Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Le flot géodésique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 59-64
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__59_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Le flot géodésique

Yves COLIN DE VERDIÈRE

Institut Fourier *
Université de Grenoble 1
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

* Laboratoire associé au CNRS.

1. Des équations d'Euler-Lagrange à celles de Hamilton

Les géodésiques d'une variété riemannienne M_n parcourues à vitesse constante sont les extrêmales de l'énergie; si $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ et $L : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par

$$L(x,v) = \frac{1}{2}\ \Sigma g_{ij}(x) v_i v_j = \frac{1}{2}\ \|v\|^2\ ,$$

l'énergie du chemin γ est donnée par :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\, dt\ .$$

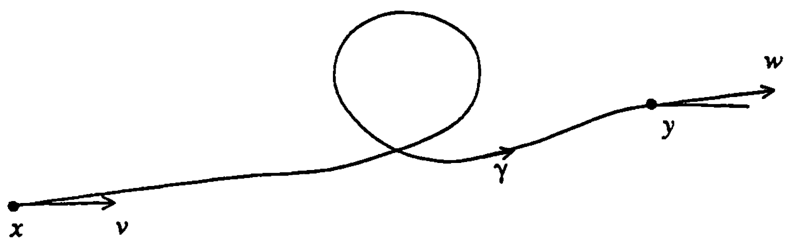
Les géodésiques sont donc les solutions des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial v_i}\Big) = \frac{\partial L}{\partial x_i}\ ,$$

qui, dans notre cas, prennent la forme :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma\ \Gamma_{i,j,k}(x) \frac{dx_j}{dt} \cdot \frac{dx_k}{dt}\ .$$

Si $UM \subset TM$ est l'ensemble des vecteurs tangents de norme 1, le flot géodésique est le groupe à 1 paramètre $\varphi_t : UM \longrightarrow UM$ obtenu par intégration de l'équation différentielle précédente, ou encore géométriquement :



$(y,w) = \varphi_t(x,v)$ si y est obtenu à l'instant t sur la géodésique issue de x et avec vecteur vitesse initiale v et w est le vecteur vitesse de la même géodésique au point y.

Les propriétés du flot géodésique sont plus aisées à étudier en considérant les images des courbes précédentes dans le fibré $U^*M \subset T^*M$ unitaire cotangent :

$$T^*M = \bigcup_{x\in M} (T_x M)^*\ .$$

La transformation de Legendre $\mathcal{L} : TM \longrightarrow T^*M$ définie en général par $\mathcal{L}(x,v) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}\right)$ est ici simplement l'isomorphisme canonique de TM sur T^*M donné par la métrique euclidienne g_x de chaque $T_x M$.

Si on définit l'hamiltonien $H : T^*M \longrightarrow \mathbf{R}$ par :

$$H(x,p) = \big(pv - L(x,v)\big) \circ \mathcal{L}^{-1}\ ,$$

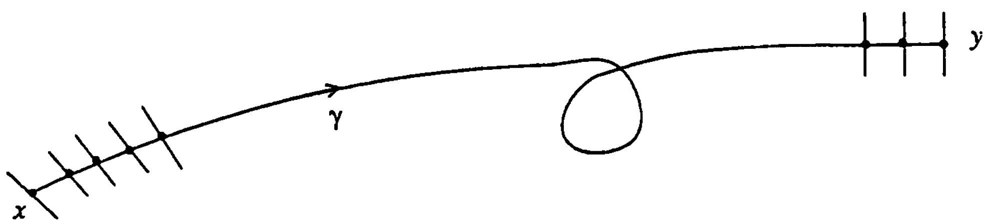
on vérifie que $H(x,p) = \frac{1}{2}\ \Sigma g^{ij}(x)p_ip_j = \frac{1}{2}\ ||p||^2$, où $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ et donc la norme est la norme euclidienne naturelle associée à g_x sur $(T_xM)^*$.

L'équation différentielle des images par $\mathcal{L}$ des géodésiques s'obtient en calculant de 2 façons la différentielle de H et en y incorporant les équations d'Euler-Lagrange. On obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \ ; \end{cases}$$

Ces équations sont appellées *équations canoniques*. Cette écriture très simple permet d'étudier le flot géodésique dans son contexte géométrique naturel : la ***géométrie symplectique*** du fibré T^*M.

Raisonner sur les covecteurs au lieu des vecteurs revient à raisonner en termes d'hyperplans dans le tangent plutôt qu'en vecteurs tangents. On peut penser ces hyperplans comme les plans



tangents aux fronts d'onde.

Le cotangent est aussi le milieu naturel de l'analyse, que ce soit l'analyse de Fourier : la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $\hat{f} : (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{C}$, ou celle des opérateurs (pseudo)-différentiels (calcul symbolique).

