

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PHILIPPE GILLE

**Analogies entre espaces hyperboliques réels et l'arbre  
de Bruhat-Tits sur  $\mathbb{Q}_p$**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 9 (1990-1991), p. 95-101

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1990-1991\\_\\_9\\_\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__95_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ANALOGIES ENTRE ESPACES HYPERBOLIQUES RÉELS ET L'ARBRE DE BRUHAT-TITS SUR $\mathbb{Q}_p$

par *Philippe GILLE*

Les corps localement compacts de caractéristique nulle sont  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  (archimédiens) et les extensions algébriques de degré fini de  $\mathbb{Q}_p$  (non archimédiens). En interprétant le demi-plan de Poincaré (resp. le demi-espace) comme un espace de métriques sur  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{C}^2$ ), on a une analogie  $p$ -adique du demi-plan, l'arbre de Bruhat-Tits, qui est un graphe homogène. En s'inspirant du noyau de Poisson, on indiquera comment résoudre le problème de Dirichlet sur cet arbre.

### 1. Métriques hermitiennes sur $\mathbb{C}^2$

On définit  $Hdp$  (resp.  $Hsp$ ) comme les matrices  $(2 \times 2)$  hermitiennes positives ayant deux valeurs propres strictement positives (resp. au moins une v.p.  $> 0$ ). On pose:

$$H = Hdp/\sim \text{ (resp. } \overline{H} = Hsp/\sim \text{). ou } h \sim h' \text{ si } h = \lambda h' \text{ et } \lambda > 0 .$$

$Hdp \subset Hsp$  donne  $H \subset \overline{H}$ . De plus  $\overline{H}$  est compact,  $H$  est l'intérieur de  $\overline{H}$  et on a un isomorphisme de variétés réelles:

$$\begin{aligned} \partial H = \overline{H} \setminus H &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ [h] &\rightarrow \ker(h) \end{aligned}$$

On identifie  $\partial H$  à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

**Action de  $PGL(2, \mathbb{C})$  sur  $H$  et  $\overline{H}$ .**

$$Ph \rightarrow {}^t P^* h^t P$$

$$GL(2, \mathbb{C}) \times Hdp \rightarrow Hdp$$

$$PGL(2, \mathbb{C}) \times H \rightarrow H$$

(de même sur  $\overline{H}$ ) définit une action transitive. L'action sur le bord correspond à l'action de  $PGL(2, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Le stabilisateur de  $I$  est  $PU(2) \simeq SO(3)$  donc comme  $PGL(2, \mathbb{C})$  est localement compact et union dénombrable de compacts :

$$H = PGL(2, \mathbb{C})/PU(2)$$

### Métriques sur $H$ .

On met la métrique  $d_H$  sur  $H$  définie par:

$$d_H([h], [h']) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\max(h/h')}{\min(h/h')} \right) = \log \left( \frac{\text{vol}(V_h)}{\text{vol}(V_{h'})} \right)$$

(max et min sont pris sur  $x \neq 0$ ).

$V_h = \{x/h(x) \leq 1\}$  et le volume est pris avec une mesure de Haar sur  $\mathbb{C}^2$ ,  $h$  et  $h'$  étant choisis tels que :  $V_{h'} \subset V_h$  et  $\partial V_{h'} \cap \partial V_h =$  un cercle.

Un petit calcul montre que ces expressions sont égales, la première montrant que  $\bar{c}$  est une distance et la seconde donnant une formule utilisable en  $p$ -adique.

Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire entre  $h_0, h_1, h_2$ . Alors comme

$$\max(h_0/h_2) \geq \max(h_0/h_1) \quad \max(h_1/h_2)$$

$$\min(h_0/h_2) \leq \min(h_0/h_1) \quad \min(h_1/h_2)$$

(ce qui prouve l'inégalité triangulaire) on a l'égalité dans les 2 cas et les max (resp. min) sont atteints pour  $u$  (resp.  $w$ ) et  $u, w$  sont des directions orthogonales pour  $h_0, h_1, h_2$ .

*3 points de  $H$  sont donc alignés si et seulement si ils ont deux directions orthogonales communes.* —  $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow H$  est définie par :

$$\Phi(z, y) = \begin{pmatrix} |z|^2 + y^2 & \bar{z} \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(bien sûr, on prend les classes et  $\odot$  signifie l'action précédente).

