Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

AHMED INTISSAR
MOHAMED VALL OULD MOUSTAPHA

# Formule intégrale & développement asymptotique du nombre de points d'un réseau dans l'espace hyperbolique

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 12 (1993-1994), p. 37-39
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__37_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (37–39)

# FORMULE INTÉGRALE & DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE POINTS D'UN RÉSEAU DANS L'ESPACE HYPERBOLIQUE

*Ahmed INTISSAR & Mohamed Vall OULD MOUSTAPHA*

RÉSUMÉ . — Dans cet article on donne une formule intégrale pour le nombre de points d'un réseau dans un espace symétrique de type non compact de rang 1 ainsi que le comportement asymptotique de ce nombre avec une estimée fine du reste.

ABSTRACT . — In this paper an integral formula for the number of lattice points in non compact type symmetric space of rank one and its asymptotic behaviour with a sharp estimate for the remainder term are given.

Soit $(\Sigma, ds)$ un espace symétrique de type non compact de rang 1. Rappelons que $\Sigma$ est un espace hyperbolique $\mathsf{K}H^n$ où $\mathsf{K}$ est l'un des corps $\mathsf{R}, \mathsf{C}, \mathsf{H}$ ou $\mathsf{C}a$ (on notera $d = \dim_{\mathbf{R}} \mathsf{K}$).

Soit $\Gamma$ un sous-groupe discret du groupe des déplacements $G$ de $\Sigma$. Pour deux points $x, y$ de $\Sigma$, on considère la fonction de comptage

$$N(T, x, y) = \#\{\gamma \in \Gamma; d(x, \gamma y) < T\},$$

où $d(x, y)$ est la distance géodésique sur $\Sigma$ et $T$ un grand paramètre.

Soit $\Delta$ l'opérateur de Laplace-Beltrami de la variété $(\Sigma, ds)$. Si on pose :

$$L = -\Delta - \sigma^2$$

avec $\sigma = \frac{d(n+1)-2}{2}$, on montre que l'opérateur $L$ est $G$-invariant elliptique autoadjoint non négatif et qu'il admet un spectre continu représenté par le demi-axe des réels positifs.

---

*Classification A.M.S.* : 58G25 – 58G30.

Soit $\Gamma$ un sous-groupe discret sans torsion du groupe $G$ des déplacements de $\Sigma$ tel que le Laplacien $L_\Gamma$ de la variété $\Sigma/\Gamma$ admette exactement $N$ valeurs propres négatives dans l'intervalle $[-\sigma^2, 0]$ et que son spectre continu éventuel soit positif. Un tel groupe sera dit "spectralement fini" d'ordre $N$.

Soit $\mathcal{O}_\Gamma(\lambda, x, y)$ la fonction spectrale du Laplacien $L_\Gamma$ associée à ses fonctions propres $\varphi(\lambda, x)$ pour $\lambda$ dans $sp(L_\Gamma)$ voir [1].

Ici le spectre de $L_\Gamma$ est considéré dans le sens $L^2(\Sigma/\Gamma)$ où le spectre est partagé en sa partie continue et sa partie discrète "finie". Nous donnons les deux résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Si $\Gamma$ est un sous-groupe discret sans torsion du groupe des déplacements $G$ de $\Sigma$, alors on a :*

$$N(T, x, y) =$$

$$c_\sigma sh^{2\sigma-d+2}T \int_{-\sigma^2}^{+\infty} F(1+\frac{\sigma-d}{2}-\frac{i\sqrt{\lambda}}{2}, 1+\frac{\sigma-d}{2}+\frac{i\sqrt{\lambda}}{2}, \sigma-\frac{d}{2}+2, -sh^2T) d_\lambda \mathcal{O}_\Gamma(\lambda; x, y)$$

*avec* $c_\sigma = \frac{\pi^{\sigma-\frac{d}{2}+1}}{\Gamma(\sigma-\frac{d}{2}+2)}$ ; $\sigma = \frac{d(n+1)-2}{2}$ *et* $F(a, b, c, z)$ *est la fonction hypergéométrique* ${}_2F_1(a, b, c, z)$.