2. La géométrie symplectique

Une variété symplectique (X_{2n}, ω) est la donnée d'une 2-forme différentielle ω sur une variété X de dimension paire $2n$ telle que $d\omega = 0$ et ω est en chaque point une forme bilinéaire (antisymétrique) non dégénérée sur l'espace tangent.

Le cotangent T^*M_n est équipé d'une forme symplectique canonique : la différentielle $\omega = d\lambda$ de la 1-forme canonique :

$$\lambda(x,p)(\delta x, \delta p) = p\delta x \ ,$$

ou encore en coordonnées locales :

$$\lambda = \Sigma p_i dx_i \ , \ \omega = \Sigma dp_i \wedge dx_i \ .$$

A toute fonction $H : X \longrightarrow \mathbf{R}$ est alors associée son gradient $\mathfrak{X}_H$ au sens symplectique défini par :

$$\omega(\mathfrak{X}_H, \cdot) = -dH(\cdot) .$$

Les équations différentielles $\frac{dz}{dt} = \mathfrak{X}_H$ sont alors exactement les équations canoniques lorsque ω est donnée par la formule précédente. On note Ψ_t le flot de $\mathfrak{X}_H$, qui est donc l'image par $\mathcal{L}$ du flot géodésique : on l'appelle encore flot géodésique. On en déduit les "lois de conservation" :

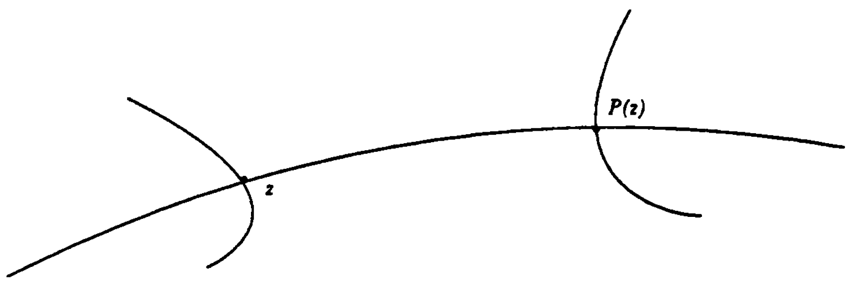
$$\mathcal{L}_{\mathfrak{X}_H}\omega = i(\mathfrak{X}_H)d\omega + d\big(i(\mathfrak{X}_H)\omega\big) = -d(dH) = 0$$
$$\mathcal{L}_{\mathfrak{X}_H} H = dH(\mathfrak{X}_H) = -\omega(\mathfrak{X}_H, \mathfrak{X}_H) = 0 ,$$

qui expriment que $\Psi_t^*(\omega) \equiv \omega$ et $H \circ \Psi_t \equiv H$: les Ψ_t sont des transformations symplectiques, préservant H.

Donc le flot géodésique Ψ_t préserve la *mesure de Liouville* $\mu_L = \frac{1}{n!}\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n}$ et son analogue $\frac{\mu_L}{dH}$ sur U^*M.

On en déduit, lorsque M est de volume fini (et donc U^*M aussi) que le flot géodésique possède la propriété de récurrence de Poincaré : $\forall\ \Omega \subset U^*M$, ouvert non vide, $\forall\ T > 0$, $\exists t \geqslant T$, $\Psi_t(\Omega) \cap \Omega \neq \emptyset$.

On en déduit aussi l'existence d'une structure symplectique sur "l'espace des géodésiques" : si $\Sigma \subset U^*M$ est une hypersurface transverse à $\mathfrak{X}_H$ la forme $\omega\restriction_\Sigma$ est symplectique et $\omega(\mathfrak{X}_H, V) = -dH(V) = 0$ si V est tangent à U^*M, donc ω est indépendante de Σ :

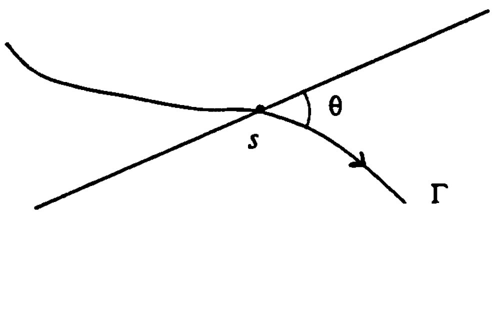


$\Sigma_0, \omega\restriction_{\Sigma_0} = \omega_0$ $\qquad$ $\Sigma_1, \omega_1 = \omega\restriction_{\Sigma_1}$

on a $P^*(\omega_1) = \omega_0$.

En dimension 2, si Γ est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne s et qu'on repère les géodésiques par leur intersection avec Γ et leur angle θ avec Γ, la forme ω_0 est donnée par :

$$\omega_0 = \sin\theta d\theta \wedge ds .$$



On en déduit une mesure canonique sur les géodésiques d'une variété riemannienne.