### THÉORÈME.

*a)  $\Phi$  est un isomorphisme de variétés métriques,  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$  étant muni de la métrique hyperbolique et le groupe des isométries de  $H$  est  $PGL(2, \mathbb{C})$ .*

*b) Les géodésiques de  $H$  sont les classes de matrices ayant deux directions orthogonales communes données par les bouts de la géodésique.*

Avant de le démontrer, il faut rappeler que le groupe d'isométries de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$  est engendré par les translations et les rotations sur  $\mathbb{C}$  et les éléments de  $PSL(2, \mathbb{R})$  agissant sur le demi-plan  $(x, y)$  avec  $x, y$  réels. Si  $P, Q, R, S$  sont des points tels que  $d(P, Q) = d(R, S)$ , il existe une unique isométrie transformant  $P$  en  $R$  et  $Q$  en  $S$ . Il est clair que  $\Phi$  est un isomorphisme de variétés. Un calcul montre que :

$$\Phi^{-1} \circ P \circ \Phi(z, y) = \left( \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}|y|^2}{|cz + d|^2 + |c|^2|z|^2}, \frac{|ad - bc|y}{|cz + d|^2 + |c|^2|z|^2} \right)$$

avec  $P$  dans  $PGL(2, \mathbb{C})$  représenté par  $a, b, c, d$ .

*Preuve.* — Il suffit de voir que  $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$  est une isométrie de  $H$  pour toute isométrie  $F$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$  et de vérifier la conservation des distances pour  $(0, 1)$  et  $(0, y)$ . Avec la formule ci dessus, on voit que la translation de (resp. la rotation) de  $b \in \mathbb{C}$  (resp. d'angle  $\theta$ ) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Si  $F$  est donnée par un élément  $P$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$ ,

$$F(z, y) = F(x_0 + ix_1, y) = (Re(\frac{a(x_0 + iy) + b}{c(x_0 + iy) + d}) + ix_1, Im(\frac{a(x_0 + iy) + b}{c(x_0 + iy) + d})).$$

$F(z, y) = (\Phi^{-1} \circ P \circ \Phi)(z, y)$  avec  $P$  vu dans  $PGL(2, \mathbb{C})$ . Les isométries transportées de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$  sont donc des isométries de  $H$ . De plus,  $d((0, 1), (0, y)) = |\log(y)| = d_H((0, 1), (0, y))$ ,  $(0, 1)$  étant l'identité et  $(0, y)$  étant la matrice diagonale  $(y^2, 1)$ .  $\Phi$  conserve la métrique et le groupe d'isométries de  $H$  étant dans l'image du groupe d'isométries de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ , c'est  $PGL(2, \mathbb{C})$ . Le point  $b$  résulte de la remarque faite précédemment sur les points alignés.

En essayant d'étendre à  $\overline{H}$ , on voit que :  $[z : 1] \rightarrow (z, 0)$  et  $(0 : 1) \rightarrow (\dots, \infty)$  géométriquement et que les géodésiques de  $H$  ont pour bouts des points de  $X$ , les géodésiques de l'espace hyperbolique étant les droites verticales et les demi-cercles orthogonaux au bord.

*Remarques.* — En regardant les matrices hermitiennes de déterminant 1, on peut voir que la métrique hyperbolique vient de l'hypersurface :  $ab - |z|^2 = 1$ .

En se restreignant à  $z \in \mathbb{R}$ , on obtient le demi-plan de Poincaré.

## 2. Métriques sur $\mathbb{Q}_p^2$

On appelle métriques de  $\mathbb{Q}_p^2$  une fonction  $q : \mathbb{Q}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

$$q(\lambda x) = |\lambda|_p q(x) \text{ si } \lambda \in \mathbb{Q}_p \text{ et } x \in \mathbb{Q}_p^2$$

$$q(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$q(x + y) \leq \max(q(x), q(y)) \quad (\text{condition ultramétrique}).$$

Si  $R = \mathbb{Z}_p e \oplus \mathbb{Z}_p f$  est un réseau de  $\mathbb{Q}_p^2$ , on pose:

$$q_R(x) = \inf\{|\lambda|_p, \frac{x}{\lambda} \in R\} = \max(|e^*(x)|_p, |f^*(x)|_p)$$

$q_R$  est bien une métrique et remarquant  $R = \{x, q(x) \leq 1\}$ , on peut voir que toutes les métriques sont des  $q_R$ . L'étude des métriques revient donc à celle des réseaux.

