

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PETER GREENBERG

MARTIN LOEBL

**Forte connexité des complexes polyédraux**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 11 (1992-1993), p. 65-72

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1992-1993\\_\\_11\\_\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1992-1993__11__65_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## FORTE CONNEXITÉ DES COMPLEXES POLYÈDRAUX

*Peter GREENBERG et Martin LOEBL*

On résume ici des résultats obtenus à Bielefeld, pendant l'été 1992, et lors d'une visite du premier auteur à Prague en octobre 1992. Une version plus longue est en cours de rédaction.

Le premier auteur remercie ses collègues de l'Institut Fourier, en particulier Bernard Parisse, pour leurs commentaires sur une première version.

### I. Introduction

Notre résultat principal est une généralisation d'un théorème classique de la théorie des graphes. Son énoncé demande un peu de notation : on note par  $G = (A, S)$  un graphe,  $A$  et  $S$  étant les ensembles des arêtes et sommets de  $G$ . Pour simplifier l'exposé on demande que les sommets au bord d'une arête soient distincts et qu'ils déterminent l'arête qu'ils bordent. Une orientation d'un graphe,  $\theta = \{\vec{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  est un choix d'une orientation pour chaque arête, c'est-à-dire la désignation d'une source et d'un but de l'arête. On note par  $-\vec{\alpha}$  "l'autre" orientation de  $\alpha$ .

I.1. DÉFINITION. — Soit  $\theta$  une orientation d'un graphe  $G = (A, S)$ . Alors,  $(G, \theta)$  est fortement connexe si pour chaque  $x, y \in S$  il existe un chemin dirigé de source  $x$  et but  $y$ , ainsi qu'un chemin dirigé de source  $y$  et but  $x$ .

(Un chemin dirigé de source  $x$  et but  $y$  est une suite  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$  telle que la source de  $\vec{\alpha}_1$  est  $x$ , le but de  $\vec{\alpha}_n$  est  $y$ , et la source de  $\vec{\alpha}_{i+1}$  est le but de  $\vec{\alpha}_i$ ,  $i \geq 1$ ).

Étant donné un graphe  $G = (A, S)$ , existe-t-il une orientation  $\theta$  telle que  $(G, \theta)$  soit fortement connexe ? Évidemment il faut que la condition suivante soit vérifiée :

(Ci)  $G$  est connexe.

Mais il faut aussi que :

(Cii) Pour chaque  $\alpha \in A$ ,  $G - (\text{int } \alpha)$  est connexe.

( $\text{int } \alpha$  est  $\alpha$  moins les sommets au bord). Parce que sinon, si  $\vec{\alpha}$  est une orientation de  $\alpha$ , il n'y aurait pas de chemin dirigé du but de  $\vec{\alpha}$  à sa source.

I.2. THÉORÈME. —  $G = (A, S)$  possède une orientation fortement connexe si et seulement si (Ci) et (Cii) sont vérifiées.

La démonstration du théorème occupe la section II du présent exposé.

La généralisation de I.2 s'applique aux  $n$ -complexes polyédraux,  $n \geq 2$ . Voici la notation nécessaire pour l'énoncé.

Un  $j$ -polyèdre  $Q$  est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $j$  est la dimension du sous-espace affine minimal de  $\mathbb{R}^N$  qui contient  $Q$ . Le bord  $\partial Q$  est une union de  $(j-1)$ -polyèdres. Chaque  $j$ -polyèdre possède deux orientations,  $\vec{Q} = -\vec{Q}$ , qui induisent sur chaque  $P \in \partial Q$  ( $P$  un  $(j-1)$ -polyèdre) ses deux orientations. On écrit  $d_j \vec{Q} = \sum_{P \in \partial Q} \vec{P}$ , la somme formelle des  $(j-1)$ -polyèdres orientés de  $\partial \vec{Q}$ .

