas de S^2.

LEMME 3. — *Si H_n est le sous-espace de dimension $n = m^2$ de $L^2(X)$ engendré par les fonctions caractéristiques des carrés*

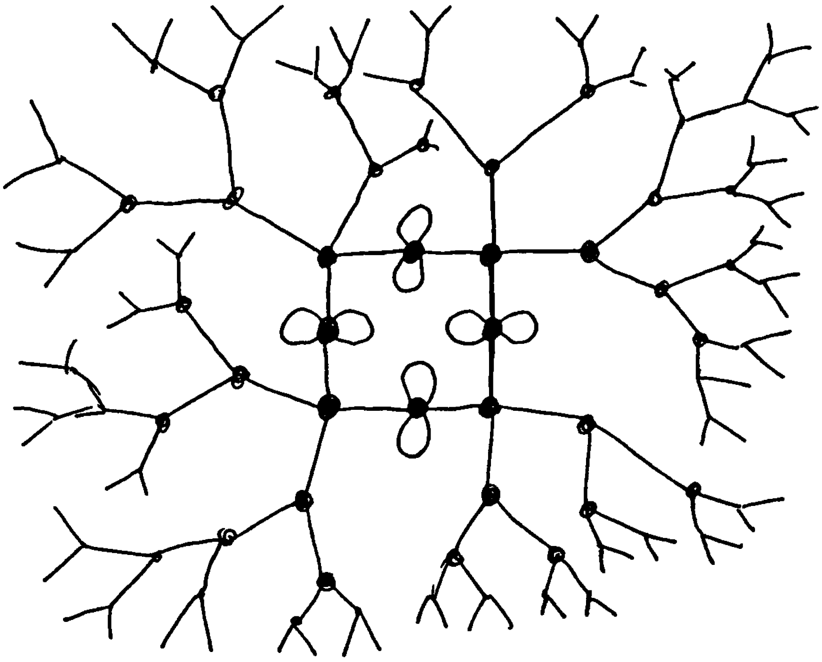
$$C_a = a + [0, 1/m]^2 \ ,$$

où a parcours la grille des $(i/m, j/m)$, alors si on identifie $l^2(X_n)$ à H_n (comme espaces hilbertiens) de la façon évidente, la restriction de la forme quadratique $q_\infty(f) = \langle T_\infty f | f \rangle$ à H_n est la forme quadratique q_n associée à la matrice d'adjacence de M_{X_n, S_8}.

Preuve du lemme 1. — Le graphe Γ_∞ se décompose en réunion de $(0,0)$ et des graphes isomorphes $T_p = \{(m,n) | pgcd(m,n) = p\}$ pour $p \in \mathbb{N} \setminus 0$. Il suffit donc de contrôler le spectre de la matrice d'adjacence M_1 de T_1.

Posons $\|(x,y)\| = \sup(|x|, |y|)$ et $\sigma(z) = \{\tau(z) | \tau \in S_4\}$ l'ensemble des voisins de z. Si $\|z\| > 1$, il y a dans $\sigma(z)$ 2 points de norme $> \|z\|$, un de norme $< \|z\|$

et un de norme $||z||$. Il est alors facile de dessiner les graphe T_1 qui est réunion de 8 arbres homogènes de degré 3 avec des arêtes supplémentaires joignant des points à même distance combinatoire des racines attachés aux 4 coins d'un carré (2 par coins) et de 4 autres sommets situés au milieu des arêtes de ce carré et ayant chacun 2 boucles attachées.



Le graphe T_1.