On note  $T_0$  l'ensemble des  $\mathbb{Z}_p$ -réseaux de  $\mathbb{Q}_p^2 = \mathbb{Q}_p e_0 \oplus \mathbb{Q}_p e_1$  à homothétie près. On peut définir une distance sur  $T_0$ . Si  $V_1, V_2$  sont des réseaux, il existe  $\alpha \in \mathbb{Q}_p$  tel que  $|\alpha|_p$  maximal et  $\alpha V_1 \subset V_2$ . Le théorème de la base adaptée (celui permettant d'obtenir les sous-groupes de  $\mathbb{Z}^d$  montre qu'il existe une  $\mathbb{Z}_p$ -base  $(e, f)$  de  $V_2$  telle que :  $\alpha V_1 = p^n \mathbb{Z}_p e \oplus p^m \mathbb{Z}_p f$ . La condition sur  $V_1$  donne par exemple  $m = 0$ .  $\frac{V_2}{V_1}$  est fini. La distance sur  $T_0$  est donnée par :

$$d([V_1], [V_2]) = \log \left( \left| \frac{V_2}{V_1} \right| \right) = n \cdot \log(p).$$

(Le cardinal est l'analogie des volumes employés dans 1.) Il n'y a que l'inégalité triangulaire à voir.

Si  $V_1, V_2, V_3$  sont des réseaux, on choisit  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha V_1 \subset V_2$ ,  $\beta V_2 \subset V_3$ ,  $\gamma V_1 \subset V_3$ . On a  $\alpha \beta V_1 \subset V_3$  et  $|\alpha \beta| \leq |\gamma|$  et la suite exacte :

$$0 \rightarrow \frac{V_2}{\alpha V_1} \rightarrow \frac{V_3}{\alpha \beta V_1} \rightarrow \frac{V_3}{\beta V_2} \rightarrow 0$$

donc

$$\left| \frac{V_3}{\gamma V_1} \right| \leq \left| \frac{V_3}{\alpha \beta V_1} \right| = \left| \frac{V_3}{\beta V_2} \right| \left| \frac{V_2}{\alpha V_1} \right|$$

qui donne l'inégalité triangulaire.

Si les 3 points sont alignés dans  $T_0$ , on peut prendre  $\gamma = \alpha \beta$  et supposer  $\gamma = \alpha = \beta = 1$ . Les inclusions sont maximales. Si  $e, f$  est une base adaptée pour  $V_1$  et  $V_3$  alors  $e, f$  est adaptée pour  $V_2$  et  $V_3$ . Cette base n'est pas unique et c'est là une différence essentielle avec le cas transcendant.

Avec  $T_0$  on peut construire un graphe non orienté  $T$  en reliant les points de distance  $\log(p)$ . Alors  $T$  est un arbre et si  $[V]$  est un sommet de  $T$ , il y a une bijection entre les sommets de  $T$  distants de  $n \log(p)$  de  $[V]$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p}^1$ . Un sommet est donc relié à  $p + 1$  sommets voisins qui forment donc un voisinage pointé du sommet dans  $T$ .

### Compactification de $T$ .

Comme  $p^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $R_n = p^n \mathbb{Z}_p e \oplus \mathbb{Z}_p f \rightarrow \mathbb{Z}_p f$  qui correspond à un bout de la géodésique donnée par les  $R_n$ .

En admettant que  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1 \rightarrow \{\text{bouts des géodésiques}\}$  est bijective et en mettant la topologie des cônes sur  $\bar{T} = T \cup \{\text{bouts des géodésiques}\}$ , on a compactifié  $T$ . Matriciellement, le bord correspond aux matrices de rang 1 comme dans le cas transcendant.

On peut mettre des coordonnées sur  $T$ . Dans chaque classe de réseaux, il y en a un seul s'écrivant :  $R = \mathbb{Z}_p(e_0 + a e_1) \oplus p^n \mathbb{Z}_p e_1$  avec  $a \in \mathbb{Q}_p$ ,  $a = \sum_{i=-N}^{i=n-1} a_i p^i$ ,  $0 \leq a_i \leq p - 1$ .