Un 0-complexe (polyédrale)  $\mathcal{K} = (K_0)$  est un ensemble fini  $K_0$  de points. Un  $j$ -complexe  $\mathcal{K} = (K_j, \dots, K_0)$  est l'union d'un  $(j-1)$  complexe  $\mathcal{K}' = (K_{j-1}, \dots, K_0)$  avec un ensemble fini  $K_j$  de  $j$ -polyèdres, modulo des applications "collantes" : pour chaque  $P \in K_j$  on prend un sous-complexe  $Q_P$  de  $\partial P$ , une application  $\theta_P : Q_P \rightarrow \mathcal{K}'$ , dont la restriction à chaque  $k$ -polyèdre est un homéomorphisme affine,  $k \leq j-1$ , et on identifie  $x \sim \theta_P x$ ,  $x \in Q_P$ .

Si  $\mathcal{K} = (K_n, \dots, K_0)$  est un  $n$ -complexe, un  $j$ -cycle orienté est une somme formelle  $z = \sum_{Q_i \in K_j} n_i \vec{Q}_i$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ , telle que  $\sum_i n_i d_j \vec{Q}_i = 0$  (où l'on impose la règle que  $\vec{P} + (-\vec{P}) = 0$  !).

Une orientation  $\theta$  d'un  $n$ -complexe est le choix d'une orientation  $\vec{P}$ , pour chaque  $n$ -polyèdre  $P$ .

I.3. DÉFINITION. — Soient  $\mathcal{K} = (K_n, \dots, K_0)$  un  $n$ -complexe et  $\theta = \{\vec{P}\}_{P \in K_n}$  une orientation.  $(\mathcal{K}, \theta)$  est  $n$ -fortement connexe si pour chaque  $(n-1)$

cycle  $z$  et chaque  $P \in K_n$ , il existe  $n_P^z \in \mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$  tels que

$$z = \sum_{P \in K_n} n_P^z d_n \vec{P}.$$

I.4. THÉORÈME. — Soit  $\mathcal{K} = (K_n, \dots, K_0)$  un  $n$ -complexe. Alors on peut trouver une orientation  $\theta$  qui rende  $(\mathcal{K}, \theta)$  fortement connexe si et seulement si

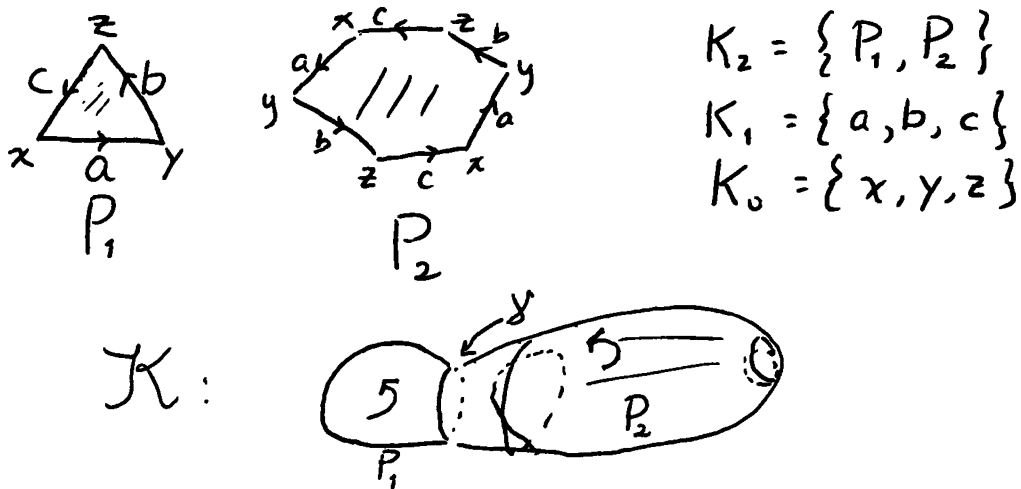
(Gi)  $\overline{H}_{n-1}(\mathcal{K}) = 0$  (c'est-à-dire, chaque  $(n-1)$  cycle peut s'exprimer sous la forme  $\sum_{P \in K_n} m^P d_n \vec{P}$ ,  $m^P \in \mathbf{Z}$ ).