Pour calculer le spectre de T_1, on utilise la

Remarque. — On peut contrôler le spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe infini de la façon suivante: soit Γ un tel graphe et supposons qu'on ait une fonction $\lambda : \vec{E} \to]0, \infty[$, où $\vec{E} = \{(i,j)\}$ est l'ensemble des arêtes orientées telle que $\lambda(\alpha^{-1}) = 1/\lambda(\alpha)$ (λ est une 1– forme différentielle) et que $\forall i \in V, \sum_{j \sim i} \lambda(j,i) \leq \nu$. Alors le spectre de M_Γ vérifie $-\nu \leq \sigma(M_\Gamma) \leq \nu$; en effet, on a:

$$2|f(i)f(j)| \leq \lambda(j,i)|f(i)|^2 + \lambda(i,j)|f(j)|^2 ,$$

et il suffit de sommer ces inégalités sur les arêtes pour obtenir:

$$| < M_\Gamma f | f > | \leq \nu ||f||^2 .$$

Exemple. — Supposons qu'on puisse orienter les arêtes de façon qu'en tout sommet il y ait au plus p arêtes incidentes et au moins q arêtes sortantes (avec $p+q = k$), alors le spectre de la matrice d'incidence est contenu dans l'intervalle $[-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]$.

Dans le cas des arbres homogènes cette estimation est optimale (orienter à partir d'une racine).

C'est en particulier le cas si on a une fonction $f > 0$ sur V qui est ν-surharmonique, ie telle que $Mf \leq \nu f$: on prend $\lambda(j, i) = f(j)/f(i)$.

Ce critère marche toujours, car si $\nu > |\sigma(M_\Gamma)|$, il existe une fonction ν-surharmonique, par exemple la résolvante donné alors par la série de Neumann > 0 et convergente. Nous allons appliquer ce critère à T_1.

Suite de la preuve du lemme 1. — On considère la fonction f sur les sommets de T_1 qui vaut 1 au coin du carré, $(1/\sqrt{2})^k$ aux points des arbres à distance k du coin (la racine) et $a = (1 + \sqrt{2})/2$ au centre des arêtes du carré: on vérifie sans difficultés que

$$M_{T_1} f(z) \leq (1 + 2\sqrt{2}) f(z) .$$

Il n'est pas difficile de voir que le spectre de T_1 est exactement l'intervalle $[-\nu, \nu]$ en utilisant le fait que le spectre (essentiel) de la matrice d'adjacence d'un arbre régulier de degré 3 est l'intervalle $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$. En effet, on peut considérer le spectre de la matrice d'adjacence de T_1 restreint aux fonctions radiales; le spectre essentiel est alors celui de l'arbre homogène de degré 3 (il ne dépend que de ce qui se passe à l'infini).

Le graphe Γ_∞ se décompose en réunion des graphes isomorphes

$$T_p = \{(m, n) | pgcd(m, n) = p\}$$

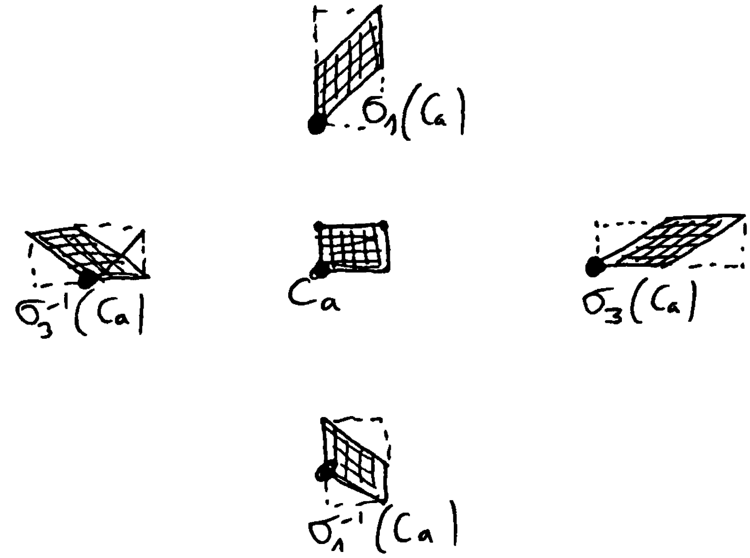
pour $p \in \mathbb{N} \setminus 0$. Il suffit donc de contrôler le spectre de la matrice d'adjacence M_1 de T_1.

