SÉMINAIRE DE THÉORIE
SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PAUL SCHMUTZ

Une paramétrisation de l'espace de Teichmüller de genre g donnée par $6g-5$ géodésiques explicites

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 59-64
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__59_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (59–64)

UNE PARAMÉTRISATION DE L'ESPACE DE TEICHMÜLLER DE GENRE g DONNÉE PAR $6g - 5$ GÉODÉSIQUES EXPLICITES

par *Paul SCHMUTZ* (*)

1. Introduction

Les longueurs d'un ensemble fini de géodésiques simples fermées donnent une paramétrisation pour l'espace de Teichmüller de genre g. Ici, je présenterai des ensembles explicites de géodésiques, ils permettent de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Les longueurs de $6g-5$ géodésiques simples fermées donnent une paramétrisation pour l'espace de Teichmüller $T(g)$ de genre g.*

Il n'est pas possible de donner une paramétrisation de l'espace de Teichmüller $T(g)$ qui est de dimension $6g-6$, avec les longueurs de $6g-6$ géodésiques, ce théorème donne donc le nombre minimal $6g-5$. Ce théorème a donc de l'intérêt théorique, mais aussi pratique quand on veut effectuer des simulations numériques sur des surfaces de Riemann.

Un deuxième but de ce théorème est le suivant.

Soit F un ensemble de n géodésiques simples fermées, et $h(F) : T(g) \to \mathbb{R}^n$ l'application qui associe à une surface $M \in T(g)$ les longueurs des géodésiques de F dans M. Cette fonction a-t-elle des points singuliers? Est-elle une immersion ou un plongement? Cela dépend bien-sûr de F. Dans le cas où F est une paramétrisation de $T(g)$, $h(F)$ est un plongement. Il est donc intéressant de connaître des ensembles explicites de géodésiques qui sont une paramétrisation, voir p. ex. [2].

Dans la littérature on trouve généralement une paramétrisation de $T(g)$, avec $9g-9$ géodésiques données de manière géométrique comme les ensembles présentés

(*) L'auteur a été soutenu par le Fonds National Suisse.

ci-dessous. Seppälä/Sorvali [3], [4] ont donné une paramétrisation de $T(g)$ à l'aide de $6g-4$ géodésiques, mais de façon algébrique ce qui a aussi ses avantages.

Avec les méthodes utilisées pour la démonstration du Théorème 1, on peut aussi démontrer le théorème suivant, voir [1].

THÉORÈME 2. — *La longueur de $6g-6+3n$ géodésiques donne une paramétrisation pour l'espace de Teichmüller $T(g,n)$ de genre g et avec n composantes de bord qui sont des géodésiques.*

Le nombre $6g-6+3n$ est aussi minimal mais est même égal à la dimension de $T(g,n)$. Ce théorème n'est cependant pas nouveau, il a été prouvé par T. Sorvali [5] avec d'autres méthodes.

Le contenu de cet article est présenté dans [1] d'une manière plus détaillée.

2. Une paramétrisation pour des surfaces de signature $(1,n)$

Conventions :

Une *surface* est une surface de Riemann orientable et orientée de courbure constante -1.

Une *géodésique* est une géodésique simple fermée ou la classe d'une géodésique simple fermée dans l'espace de Teichmüller correspondant.

Les paramètres de *twist* sont mesurés eu égard à la division en pantalons de la surface qui est toujours donnée de façon explicite.

Pour dire que les longueurs d'un ensemble F de géodésiques sont une paramétrisation de l'espace de Teichmüller, on dira simplement que cet ensemble F est une paramétrisation.

Notations. — *L'espace de Teichmüller* de genre g est noté $T(g)$.

Si une surface a un bord non vide, alors le bord est constitué par un nombre n de géodésiques et l'espace de Teichmüller correspondant est noté $T(g,n)$.

DÉFINITION. — (i) Soient a et b deux géodésiques. Alors $i(a,b)$ représente le nombre de points d'intersections entre a et b.

(ii) Soit M une surface de signature $(1,1)$ et soient a,b et c trois géodésiques à l'intérieur de M telles que $i(a,b)=i(a,c)=i(b,c)=1$. On appelle alors $\{a,b,c\}$ un *triangle*.

Les trois géodésiques de $\{a,b,c\}$ constituent le bord de deux triangles hyperboliques isométriques dans M. Le terme triangle dans ce contexte, peut être l'ensemble $\{a,b,c\}$ ou un de ces triangles hyperboliques ou les deux à la fois.

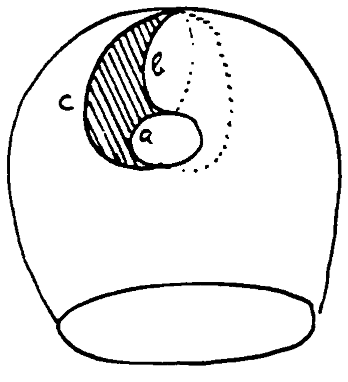

Figure 1 : Triangle $\{a, b, c\}$ pour une surface de signature $(1,1)$

LEMME 1. — *Soit M une surface de signature* $(1,1)$ *et soit* $\{a, b, c\}$ *un triangle de M. Alors* $\{a, b, c\}$ *est une paramétrisation de* $T(1,1)$.