(Gii)  $\overline{H}_{n-1}(\mathcal{K} - \text{int } P)$  est fini pour chaque  $P \in K_n$  (c'est-à-dire, un multiple entier d'un  $(n-1)$ -cycle peut s'exprimer sous la forme  $\sum_{Q \in K_n \setminus \{P\}} m_Q d_n \vec{Q}$ ,  $m_Q \in \mathbf{Z}$ ).

I.5. Remarques.

(a) cas  $n = 1$ . Les différences  $x - y$ ,  $x, y \in S$  engendrent les 0-cycles d'un graphe  $G = (A, S)$ . Comme pour un espace topologique  $X$ ,  $\overline{H}_0 X$  est fini si et seulement si  $\overline{H}_0 X$  est fini, si et seulement si  $X$  est connexe, on retrouve le théorème I.2.

(b) D'où vient le "fini" dans (Gii) ? Regardons l'exemple suivant :



$\mathcal{K}$  se construit en collant le bord de l'hexagone  $P_2$  "deux fois" au bord du triangle  $P_1$ , selon les flèches. Donnons à  $P_1$  l'orientation du sens trigonométrique, et à  $P_2$  l'orientation inverse. Soit  $\vec{\gamma}$  le 1-cycle orienté  $\gamma = d_2 \vec{P}_1$ . On voit que  $-2\vec{\gamma} = d_2 \vec{P}_2$ , d'où  $\overline{H}_1(\mathcal{K} - \text{int } P_1) \simeq \mathbf{Z}/2$ . Mais on a quand même  $-\vec{\gamma} = d_2 \vec{P}_1 + d_2 \vec{P}_2$  !

(Voir aussi la section IV pour quelques remarques géométriques).

## II. La démonstration dans le cas classique (Thm I.2)

On garde la notation de l'énoncé du théorème I.2. D'abord, remarquons que la condition (Cii) est équivalente à

(Cii') chaque arête  $\alpha \in A$  appartient à un cycle et considérons le :

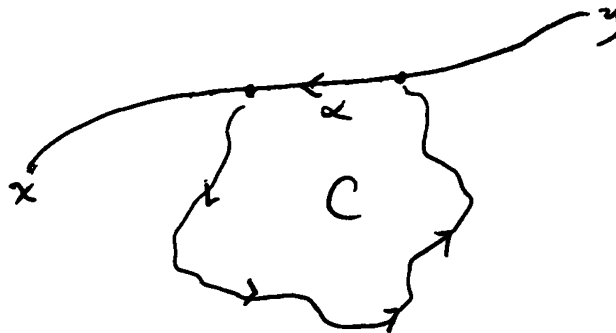
II.1. LEMME. —  $(G, \theta)$  est fortement connexe si et seulement si

- (i)  $G$  est connexe.
- (ii) chaque arête  $\alpha \in A$  appartient à un cycle orienté.

*Démonstration.* — Le fait que la forte connexité de  $(G, \theta)$  implique (i) et (ii) n'est pas difficile et on le laisse au lecteur.

Supposons donc que  $(G, \theta)$  satisfait (i) et (ii). Soient  $x, y \in S$  ; il faut trouver un chemin dirigé de source  $x$  et but  $y$ .

On sait par (i) que  $G$  est connexe. Soit  $\gamma$  un chemin (voir figure) entre  $x$  et  $y$ , et soit  $\alpha \in A$  la première arête rencontrée en parcourant  $\gamma$  de  $x$  à  $y$ , qui est orientée "dans le mauvais sens" (c'est-à-dire



vers  $x$ ). Alors,  $\alpha$  appartient à un cycle orienté  $c$ , par (ii). En remplaçant  $\gamma$  par  $(\gamma - \alpha) \cup (c - \alpha)$ , on s'est ainsi rapproché du point  $y$ . Après un nombre fini de substitutions de ce type (borné par le cardinal de  $A$  !) on a construit un chemin dirigé de  $x$  à  $y$ . ■

Le théorème I.2 est une conséquence d'un résultat plus fort. On verra que, à partir d'un graphe  $G = (A, S)$  qui satisfait (Ci) et (Cii), on peut prendre les arêtes dans n'importe quel ordre, et les munir d'une orientation qui sera, à la fin du processus, fortement connexe.