Preuve du lemme 2. — Par transformée de Fourier, $L^2(X)$ s'identifie à $l^2(\mathbb{Z}^2)$ et l'orthogonal des fonctions constantes à $l^2(\mathbb{Z}^2 \setminus 0)$. L'opérateur T_∞ s'identifie alors au double de la matrice d'adjacence du graphe Γ.

Preuve du lemme 3. — Soit, pour $a \in X_n$, $\varphi_a = \sqrt{n}\chi_{C_a}$. Alors $j : l^2(X_n) \to L^2(X)$ définie par $j(x) = \sum x_a \varphi_a$ est une isométrie de $l^2(X_n)$ sur H_n. Il suffit donc de calculer:

$$c_{a,b} = 2 \sum_{\tau \in S_4} \int_X \tau^\star(\varphi_a)\varphi_b \; = 2n \sum_{\tau \in S_4} L(C_b \cap \tau(C_a)) ,$$

où L est la mesure de Lebesgue. Cette mesure vaut $1/2n$ ou 0 suivant qu'il existe ou non $\sigma \in S_8$ tel que $a = \sigma(b)$.



Figure

Preuve du théorème. — On applique le minimax qui montre que $\mu_1(\Gamma_n) \geq -2\nu$ et $\mu_{n-1}(\Gamma_n) \leq 2\nu$. La limite s'obtient par densité des H_n, $n \to \infty$ dans $L^2(X)$.

5. Propriété (T) de Kazhdan

Soit G un groupe localement compact (par exemple un groupe de Lie ou un groupe discret), on pose la

DÉFINITION. — *G a la propriété (T) (de Kazhdan) s'il existe un voisinage compact K de Id dans G, engendrant G, et une constante $c > 0$ tels que, si π est une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle qu'il existe un vecteur unitaire $x \in \mathcal{H}$ vérifiant*

$$\forall g \in K, \ \|\pi(g)x - x\| \leq c ,$$

alors π admet un vecteur G-invariant non nul.

En fait, bien sûr, si la propriété est vraie avec un choix de K, elle est vraie avec tout autre choix K' (il existe N tel que $K \subset K'^N$), mais la constante c dépend de K.

Lorsque G est discret et S un système de générateurs symétrique de G, on définit la constante de Kazhdan $c(G,S)$ par:

$$c(G,S) = \inf_{\pi \in \hat{G}\setminus\rho_o} \inf_{\|x\|=1} \sum_{\gamma \in S} \|\pi(\gamma)x - x\|^2 ,$$

où ρ_o est la représentation triviale et $\hat{G}$ l'ensemble des (classes de) représentation unitaires irréductibles de G. La propriété (T) équivaut alors à

$$c(G,S) > 0 .$$

Lorsque G est un groupe de Lie connexe, on associe à une base $B = (Y_i)$ de l'algèbre de Lie un opérateur différentiel $\Delta_{\pi,B}$ sur l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation unitaire π de G par la forme quadratique $Q(z) = \sum_i \|\pi(Y_i)z\|^2$ et la constante de Kazhdan est $c(G,B)$ est alors le *inf* de ces spectres pour les représentations sans vecteurs G-invariants.

Exemples.

1) Tout groupe compact est de Kazhdan; en effet, il suffit de prendre $K = G$ et de remarquer que si un vecteur unitaire x vérifie

$$\|\pi(g)x - x\| \leq \sqrt{2} - \varepsilon \ , \varepsilon > 0 ,$$

la moyenne sur G des $\pi(g)x$ est invariante par π et non nulle. Il est intéressant de calculer explicitement les constantes de Kazhdan des groupes finis (voir à ce sujet [B-H]).

Pour un groupe fini, on sait que la représentation régulière contient toutes les représentations irréductibles. Soit donc (G,S) un groupe fini engendré par S, supposé symétrique. Alors

$c(G,S)$ est égale à la deuxième valeur propre du laplacien (ie le *gap*) du graphe de Cayley associé à S.

2) Le groupe additif $\mathbb{Z}$ n'a pas la propriété (T). En effet le groupe des caractères est le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et le caractère trivial n'est pas isolé.