3. Propriétés particulières du flot géodésique

Le formalisme précédent (hamiltonien, géométrie symplectique) a permis d'introduire des invariants fondamentaux comme la mesure de Liouville. Il permet aussi de décrire des propriétés tout à fait particulières comme la "complète intégrabilité".

Deux fonctions $f, g : (X_{2n}, \omega) \longrightarrow \mathbf{R}$ sont dites en involution si leur crochet de Poisson $\{f, g\} = df(\mathfrak{X}_g) = -dg(\mathfrak{X}_f) = \omega(\mathfrak{X}_f, \mathfrak{X}_g)$ est nul. On a alors l'identité :

$$[\mathfrak{X}_f, \mathfrak{X}_g] = \mathfrak{X}_{\{f,g\}} = 0 \quad \text{(Jacobi)} ,$$

qui exprime la commutation des gradients. En particulier, le nombre maximal de fonctions fonctionnellement indépendantes de crochets de Poisson 2 à 2 nuls est n; plus précisément, un système complètement intégrable est la donnée d'une application $F = (f_1, \ldots, f_n) : X_{2n} \longrightarrow \mathbf{R}^n$, qui soit presque partout une submersion et les $\{f_i, f_j\} \equiv 0$. La fibre générique de F est alors une sous-variété de dimension n, munie d'une action localement libre de $\mathbf{R}^n$ donnée infinitésimalement par les $\mathfrak{X}_{f_i}$. Si de plus F est propre, ces fibres sont des tores et les trajectoires individuelles des $\mathfrak{X}_{F_i}$ sont des droites (rationnelles ou non) de ces tores : si f_1 est l'hamiltonien du flot géodésique, celui-ci est dit complètement intégrable. C'est le cas pour les surfaces de révolution :

$$g = ds^2 + a^2(s)d\theta^2 \ , \ H = \frac{1}{2}(\Sigma^2 + \frac{1}{a^2(s)}\Theta^2) = f_1 \ , \ f_2 = \Theta \ (f_2 \circ \mathcal{L} = a^2\dot{\theta}) \ ,$$

pour les ellipsoïdes et aussi pour beaucoup d'autres exemples, souvent connectés à des problèmes de déformations isospectrales (à 1 variable), par exemple l'équation de Korteweg-de-Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

qui peut être vue comme un système hamiltonien sur $L^2(\mathbf{R})$, munie de $\omega(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f g'$, est complètement intégrable; les intégrales premières étant les invariants spectraux de $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$.

4. Quantification

La mécanique quantique dans la formulation de Schrödinger associe à tout hamiltonien $H : T^*M \longrightarrow \mathbf{R}$ un opérateur $\widehat{H}$, auto-adjoint sur $L^2(M)$. Le laplacien Δ est ainsi naturellement associé à l'hamiltonien $H(x, p) = ||p||^2$, qui est son "symbole principal". On doit donc s'attendre à des relations directes entre le laplacien et le flot géodésique.

Classique	*Quantique*
T^*M	$L^2(M)$
ω	$\langle \| \rangle_{L^2}$
$H(x,p)$	$\int_M \|\nabla f\|^2$
$\mathfrak{X}_H$	Δ
$\frac{dz}{dt} = \mathfrak{X}_H$	$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ (équation de Schrödinger)
Ψ_t	$V(t) = e^{it\Delta}$
préserve ω	unitaire
géodésiques périodiques	fonctions propres du laplacien
longueurs des géodésiques périodiques	spectre du laplacien

Citons en particulier le théorème suivant qui a été prouvé dans [CV1] par l'équation de Schrödinger et dans [Ch et DG] par l'équation des ondes :

Pour une métrique g générique sur une variété compacte M, le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs des géodésiques périodiques.

On a aussi l'ex-conjecture de Schnirilmann prouvée par Zelditch dans le cas des surfaces à courbure -1 et par l'auteur dans le cas général ([CV2]).

Si le flot géodésique est ergodique, il existe une suite φ_{n_j} de densité 1 ($\lim \frac{\#\{\lambda_{n_j} \leqslant \lambda\}}{\#\{\lambda_n \leqslant \lambda\}} = 1$) telle que les fonctions propres soient équireparties dans M et même en un certain sens dans U^*M :

$$\forall \Omega \subset M, \quad \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_\Omega |\varphi_{n_j}|^2 = \frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} .$$

Références

[A] ARNOLD. — *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, , 1976.

[Ch] CHAZARAIN. — *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*, Invent. Math., **24** (1974), 65–82.

[CV1] COLIN DE VERDIÈRE. — *Spectre du laplacien et longueur des géodésiques périodiques II*, Compositio Math., **27** (1973), 159–184.

[CV2] COLIN DE VERDIÈRE. — *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys., **102** (1985), 497–502.

[DG] DUINSTERMAAT, GUILLEMIN. — *Spectrum of elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Invent. Math., **29** (1975), 39–79.

[GS] GUILLEMIN, STERNBERG. — *Symplectic techniques in physics*, Cambridge, 1990.