Bruno Colbois

Introduction au laplacien

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 49-57
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__49_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Introduction au Laplacien

Bruno COLBOIS

Mathematisches Institut
der Universität Bonn
Beringstrasse 1
D-W 5300 BONN 1
ALLEMAGNE

EPF
Département de Mathématiques
10-15 LAUSANNE-ECUBLENS
SUISSE

Remarque préalable: Pour plus de détails, on consultera [BD1], [BGM], [CH]. En particulier, l'essentiel des preuves se trouve dans [BD1] ch.3.

I. LE LAPLACIEN

Soit (M,g) une variété riemannienne C^∞. Le laplacien Δ d'une fonction $f \in C^2(M)$ est la fonction définie par $\Delta f = -$ divgrad f, ou, de façon équivalente, par $\Delta f = \delta df$ où d est la différentielle extérieure et δ son adjoint relativement au produit scalaire usuel de $L^2(M,g)$. En particulier, le laplacien est un invariant riemannien en ce sens qu'il commute avec isométries.

Expression en coordonnées

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$, un système de coordonnées sur un ouvert de M et $\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \}$ la base de l'espace tangent associé.

Soit $g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, $V = \sqrt{\det(g_{ij})}$ et g^{ij} la matrice $(g_{ij})^{-1}$. Le produit scalaire usuel sur $L^2(M,g)$ est : $< f, h > \ = \int_M fh\, dV$.

On a : $\Delta f(x_1, \dots, x_n) = -\frac{1}{V} \sum_{i\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(g^{ij}\, V \frac{\partial f}{\partial x_j})\,(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve:

Rappelons en quelques mots les notions de divergence et de gradient (cf. [BGM] p.120 et suivantes).

La forme volume ω s'écrit $V\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

La divergence d'un champ de vecteurs X est définie par $\operatorname{div} X \cdot \omega = d(i_X\omega)$ où $i_X\omega(X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{n-1})$. La divergence vérifie

$$\operatorname{div}(f\cdot X) \ = \ f \operatorname{div} X + df(X).$$

δ est l'opérateur dual i.e. $\delta\alpha = -\operatorname{div} \alpha^*$ où α est une 1– forme et α^* le champ de vecteurs associé. On a :

$$\int_M < df\ \alpha > dV \ = \ \int_M f\, \delta\alpha\, dV \ .$$

où $< \alpha\ \beta >$ est le produit scalaire usuel sur $(T_pM)^*$.

Expression locale de la divergence

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{V}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(VX_i) \quad \text{où} \quad X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\delta\alpha = -\frac{1}{V}\sum_{i\,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij} V \alpha_j \right) .$$

Le gradient de f est : grad f = $df^{\#}$ et ainsi $\operatorname{grad} f = \sum_{i\,j} \left(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$

On obtient donc immédiatement l'expression voulue.

Remarque Dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, où $g_{ij} = \delta_{ij}$, on retrouve l'expression

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} .$$

Formule de Green

Soient $h \in C^1(M)$, $f \in C^2(M)$ telles que h gradf soit à support compact..

Alors on a : $\int_M (h\Delta f - \langle \operatorname{grad} f \operatorname{grad} h \rangle)\, dV = 0$

ainsi $\int_M h\Delta f\, dV = \int_M \langle \operatorname{grad} f \operatorname{grad} h \rangle\, dV.$

où $\langle \operatorname{grad} f \operatorname{grad} h \rangle$ est le produit scalaire usuel sur T_pM.

On déduit en particulier :

1. $\int_M \Delta f\, f\, dV = \int_M \langle \operatorname{grad} f \operatorname{grad} f \rangle\, dV \geq 0$
2. Si $h \in C^2(M)$, $\int_M \Delta f\, h\, dV = \int_M f\, \Delta h\, dV$

Remarques 1. Ainsi Δ est un opérateur différentiel d'ordre 2, symétrique et positif. Dès lors que M est complète, il admet une unique extension à un opérateur autoadjoint.

2 . L'une des justifications à cette définition du laplacien est qu'il vérifie la relation 1 ci-dessus. On a une forme quadratique naturelle, qui à toute fonction $f \in C^1(M)$ associe la forme quadratique $\int_M \langle \operatorname{grad} f \operatorname{grad} f \rangle\, dV$ correspondant à l'énergie (voir plus bas pour d'autres développements dans cette direction) et le laplacien est l'opérateur qui est naturellement associé à cette forme quadratique relativement au produit scalaire usuel de $L^2(M,g)$.