THÉORÈME 2. — *Les hypothèses sont celles du théorème 1, on suppose de plus que $\Gamma$ est "spectralement fini" d'ordre $N > 0$. Alors on a :*

$$N(T, x, y) = A(T, x, y) + \begin{cases} O\left(e^{(2\sigma - \frac{2\sigma}{2\sigma+3-d})T}\right) & si\ \sigma > 0 \\ O\left(e^{(2\sigma - 1 - \frac{2\sigma-2}{2\sigma+3-d})T}\right) & si\ \sigma > 1 \\ O\left(e^{(2\sigma - 2 - \frac{2\sigma-4}{2\sigma+3-d})T}\right) & si\ \sigma > 2 \end{cases}$$

avec

$$A(T, x, y) = 2^{-\sigma}\pi^{\sigma-\frac{d}{2}+1} \sum_{j=1}^{N} \frac{2^{-\mu_j}\Gamma(\mu_j)e^{(\sigma+\mu_j)T}}{\Gamma\left(1+\frac{\sigma-d}{2}+\frac{\mu_j}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma+\mu_j}{2}\right)} \varphi_j(x)\varphi_j(y)$$

*où* $\mu_j = \sqrt{|\lambda_j|}$ *et* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ *sont les valeurs propres de* $L_\Gamma$ *dans l'intervalle* $[-\sigma^2, 0]$ *et* $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ *sont les fonctions propres correspondantes.*

Pour la preuve des théorèmes 1 et 2 voir [3].

La formule du théorème 1 généralise la formule (0.1) de [6] et celle du théorème 1 de [9] au cas de l'espace hyperbolique. Le théorème 2 généralise et améliore considérablement les résultats de Lax et Phillips [5], Levitan [6] et Ould Moustapha [9]. Notons enfin que le théorème 2 donne une réponse positive à la conjecture (0.5) de Miatello et Wallach [8] pour les groupes de covolumes finis. En effet si $\mathrm{vol}(F) < +\infty$ avec $F = \Sigma/\Gamma$ alors $-\sigma^2$ est une valeur propre de $L_\Gamma$ associée à la fonction propre constante normalisée $[\mathrm{vol}(F)]^{-\frac{1}{2}}$. En d'autres termes, $\Gamma$ est "spectralement fini" d'ordre

$N \geq 1$ et, en appliquant le théorème 2, on obtient un résultat beaucoup plus précis que la dite conjecture.

*Remarque.* — Dans le cas de l'espace hyperbolique sur les nombres de Cayley (*i.e.* $d = 8$) on a $n = 1$ ou 2 avec $\mathsf{C}aH^1 \simeq \mathsf{H}H^2$.

## Bibliographie

[1] BEREZANSKII Y.U. — *M expansions in eigenfunctions of self-adjoints operator, translations of monographs*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. ; **17**, 1968.

[2] HORMANDER L. — *The spectral functions of an elliptic operator*, Acta Math. **121** (1968), 193–218.

[3] INTISSAR A. & OULD MOUSTAPHA M.V. — *Formule intégrale et développement asymptotique du nombre de points du réseau dans l'espace symétrique de type non compact de rang 1*, À paraître.

[4] KROONWINDER T. — *A new proof of Paley-Wiener theorem for the Jacobi transform*, Ark. Mat. **13** (1975), 145–159.

[5] LAX P.D. & PHILLIPS R.S. — *The asymptotic distribution of lattice points in euclidean and non euclidean spaces*, J. Func. Anal. **46** (1982), 280–350.

[6] LEVITAN B.M. — *Asymptotic formula for the number of lattice points in euclidean and lobacheviskii space*, Russian Math. Surveys **42:3** (1987), 13–42.

[7] MAGNUS W., OBERHETTINGER F. & SONI R.P. — *Formulas and theorem for the special functions of mathematical physics*, Therd enlarged edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1966.

[8] MIATELLO R. & WALLACH N.R. — *The resolvent of the laplacian on locally symmetric spaces*, J. Diff. Geometry **36** (1992), 663–698.

[9] OULD MOUSTAPHA M.V. — *Formule intégrale et développement asymptotique du nombre de point du réseau dans l'espace hyperbolique complexe*, À paraître.

[10] SELBERG A. — *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.

A. INTISSAR
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
B.P. 1014
RABAT
(Maroc)

M.V. OULD MOUSTAPHA
UNIVERSITÉ DE NOUAKCHOTT
B.P. 798
NOUAKCHOTT
(Mauritanie)
Fax : 2222 587-09
Tél : 2222 587-10