3) Plus généralement, un groupe commutatif n'a la propriété (T) que s'il est compact et donc, s'il existe un homomorphisme surjectif de G sur un groupe commutatif infini, G n'a pas la propriété (T); par exemple les groupes libres n'ont pas la propriété (T). Pour $SL_2(\mathbb{Z})$, la situation est plus subtile, son groupe des commutateurs est d'indice fini et donc il n'y a pas d'homomorphismes non triviaux de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Z}$. Il faut utiliser le fait que $SL_2(\mathbb{Z})$ a un sous-groupe d'indice fini qui est un groupe libre a 2 générateurs

(le groupe de congruence $\Gamma(2)$) et que si Γ a la propriété (T), ses sous-groupes d'indice fini aussi.

Il n'est donc pas évident du tout qu'il y a des groupes infinis ayant la propriété (T). En fait Kazhdan a montré que si K est un corps commutatif localement compact non discret, $SL_n(K)$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$. Pour la preuve de ce fait, on pourra consulter [H-V] ou [LU]. Au § suivant, on donnera une preuve de la propriété (T_f) pour $SL_3(\mathbf{Z})$, où (T_f) signifie qu'on se restreint aux représentations de dimension finie dans la définition.

Il est également utile d'introduire une propriété (T) (et aussi (T_f)) relative, si $H \subset G$ est un sous-groupe de G, on dira que (G, H) a la propriété (T) relative si, sous les mêmes hypothèses que dans la première défintion, on peut conclure que π a un vecteur H-invariant non trivial. par exemple, si $G = SA_2(\mathbf{R})$ est le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^2$ de déterminant 1 et $H = \mathbf{R}^2$ le sous-groupe des translations, la paire (G, H) a la propriété (T). C'est un ingrédient essentiel de la preuve du théorème de Kazhdan.

De plus, on a la propriété suivante, si Γ est un réseau de G (ie un sous-groupe discret de covolume fini), alors Γ a la propriété (T) si et seulement si G l'a : en particulier $SL_n(\mathbf{Z})$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$ et $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ a la propriété (T) relative.

Examinons maintenant la relation avec le spectre. Soit (Γ, S) un groupe discret tel que $c(\Gamma, S) > 0$. Soit X un ensemble fini sur lequel Γ opère transitivement, et soit X_S le graphe de Cayley associé. Alors le gap $g(X_S)$ est $\geq c(\Gamma, S)$. Ainsi à partir d'un groupe discret ayant la propriété (T_f), on peut facilement construire des familles d'expanseurs de constante uniforme.

6. La propriété (T_f) pour $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$

On commence par montrer (T_f)-relative pour la paire $(G, H) = (SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ en prouvant que l'exemple de Gabber-Galil est *universel*. En fait, on peut évaluer la constante $c_f(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ relativement à un système de générateurs.

Plus précisément, on a:

THÉORÈME. — *Soit S un système symétrique de générateurs de $SA_2(\mathbf{Z})$ formé de générateurs S_o de $SL_2(\mathbf{Z})$ et des translations unité $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Soit*

$c(S) > 0$ la borne inférieure du gap pour les matrices d'adjacence des graphes de Gabber-Galil associées à S, alors $c(S)$ est la constante de Kazhdan pour la propriété (T_f)-relative associée à S.

On aura besoin de *l'inégalité de Kato discrète:*

THÉORÈME (inégalité de Kato discrète). — *Soient $\Gamma = (V, E)$ un graphe fini,*

$$q_o(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i\in V} W_i x_i^2 \ ,$$

avec $c_{i,j} > 0$, et $\lambda_1(q_o)$ la première valeur propre de q_o sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^V$.

Soient, pour chaque $i \in V$, L_i un espace vectoriel hermitien de dimension N et pour chaque couple $(i,j) \in \vec{E}$, $\omega_{i,j}$ une isométrie $\mathbf{C}$-linéaire de L_i sur L_j. On suppose que l'on a: $\omega_{j,i} = \omega_{i,j}^{-1}$. Soit Q_ω la forme quadratique sur $\oplus_i L_i$ définie par:

$$Q_\omega(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{i,j}\|\omega_{i,j}x_i - x_j\|^2 + \sum_{i\in V} W_i\|x_i\|^2 \ .$$

Soit $\lambda_1(Q_\omega)$ la première valeur propre de Q_ω.