Cas où M est une variété à bord ∂M

La formule de Green devient :

$$\int_M (\Delta f\, h - \langle \operatorname{grad} f\ \operatorname{grad} h \rangle)\, dV = \int_{\partial M} h(\nu f) dA$$

où dA est la forme volume de ∂M et νf la dérivée directionnelle de f dans la direction de la normale unité ν à ∂M dirigée vers l'intérieur.

$$\int_M (\Delta f\, h - \Delta h\, f)\, dV = \int_{\partial M} (h\nu f - f\nu h)\, dA.$$

II. LE SPECTRE

Problème aux valeurs propres pour M compacte

On cherche à résoudre les équations suivantes :

1) Si (M,g) est compacte, sans bord

$$\Delta f = \lambda f$$

2) Si (M,g) est compacte à bord ∂M

a) $\begin{cases} \Delta f = \lambda f \text{ sur } \overset{\circ}{M} \\ f|_{\partial M} \equiv 0 \end{cases}$ (Problème de Dirichlet)

ou

b) $\begin{cases} \Delta f = \lambda f \text{ sur } \overset{\circ}{M} \\ \nu f|_{\partial M} \equiv 0 \end{cases}$ (Problème de Neumann).

Notons que les conditions $f|_{\partial M} \equiv 0$ et $\nu f|_{\partial M} \equiv 0$ font que Δ est symétrique.

Etant donnée (M,g), on cherche tous les nombres λ tels qu'il existe une solution non triviale $u \in C^\infty(M)$ aux équations ci-dessus. Les λ possibles sont ≥ 0. Un tel λ est appelé valeur propre et une fonction u associée fonction propre.

Théorème

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte. Considérons l'un des trois problèmes aux valeurs propres ci-dessus.

1. Le spectre de Δ, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres, consiste en une suite infinie $(0) < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \nearrow \infty$.
2. Chaque valeur propre λ_i est de multiplicité finie et les espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux dans $L^2(M, V_g)$.
3. La somme directe des espaces propres $E(\lambda_i)$ est dense dans $L^2(M, V_g)$.

Exemple: Le cercle S^1 avec sa métrique usuelle. On a $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} = (2\pi n)^2$. Les fonctions propres sont sin2πn et cos2πn. On tombe sur les séries de Fourier habituelles.

Remarques

1. Chaque fonction propre est en fait analytique.
2. 0 est valeur propre si M est compacte sans bord ou pour le problème de Neumann. La fonction propre est la fonction constante.
3. Rares sont les exemples de variétés où l'on puisse calculer le spectre ou même quelques valeurs propres (sphère standard, tores plats, projectifs, ...)

En général, on peut distinguer deux types de problèmes.

Problèmes directs Connaissant la géométrie de M (courbure, volume, diamètre, rayon d'injectivité), estimer le spectre de (M,g). En particulier λ_1 (inégalités isopérimétriques) ou le comportement asymptotique.

Exemple 1. La première valeur propre non nulle d'une variété riemanienne compacte à courbure sectionelle et diamètre borné est bornée inférieurement par une constante ne dépendant que de la dimension de la variété. (Voir par exemple [BBG] et [GA] pour d'autres généralisations).

Exemple 2 : Formule de Weyl.

Soit $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) inférieures à λ. Alors on a : $N(\lambda) \sim \omega_n (\mathrm{vol}\, M)\, \lambda^{n/2} \dfrac{1}{(2\pi)^n}$, ω_n = volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Problèmes inverses En supposant le spectre de (M,g) connu, quelles informations peut-on déduire sur la géométrie de (M,g) ?

Exemple-type On sait que deux variétés isométriques ont même spectre. Réciproquement, est-ce que la connaissance du spectre détermine la métrique ? Autrement dit, si spectre (M,g_1) = spectre (M,g_2) (avec multiplicité), est-ce-que (M,g_1) est isométrique à (M,g_2) ?

Notons que le spectre détermine la dimension et le volume de la variété et, en dimension 2, la caractéristique d'Euler ([BGM] p.222-223)

La réponse est parfois positive : les tores plats de dimension 2 sont déterminés par leur spectre ainsi que la sphère standard en dimension ≤ 6.