II.2. DÉFINITION. — Une orientation partielle  $\theta_I$  est une orientation  $\{\vec{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  des arêtes d'un sous-ensemble  $I$  de  $A$ . Si  $\theta_I$  est une orientation partielle d'un graphe  $G$ , un cycle non contradictoire (CNC) est un cycle  $c$  de  $G$  tel qu'on puisse étendre l'orientation  $\theta_I$  en une orientation  $\theta$  pour laquelle  $c$  est orienté.

II.3. THÉORÈME. — Soit  $G = (A, S)$  un graphe, et soit  $\theta_I, I \subset A$  une orientation partielle. Alors, il existe une extension de  $\theta_I$  en une orientation  $\theta$  fortement connexe si et seulement si

(Pi)  $G$  est connexe.

(Pii) chaque arête  $\alpha \in A$  appartient à un CNC.

Remarque. — En posant  $I = \emptyset$ , II.3 implique I.2.

Démonstration. — Par récurrence sur le cardinal de  $A - I$ . Si  $A = I$ , on conclut par le lemme II.1. Supposons II.3 vrai si  $\text{card}(A - I) \leq k$ . Remarquez qu'il suffit de démontrer que (Pi) et (Pii) impliquent l'existence d'une extension fortement connexe  $\theta \geq \theta_I$ ; l'argument dans l'autre sens, d'après II.1, est banal.

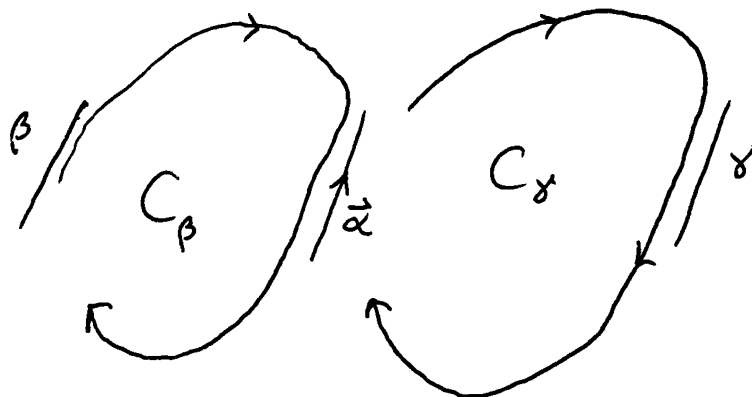
Soient  $G = (A, S)$  un graphe,  $\theta_I$  une orientation partielle,  $\text{card}(A - I) = k + 1$ , qui satisfait (Pi) et (Pii). Choisissons  $\alpha \in A - I$ . S'il existe une orientation  $\vec{\alpha}$  telle que  $\theta_I \cup \{\vec{\alpha}\}$  satisfait (Pii), on conclut par récurrence. Supposons donc que

(\*) il n'existe aucune orientation  $\vec{\alpha}$  de ce type.

Alors (voir figure) il existe  $\beta, \delta \in A$  tels que

( $Q_\beta$ ) chaque CNC  $C_\beta$  qui contient  $\beta$  contient  $\alpha$  et induit l'orientation  $-\vec{\alpha}$  sur  $\alpha$  (car " $\theta_I \cup \{\vec{\alpha}\}$  ne marche pas").

( $Q_\delta$ ) chaque CNC  $C_\delta$  qui contient  $\delta$  contient  $\alpha$  et induit l'orientation  $\vec{\alpha}$  sur  $\alpha$  (car " $\theta_I \cup \{-\vec{\alpha}\}$  ne marche pas")



Mais comme  $\theta_I$  satisfait (Pii),  $\beta$  appartient à un CNC  $C_\beta$ , et  $\delta$  a un CNC  $C_\delta$ . Soit donc  $C = (C_\beta - \alpha) \cup (C_\delta - \alpha)$ . Alors,  $C$  est un CNC, dont l'existence contredit à la fois  $(Q_\beta)$  et  $(Q_\delta)$ , et contredit donc  $(*)$ , pour terminer la preuve.