Alors $\lambda_1(q_o) \leq \lambda_1(Q_\omega)$ et on a égalité si et seulement si le produit des $\omega_{i,j}$ sur chaque cycle de Γ (l'holonomie) est l'identité.

Preuve. — Soit M_ω l'opposé de l'opérateur autoadjoint associé à Q_ω:

$$M_\omega f(i) = \sum_{j\sim i} c_{i,j}\omega_{i,j} f(j) + \tilde{W}_i f(i) \ ,$$

avec $\tilde{W}_i = -W_i - \sum_{j\sim i} c_{i,j}$.

Si $\varphi > 0$ est le fondamental de q_o, on a l'inégalité:

$$2Re < \omega_{i,j} z_i | z_j > \leq \frac{\varphi(j)}{\varphi(i)}\|z_i\|^2 + \frac{\varphi(i)}{\varphi(j)}\|z_j\|^2 \ ,$$

d'où l'on déduit, par sommation sur les arêtes orientées et en utilisant le fait que φ est un vecteur propre de q_o:

$$< M_\omega f | f > \leq -\lambda_1(q_o)\|f\|^2 \ ,$$

ce qui prouve le résultat. □

Soit maintenant π_m les représentations naturelles de G sur $l_o^2((\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^2)$ introduites plus haut (l_o^2 désigne les fonctions de somme nulle sur les sommets). Soit Z_m le tore discret (privé de l'origine) des caractères de l'action de $\mathbf{Z}^2$ qui apparaissent. La matrice Δ_m du graphe de Gabber-Galil (associé à ces générateurs) se transforme par Fourier en une matrice $\hat{\Delta}_m$. Soit Γ_m le graphe de Cayley de l'action de $(SL_2(\mathbf{Z}), S_o)$

sur Z_m, privé de la composante réduite au caractère trivial. Alors $\hat{\Delta}_m$ est dans O_{Γ_m} et son λ_1 est minoré par une constante $c > 0$ indépendante de m (cf § 4: le fait d'avoir une estimation uniforme est indépendante du système de générateurs). La forme quadratique associée est:

$$q_m(x) = \sum_i \Big(\sum_{\sigma \in S_o} |x_i - x_{\sigma(i)}|^2 + V_i x_i^2 \Big) ,$$

où $V_i = 2(|1-\chi_i(1,0)|^2 + |1-\chi_i(0,1)|^2)$ (χ_i est le caractère correspondant au sommet i).

Soit maintenant $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible de dimension finie de G, n'ayant pas de vecteurs H-invariants. Soit Z l'ensemble (fini) des caractères de H qui apparaissent. $SL_2(\mathbb{Z})$ agit par permutation de Z. On en déduit que $Z \subset Z_m$ pour un certain m (un caractère irrationnel a une orbite infinie sous $SL_2(\mathbb{Z})$).

Soit, pour chaque $\chi \in Z$, H_χ le sous-espace de $\mathcal{H}$ correspondant à ce caractère.

Alors la forme quadratique $q_\pi(z) = \sum_{g \in S} \|\pi(g)z - z\|^2$ s'écrit en décomposant $z = \sum_\chi z_\chi$:

$$q_\pi(z) = \sum_\chi \Big(\sum_{g \in S_o} \|\pi(g) z_\chi - z_{g(\chi)}\|^2 + V_\chi \|z_\chi\|^2 \Big) .$$

On conclut par application de l'inégalité de Kato et en remarquant que Z est une composante connexe de Z_m.