Preuve. — Soit z la géodésique du bord de la surface M de signature $(1,1)$. Alors $\{a, z\}$ et le twist le long de la géodésique a fournissent des paramètres de Fenchel-Nielsen pour $T(1,1)$. Il faut montrer que ces paramètres sont bien déterminés par $\{a, b, c\}$.

Soit T le triangle hyperbolique correspondant à $\{a, b, c\}$. T est déterminé par les trois longueurs de a, de b et de c, ceci détermine alors l'angle dirigé de a à b ce qui mesure le twist le long de a. Par la trigonométrie hyperbolique, la longueur de z se calcule à l'aide des longueurs de a, de b et de c. □

DÉFINITION. — Un *ensemble standard* pour une surface M de signature $(1,n)$ contient les $2n+1$ géodésiques, à l'intérieur de M, suivantes :

(i) une géodésique non-divisante notée e.

(ii) les géodésiques mutuellement disjointes $a_1, \dots, a_n$ telles que $i(a_i, e) = 1$ pour $i = 1, \dots, n$.

(iii) les géodésiques mutuellement disjointes $b_1, \dots, b_n$ telles que $\{a_i, b_i, e\}$ soit un triangle pour $i = 1, \dots, n$.

Pour un ensemble standard, la notation suivante fait partie de la définition : les géodésiques du bord de M sont appelées $d_1, \dots, d_n$. En outre, d_i, a_i, a_{i+1} sont les géodésiques du bord d'un pantalon Y_i, $i = 1, \dots, n$ (dans tout l'article i est modulo n dans ce contexte).

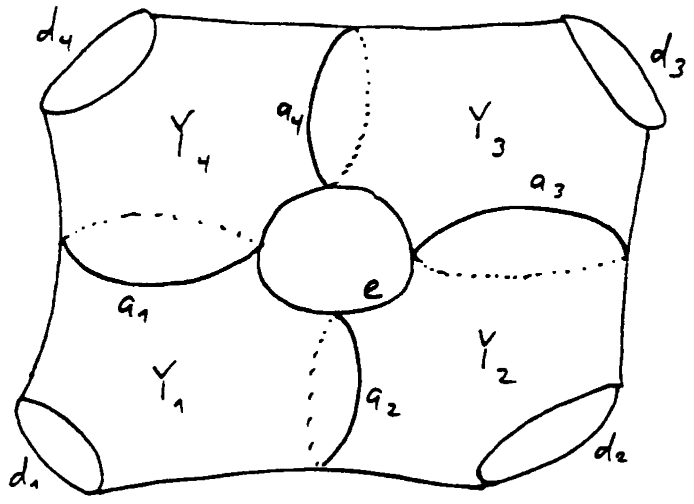

Figure 2 : Un ensemble standard dans une surface de signature $(1,4)$

PROPOSITION 1. — *Soit M une surface de signature $(1,n)$, $n>1$, et soit S un ensemble standard de M. Alors $P = S \cup \{d_1, \dots, d_{n-1}\}$ est une paramétrisation de $T(1,n)$.*

Preuve. — Soit $F = \{a_1, \dots, a_n, d_1, \dots, d_n\}$. Alors F et les paramètres de twist le long de a_i, $1, \dots, n$, fournissent des paramètres de Fenchel-Nielsen pour $T(1,n)$. Il faut montrer que les paramètres de twist et la longueur de d_n sont déterminés par P.

(i) Soit $e_i = e \cap Y_i$. Le triangle $\{e, a_j, b_j\}$ détermine l'angle dirigé de e à a_j. On en déduit que les deux angles entre e_i et les géodésiques de bord de Y_i (a_i et a_{i+1}), sont déterminés par P. Soit t_i l'orthogonale commune entre a_i et a_{i+1} dans Y_i. Pour $i = 1, \dots, n-1$, la longueur de t_i est déterminée par P. Par la trigonométrie hyperbolique, la longueur de t_i et les angles de e_i avec a_i et a_{i+1} déterminent la longueur de e_i. Donc, P détermine la longueur de e_i, $i = 1, \dots, n-1$. Et puisque P détermine aussi la longueur de e, la longueur de e_n est aussi déterminée.

À nouveau par la trigonométrie hyperbolique, on peut calculer la longueur de t_n par la longueur de e_n et les angles de e_n avec a_n et a_1. Et finalement, les longueurs de t_n, de a_n et de a_1 déterminent la longueur de d_n.