### III. Version algébrique et généralisation

Comme la théorie de l'homologie repose sur une base algébrique, la démonstration du théorème I.4 dépend d'un lemme qui n'est qu'une version algébrique du théorème I.2.

III.1. DÉFINITION. — Soit  $V$  un groupe abélien libre de rang fini. Une base d'Hilbert de  $V$  est un sous-ensemble  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  de  $V$  tel que pour chaque  $v \in V$  il existe  $n_j^v \in \mathbb{N}$  tels que  $v = \sum_{j=1}^n n_j^v b_j$ .

Exemples. — Soit  $B'$  une base de  $V$ . Alors,  $B' \cup -B'$  ainsi que  $B' \cup \{-\sum_{b \in B'} b\}$  sont des bases d'Hilbert de  $V$ .

III.2. LEMME. — Soient  $V$  un groupe abélien libre,  $B$  un sous-ensemble de  $V$ . Il existe des  $\varepsilon_b \in \{1, -1\}$ ,  $b \in B$ , tels que  $\varepsilon \cdot B = \{\varepsilon_b b, b \in B\}$  soit une base d'Hilbert, si et seulement si

(Bi)  $B \cup -B$  engendrent  $V$ .

(Bii) Pour chaque  $\beta \in B$  il existe  $m_b^\beta \in \mathbb{Z}$ ,  $m_b^\beta \neq 0$  tels que  $\sum_{b \in B} m_b^\beta b = 0$ .

Pour la nécessité de (Bii), supposons que de tels  $\varepsilon_b$  existent. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\beta &= \sum n_b^\beta \varepsilon_b b \\ -\beta &= \sum K_b^\beta \varepsilon_b b.\end{aligned}$$

Si  $n_b^\beta = 0$  on pose  $m_b^\beta = n_b^\beta - \delta_{b\beta}$ . Si  $n_b^\beta > 0$ , on pose  $m_b^\beta = (n_b^\beta + K_b^\beta) \varepsilon_b$ .

La démonstration de la réciproque suit le même chemin (tordu) que celui du théorème II.3 et on l'omet.

La démonstration du théorème II.4 est une application de III.2. Soit alors  $\mathcal{K} = \{K_n, \dots, K_0\}$  un  $n$ -complexe, et choisissons des orientations  $\vec{P}$ ,  $P \in K_n$ . On applique III.2 à

$$V = Z_{n-1}(\mathcal{K}),$$

le groupe des  $(n - 1)$  cycles orientés de  $\mathcal{K}$  et à

$$B = \{d_n \vec{P}\}_{P \in K_n}$$

et on trouve qu'on peut, en changeant éventuellement les orientations des  $P \in K_n$ , construire une orientation  $\theta$  de  $\mathcal{K}$  telle que  $B' = \{d_n \vec{P}\}_{P \in K_n}$  soit une base d'Hilbert de  $V$  si et seulement si  $\overline{H}_{n-1}(\mathcal{K}) = 0$  et

(Hii) Pour chaque  $P, Q \in K_n$  il existe  $m_Q^P \in \mathbb{Z}$ ,  $m_P^P \neq 0$  tels que  $\sum_{Q \in K_n} m_Q^P d_n \vec{Q} = 0$ .

Mais (Hii) est équivalent à

(Hii')  $m_P^P d_n \vec{P} = 0$  dans  $\overline{H}_{n-1}(\mathcal{K} - \text{int } P)$  et comme  $d_n \vec{Q} = 0$  dans  $\overline{H}_{n-1}(\mathcal{K} - \text{int } P)$ ,  $Q \neq P$ , (Hii') implique (Gii).