7. La propriété (T_f) pour $SL_3(\mathbb{Z})$

Soit (G_i, H_i) les 3 images des plongements évidents de $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$ dans $G = SL_3(\mathbb{Z})$ qui fixent une des 3 coordonnées et S_i les sous-ensembles de G correspondants. Soit $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ qui est une partie génératrice symétrique de G. Alors, on a:

THÉORÈME. — *Si π est une représentation irréductible de G et x un vecteur unitaire tel que*

$$\forall i = 1,2,3, \ \sum_{g \in S_i} \|\pi(g)x - x\|^2 < \varepsilon = \frac{c}{2N^2} ,$$

où c est la constante de Kazhdan pour la paire $(SA_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$ associée à S et N est celui du lemme 1, alors π admet un vecteur invariant non trivial. Donc $G = SL_3(\mathbb{Z})$ a la propriété (T_f) avec une estimation explicite de la constante.

On a besoin des:

LEMME 1. — *Les sous-groupes H_i engendrent $SL_3(\mathbb{Z})$ uniformément: il existe un N tel que tout élément de $SL_3(\mathbb{Z})$ est un mot de longueur $\leq N$ en des éléments des H_i.*

Preuve. — Ce lemme est prouvé par des arguments d'arithmétique élémentaire dans [C-K]: on montre dans cet article que tout $T \in SL_3(\mathbb{Z})$ est produit d'au plus 48 matrices élémentaires. Attention: aucune estimation sur la taille des entiers qui apparaissent n'est possible par cette méthode qui utilise le théorème de Dirichlet sur l'existence de nombres premiers dans toute progression arithmétique $an+b, n \in \mathbb{N}$ si a et b sont premiers entre eux. □

LEMME 2. — *Soit π une représentation unitaire d'un groupe G et x un vecteur de norme 1 tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant:*

$$\forall g \in G, \ Re < \pi(g)x | x > \geq \varepsilon \ ,$$

alors π a un vecteur invariant non trivial.

Preuve.

Soit C l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de x sous $\pi(G)$. L'hypothèse implique que $0 \notin C$. Soit z la projection orthogonale de 0 sur C. Alors, il est clair que z est G invariant: C est G invariant et la projection est unique. □

LEMME 3. — *Soit π une représentation unitaire de $SL_3(\mathbb{Z})$, x un vecteur unitaire vérifiant $\sum_{g \in S_i} \|\pi(g)x - x\|^2 \leq \varepsilon$, alors, si E_i est le sous-espace de $\mathcal{H}_\pi$ desz vecteurs invariants par $\pi(H_i)$, on a:*

$$d(x, E_i) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{c}} \ .$$

Preuve. — On décompose $\mathcal{H} = E_i \oplus F_i$ orthogonalement. Chacun des 2 espaces est invariant par π. On applique la propriété T_f relative à l'action de G_i sur F_i. □

Nous pouvons maintenant montrer que $SL_3(\mathbb{Z})$ a la propriété (T_f).

Soit x comme dans le théorème. Alors

$$d(x, E_i) < \frac{1}{N\sqrt{2}}$$

d'après le lemme 3. Puis

$$\forall g \in G, \ \|\pi(g)x - x\| \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \|\pi(g_\alpha)x - x\| \ ,$$

où les g_α sont dans $H_1 \cup H_2 \cup H_3$, d'après le lemme 1. Donc, comme $\|\pi(g_\alpha)x - x\| \leq 2d(x, E_{i(\alpha)})$, on a $\|\pi(g)x - x\| \leq \sqrt{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) et on conclut avec le lemme 2.

Il serait intéressant de gagner sur N qui détériore beaucoup la constante du théorème, par exemple en utilisant simultanément tous les plongements de $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ dans G.

8. Références sur le spectre des graphes.

[AH] G. AHUMADA. — *Fonctions périodiques et formule des traces de Selberg sur les arbres*, CRAS Paris **305** (1987), 709–712.

[AL] N. ALON. — *Eigenvalues and expanders*, Combinatorics **6** (1986), 83–96.

[A-M] N. ALON, V. MILMAN. — *λ_1, isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators*, J. Comb. theory B **38** (1985), 73–88.