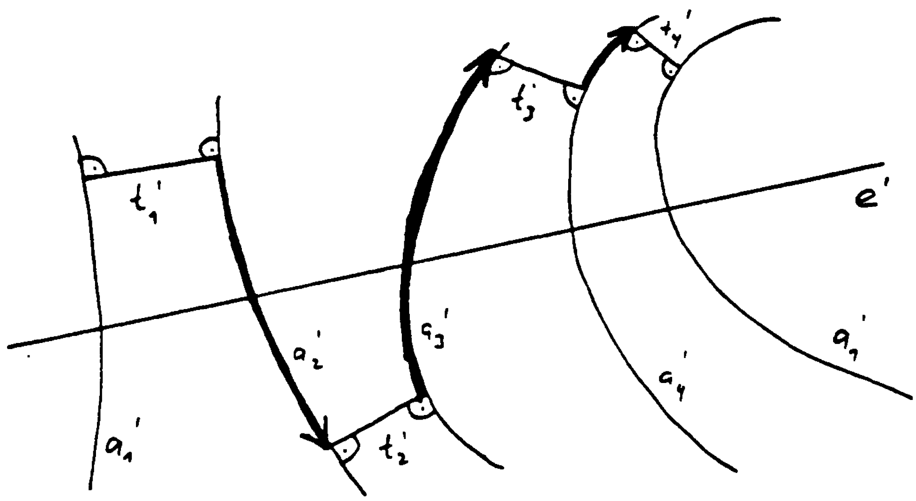

Figure 3 : Comment est mesuré le twist

(ii) Soit e' un relevé de e dans le revêtement universel de M. Soient $a'_1, \ldots, a'_n$ des relevés correspondants (à e') de $a_1, \ldots, a_n$. Soit t'_i l'orthogonale commune entre a'_i et a'_{i+1}, $i = 1, \ldots, n$. Alors le paramètre de twist le long de a_i peut être mesuré comme la distance dirigée, sur a'_i, de t_{i-1} à t_i. Par la partie (i) de la preuve, il est clair que P détermine cette distance. □

3. Preuve du Théorème 1

(i) Soit $M \in T(g)$. Soit $D = \{d_1, \ldots, d_{g-1}\}$ un ensemble de géodésiques de M telle que la surface N qui en résulte si M est coupée le long $d_1, \ldots, d_{g-1}$, soit connexe. La signature de N est donc $(1, 2g-2)$. Soit $T(1, 2g-2$, double) l'espace de Teichmüller correspondant, où "double" signifie qu'il y a toujours $g-1$ paires de géodésiques de bord de même longueur. Soit S un ensemble standard de N. Soit $P = S \cup D$. On veut démontrer que P est une paramétrisation de $T(1, 2-2$, double). On n'est pas tout à fait dans la situation de la Proposition 1 puisque N a une paire de géodésiques de bord qui n'est pas dans P. Mais d'autre part, on sait que ces deux géodésiques ont même longueur. Il est facile à voir que ce fait suffit pour déterminer cette longueur, avec la méthode de la preuve de la Proposition 1. Alors P paramétrise $T(1, 2g-2)$, double). P contient $5g-5$ géodésiques.

(ii) Correspondant à l'ensemble standard S dans N soient $X_i = Y_i \cup Y_{i+1}$, $i = 1, \ldots, 2g-2$. Soit z_i l'unique géodésique à l'intérieur de X_i telle que $i(z_i, e) = 0$, $i = 1, \ldots, 2g-2$. Soit $Z = \{z_2, z_4, z_6, \ldots, z_{2g-2}\}$. On coupe M le long des géodésiques de Z. Il en résulte deux surfaces A et B telles que A contient la géodésique e de l'ensemble S. Les deux surfaces ont la signature $(1, g-1)$. Les géodésiques de l'ensemble D se trouvent en B. Soit S' un ensemble standard de B qui contient D. On note par f, $c_1, \ldots, c_{g-1}$ les autres géodésiques de S'.

(iii) Soit $F = P \cup \{f, c_1, \ldots, c_{g-1}\}$. F contient $6g - 5$ géodésiques. On veut démontrer que F est une paramétrisation de $T(g)$.

$Z \cup D$ et les paramètres de twist le long de ces géodésiques fournissent des paramètres de Fenchel-Nielsen pour M. Il faut montrer que ces paramètres sont déterminés par F.

Les longueurs des géodésiques de Z et de D ainsi que les paramètres de twist le long des géodésiques de Z sont déterminés par P selon la partie (i) de cette preuve. Les paramètres de twist le long des géodésiques de D sont déterminés par l'ensemble standard S' de B et par Z selon la Proposition 1. S' fait partie de F avec l'exception de d_{g-1}. Mais la longueur de d_{g-1} est déterminée par P selon la partie (i) de cette preuve. On a ainsi terminé la démonstration du Théorème 1. □

Bibliographie

[1] SCHMUTZ P. — *Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen*, To appear in Comment. Math. Helvetici.

[2] SCHMUTZ P. — *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length*, Preprint, 1992.

[3] SEPPÄLA M., SORVALI T. — *Parametrization of Möbius groups acting on a disk*, Comment. Math. Helvetici, **61** (1986), 149–160.

[4] SEPPÄLA M., SORVALI T. — *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces*, North-Holland Amsterdam, London New-York Tokyo, 1992.

[5] SORVALI T. — *Parametrization for free Möbius groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn, **579** (1974), 1–12.

P. SCHMUTZ
EPFL-DMA
CH-1015 Lausanne
(Suisse)