Non, le plus souvent. Pour tout $g > 3$, il existe deux surfaces à courbure -1 , de genre g, isospectrales et non isométriques.

Il existe deux tores plats de dimension 8 isospectraux et non isométriques.
Lorsque de tels exemples sont connus, on peut alors étudier la structure des ensembles isospectraux (voir l'exposé de B.Brooks).

Problèmes ouverts: surface de genre 2,3 avec $K \equiv -1$, S^n où $n > 6$, tores plats de dimension 3,4,5,6,7.
Voir [BD2] Séminaire Bourbaki.

III. CARACTERISATION VARIATIONNELLE ET PRINCIPE DU MIN-MAX

Définition Soit $f \in C^1(M)$. L' énergie de f (ou intégrale de Dirichlet) est

$$E(f) = \int_M |df|^2 V_g.$$

Si $f \neq 0$, on pose : $R(f) = \dfrac{\int_M |df|^2 V_g}{\int_M f^2 V_g}$

R(f) est appelé le quotient de Rayleigh de f.

Caractérisation variationnelle

Notons ϕ_i la fonction propre associée à λ_i. Alors on a:

$$\lambda_k = \inf\{\ R(u) \mid u \neq 0,\ u \text{ est } L^2 - \text{orthogonale à } \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}\ \}$$

où u est dans $H^1(M)$ et vérifie $u_{|\partial M} = 0$ pour le cas du problème de Dirichlet.
En outre, toute fonction u telle que $R(u) = \lambda_k$ est une fonction propre pour λ_k.

Par exemple, pour estimer λ_1 dans le cas d'une variété sans bord, il suffit de regarder les fonctions d'intégrale nulle.

Cette caractérisation variationnelle pourrait faire penser qu'il faut connaître $\phi_1, \dots, \phi_{k-1}$ pour estimer λ_k. Il n'en est rien. On a les deux autres caractérisations suivantes :

Max-Min : $\lambda_k = \sup_{M_k} \inf\ \{\ R(u) \mid u \text{ est } L^2\text{–orthogonale à } M_k,\ u \neq 0\}$

où M_k décrit les sous-espaces vectoriels de dimension k de $H^1(M)$ (et de dim. k-1 avec condition au bord nulle dans le cas du problème de Dirichlet).

<u>Min-Max</u> : $\lambda_k = \inf\limits_{L_k} \sup \{R(u) \mid u \in L_k, u \neq 0\}$ où L_k décrit les sous-espaces vectoriels de dimension k+1 de $H^1(M)$ (et de dim. k avec condition au bord nulle pour le problème de Dirichlet).

<u>Exemple d'utilisation de ces caractérisations variationnelles</u>

(M,g) compacte, sans bord, avec spectre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et fonctions propres associées $\phi_0, \phi_1, \dots$. On suppose que $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$, Ω_i domaines deux à deux disjoints dans M. Soit $\mu(i)$, la première valeur propre du problème de Dirichlet de Ω_i et $\nu(i)$ la première valeur propre non nulle du problème de Neumann de Ω_i

Alors.: (i) $\lambda_{n-1} \leq \max\limits_{i=1}^{n} \mu(i)$

(ii) $\lambda_n \geq \min\limits_{i=1}^{n} \nu(i)$

<u>Preuve</u>

(i) On utilise (b) avec L_k composé des fonctions propres de $\mu(i)$ étendues par 0 hors de Ω_i .

(ii) On considère l'application

$$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$
$$(a_0, \dots, a_n) \to \left(\int_{\Omega_k} \sum a_i \phi_i \right)_{k=1}^{n}$$

$\exists\ (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ avec $\psi(a_0, \dots, a_n) = 0$.

Soit $\phi = \sum\limits_{l=0}^{n} a_i \phi_i$. $\int_{\Omega_k} \phi dV = 0$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$.

$\Rightarrow R_{\Omega_k}(\phi) \geq \nu(k)$

On en déduit : $R(\phi) \geq \min\limits_{k=1}^{n} \nu(k)$. Or $R(\phi) \leq \lambda_n$.

<u>Définition</u> Soit $f : M \to \mathbb{R}$ continue. <u>L'ensemble nodal</u> de f est l'ensemble $f^{-1}(0)$ et un <u>domaine nodal</u> de f est une composante de $\overline{M} \setminus f^{-1}(0)$.