## IV. Remarques géométriques

Rappelons la condition (Cii') du début de la section II : pour qu'un graphe connexe possède une orientation fortement connexe, il suffit que chaque arête appartienne à un cycle. Peut-on remplacer par une hypothèse "géométrique" analogue la condition (Gii') du théorème I.4 ? La réponse est "oui", mais à une espèce de ramification et à la  $(n - 2)$ -squelette près. Voici les constructions géométriques nécessaires.

IV.1. Notation. — Soient  $Q$  un  $k$ -polyèdre, et  $j \in [0, k - 1]$ . On note par  $Q_{0j}$  l'espace  $Q$ - $(j)$ -squelette du bord de  $Q$  ;  $\partial Q_{0(k-2)}$  en particulier est une union disjointe des  $(j - 1)$  polyèdres ouverts. Un  $n$ -cycle géométrique  $\mathcal{C} = \{C_n, C_{n-1}\}$  est une paire d'ensembles  $C_n, C_{n-1}$  de  $n$ -polyèdres (resp.  $(n-1)$  polyèdres), ainsi que des applications  $a_Q : \partial Q_{0(n-2)} \rightarrow \coprod_{P \in C_{n-1}} P_{0(n-2)}$ ,  $Q \in C_n$  qui sont des homéomorphismes affines dans chaque composante connexe, tel que l'espace  $\mathcal{C} = \coprod_{(Q \in C_n)} Q \coprod_{(P \in C_{n-1})} P / \{a_Q\}$  est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

(La dernière condition dit que chaque  $(n-1)$ -polyèdre possède deux côtés dans  $\mathcal{C}$ ).

Une orientation  $\theta$  d'un  $n$ -cycle géométrique est un ensemble d'orientations  $\{\vec{P}\}_{P \in C_n}$  tel que  $\sum_{P \in C_n} d_n \vec{P} = 0$ .

Maintenant, soit  $\mathcal{K}$  un  $n$ -complexe, et soit  $P \in K_n$ . On dit que  $P$  appartient à un  $n$ -cycle géométrique orienté ramifié (ou cygoré) s'il existe un  $n$ -cycle géométrique orienté  $\mathcal{L} = (L_n, L_{n-1})$  et une application continue  $\ell : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  tel que



$$(i) \quad L_j = \bigcup_{Q \in K_j} \{Q_1, \dots, Q_{m_Q}\}, \quad m_Q \geq 0, \quad j = n, n-1.$$

$$(ii) \quad \ell|_Q = id|_Q \text{ pour chaque } Q \in L_n, L_{n-1} \text{ et chaque } i \in [1, m_Q].$$

(iii) Pour chaque  $P \in K_n$ , les orientations induites sur  $P$  par les  $P_i \in L_n$  sont toutes les mêmes.

Alors, (Gii) est équivalent à :

(Gii') chaque  $P \in K_n$  appartient à un cygoré.

*Exemple.* — Dans le complexe  $\mathcal{K}$  de l'exemple I.5 (b),  $P_1$  appartient à un  $\mathcal{L}$  dont  $L_2 = \{(P_1)_1, (P_1)_2, P_2\}$ ,  $L_1 = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ .

*Remarque.* — Il y a toujours une façon canonique de munir un  $n$ -cycle géométrique quelconque, d'un  $(n-2)$ -squelette. Des exemples montrent qu'il n'y en a pas, pour un  $(n-3)$ -squelette.

## Bibliographie

- [F] FRANK A. — *Graph connectivity and network flows*, Chapitre dans "Handbook of Combinatorics", à paraître.
- [N-W] NASH-WILLIAMS C. ST. J.A. — *On orientations, connectivity and odd vertex pairings in finite graphs*, *Canad. J. Math.* **12** (1960), 555-567.

P. GREENBERG  
 INSTITUT FOURIER  
 Laboratoire de Mathématiques  
 URA188 du CNRS  
 BP 74  
 38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

M. LOEBL  
 K.A.M. M.F.F. U.K.  
 Charles University  
 Malostranste 25  
 11800 PRAGUE 1 (Rép. Tchèque)