[BA] H. BASS. — *The Ihara-Selberg ζ-function of a tree-lattice*, Internat. Jour. of Maths **6** (1992), 717–798.

[B-CV] R. BACHER, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicités des valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes*, Bull. Soc. Math. F., (à paraître).

[BI] F. BIEN. — *Constructions of telephone networks by groups representations*, Notices AMS **36** (1) (1989), 5–22.

[BO] B. BOLLOBAS. — *Graph theory*, Springer, 1979.

[BU] M. BURGER. — *Constantes explicites pour la propriété (T) pour $SL_3(\mathbf{Z})$*, J. de Crelle.

[CH] F. CHUNG. — *Diameters and eigenvalues*, Journal of the AMS **2** (1989), 187-196.

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Journal of Comb. Theory B **50** (1990), 11–21.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Multiplicités de valeurs propres: laplaciens discrets et continus*, Rendiconti di Matematica **VII, 13** (1993), 433–460.

[CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Théorème de Kirchhoff et théorie de Hodge*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **9** (1991), 89–94.

[CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Réseaux électriques planaires I*, Commentarii Math. Helv. (à paraître), 1994.

[CV5] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Spectres des graphes*, Notes d'un cours de DEA à l'ENSL (en préparation), 1994.

[CV6] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Distribution de points sur une sphère*, Séminaire Bourbaki **703** (1988-1989), 1–11.

[C-D-S] D. CVETKOVIC, M. DOOB, H. SACHS. — *Spectra of graphs: theory and applications*, Academic press, 1980.

[C-K] D. CARTER, G. KELLER. — *Elementary expressions for unimodular matrices*, Comm. in algebra **12** (4) (1984), 379–389.

[CV-G-V] Y. COLIN DE VERDIÈRE, I. GITLER, D. VERTIGAN. — *Réseaux électriques planaires II*, Prépublication IF **276** (1994), 1–18.

[D-S] P. DOYLE, J.L. SNELL. — *Random walks and electric networks*, Carus math. monographs, 1984.

[FO2] R. FORMAN. — *Determinants of Laplacians on graphs*, Topology **32** (1993), 35–46.

[FR1] J. FRIEDMAN. — *Expanding graphs*, AMS, 1993.

[FR2] J. FRIEDMAN. — *Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions*, Duke Math. J. **69** (1993), 487–525.

[GU] L. GUILLOPÉ. — *Entropies et spectres*, Prépublication IF **218** (1992), 1–36.

[G-G] O. GABBER, Z. GALIL. — *Explicit Constructions of Linear-Sized Superconcentrators*, Journal of computer and systems sciences **22** (1981), 407–420.

[HO] K. HASHIMOTO. — *On ζ and L-functions of finite graphs*, Int. J. of Maths **1** (1990), 381–396.

[H-L-S] H. VAN DER HOLST, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER. — *Clique minors, graph connectivity and Colin de Verdière's invariant*, preprint, 1994, 1–11.

[H-V] P. DE LA HARPE, A. VALETTE. — *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque 175, 1989.

[IA] Y. IHARA. — *Discrete subgroups of $PSL_2(k_p)$*, Proc. Symp. Pure Maths **9** (1966), 272–278.

[LU] A. LUBOTZKY. — *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Livre à paraître, 1994.

[L-L] E. LIEB, M. LOSS. — *Fluxes, Laplacians and Kasteleyn's theorem*, Duke Math. J. **71** (1993), 337–363.

[L-P-S] A. LUBOTZKY, R. PHILLIPS, P. SARNAK. — *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), 261–277.

[MA] G. MARGULIS. — *Explicit construction of concentrators*, Problemy Information Transmission **9** (1973), 325–332.

[MO] P. VAN MOERBECKE. — *The spectrum of Jacobi matrices*, Invent. math. **37** (1976), 45–81.

[SA] P. SARNAK. — *Some applications of modular forms*, Cambridge tracts in maths, 1991.

[SM] S. SMALE. — *On the mathematical foundations of electrical circuit theory*, J. differential Geometry **7** (1972), 193–210.

Yves COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)