Le <u>théorème de Courant</u> "Le nombre de domaines nodaux de ϕ_k est inférieur ou égal à k + 1 " est conséquence directe de la première caractérisation. (Voir [CH]).

<u>Cas où M est non compacte</u>

1. Le fait de se restreindre à L^2 (M,g) devient une restriction sérieuse. Par exemple, si le volume n'est pas fini, la fonction constante ne peut être prise en compte.

2. D'une part, il est plus délicat de définir le spectre, et, en général, il n'est pas discret. Il suffit de penser à $\mathbb{R}$. Cependant, pour M sans bord :
$\lambda_0 = \inf \{ R(u) \mid u \in L^2(M,g)\ , u \neq 0, u \in C^1 \}$ joue souvent un rôle important.
<u>Ex.</u> $\lambda_0(\mathbb{R}^n) = 0$
$\lambda_0(\mathbb{H}^n) = \frac{(n-1)^2}{4}$.

<u>Problèmes</u>

1. Lire les "rares" valeurs propres dans le spectre continu, c'est-à-dire celles pour lesquelles existent des fonctions propres dans $L^2(M)$.
2. Existence de fonctions harmoniques (i. e. vérifiant $\Delta f = 0$) qui à défaut d'être intégrables, sont bornées ou positives.

IV. APPLICATIONS HARMONIQUES

On sait que les géodésiques correspondent aux extrémités de la fonctionnelle d'énergie :

si $\gamma : [a,b] \to M$ est lisse, on pose $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b < \dot\gamma(t)\ \dot\gamma(t) > dt.$

On peut généraliser cette fonctionnelle d'énergie à des applications de (N,h) dans (M,g) et chercher ses extrema. (Voir [E-L], [J]).

Soit f : (N,h) $\to$ (M,g). On choisit des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ pour N et $(y_1, \dots, y_m)$ pour M . On a : $Df(x) = \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}\ dx_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y_i}$ et on appelle énergie l'intégrale de la norme de Df : $E(f) = \int_N e(f)\, dV_N$ où $e(f) = \frac{1}{2}\ h^{\alpha\beta}(x)\ g_{ij}\ (f(x)) \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f^j}{\partial x_\beta}$ (où l'on omet de noter le signe somme).

Si f est de classe C^2 et $E(f) < \infty$, et si f est un point critique de E, on dit que f est <u>harmonique</u>. Elle satisfait les équations d'Euler – Lagrange correspondant à la fonctionnelle E :

$\Delta_N f^i + h^{\alpha\beta}\,\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\ f^j \frac{\partial}{\partial x_\beta} f^k = 0$ où $\{\Gamma^i_{jk}\}$ sont les symboles de Christofeld de (M,g).
Si $M = \mathbb{R}^m$, $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ et on a alors : $\Delta f^i \equiv 0$.

Schéma de preuve pour $M = \mathbb{R}^m$

$$\frac{d}{dt}E(f+t\varphi) = \frac{d}{dt}\int_N \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} + t\,\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial x_\beta} + t\,\frac{\partial \varphi^j}{\partial x_\beta}\right)\sqrt{h}\,dx$$

$$= \int_N h^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_\beta}\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}\sqrt{h}\,dx = -\int_N \varphi^i \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(h^{\alpha\beta}\sqrt{h}\,\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{h}\,dx = 0 \quad \forall\ \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(h^{\alpha\beta}\sqrt{h}\,\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}\right) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Delta f^i = 0.$$

REFERENCES

[BBG] P.Bérard, G.Besson, S.Gallot, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. 80 (1985) 295.

[BD1] P. Bérard, *Spectral Geometry Direct and Inverse Problems* , Lect. Notes in Math. 1207 (1986).

[BD2] P.Bérard , *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Sém. Bourbaki 705 (1988-89)

[B-G-M] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes in Math. 194, (1971).

[CH] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press (1984).

[E-L] J.Eells - L.Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull.London Math. Soc; 10 (1978), 1-68.

[GA] S.Gallot, *Inégalité isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Astérisque 163-164 (1988) P.31-91.

[J] J.Jost, *Nonlinear Methods in Riemannian and Kählerian Geometry*, Birkhäuser