Remarque. — Si  $a = \sum_{i=-N}^{i=\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$  et  $s_n(a) = \sum_{i=-N}^{i=n-1} a_i p^i$  on a :

$$s_n(a) \rightarrow a$$

et si  $R_n(a) = \mathbb{Z}_p(e_0 + s_n(a)e_1) \oplus p^n \mathbb{Z}_p e_1 = \mathbb{Z}_p(e_0 + ae_1) \oplus p^n \mathbb{Z}_p e_1$  pour  $n \geq -v_p(a)$ ,

$$R_n(a) \rightarrow a = [a : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1 .$$

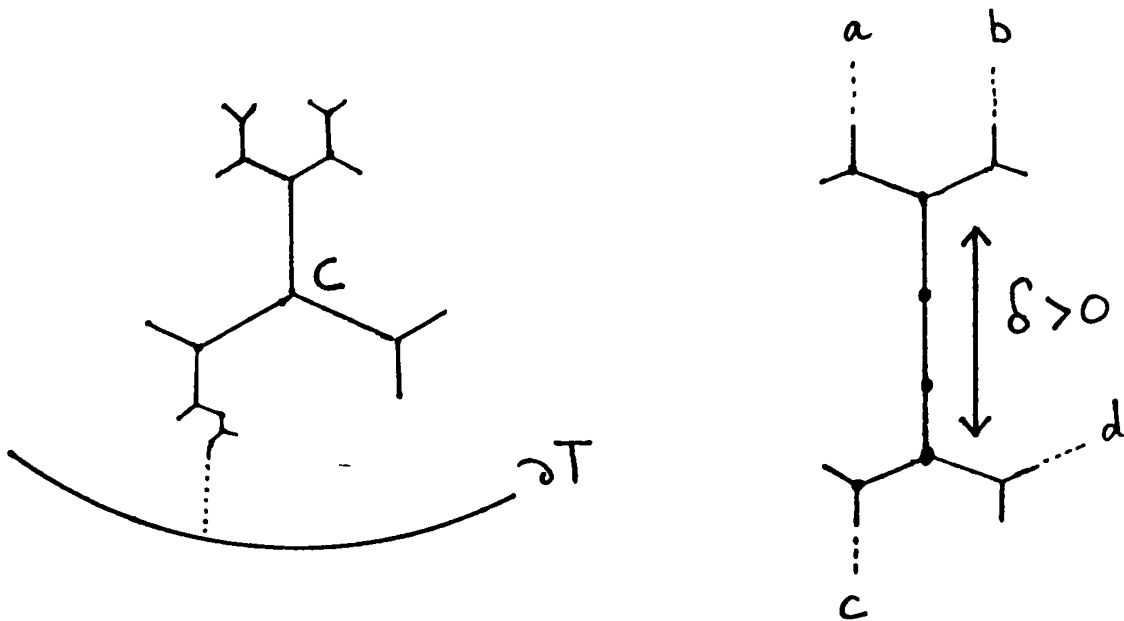
Notations.

- Si  $a, b \in \overline{T}$ ,  $\{a, b\}$  est le morceau de géodésique reliant  $a$  à  $b$ .
- Si  $a, b, c, d \in \overline{T}$ ,  $\delta(\{a, c\}, \{b, d\}) = \text{Card}(\{a, c\} \cap \{b, d\})$  avec orientation.
- $C = [Ae_0 \oplus Ae_1]$  le centre de  $T$ .
- Si  $v \in T$ , on note  $B_v$  le sous-arbre de  $T$  défini par :

$$B_v = \{v' \in T/C \in \{v', v\}\} \quad \text{On coupe l'arbre en } v) .$$

Remarque. —  $B_C = T$ .

$p = 2$



Les  $B_v \cup \partial B_v$  définissent les voisinages de points du bord  $\overline{T}$ , dont la topologie induite sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$  est celle de  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$ .

On a une action de  $PGL(2, K)$  sur  $T$  (et  $\overline{T}$ ) isométrique  $P \cdot [V] = [P \cdot V]$  et :

$$T \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p) / PGL(2, \mathbb{Z}_p)$$

$PGL(2, \mathbb{Z}_p)$  est un sous-groupe compact maximal.

### 3. Mesure sur le bord et problème de Dirichlet

Une fonction harmonique sur l'arbre est une fonction de  $T_0$  dans  $\mathbb{R}$  telle que la valeur en un sommet soit la moyenne des sommets voisins. On veut trouver les fonctions harmoniques de  $T_0$  qui se prolongent continument sur le bord. On sait résoudre le problème de Dirichlet sur le demi-plan. Si  $f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$  est la valeur au bord :

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} P(z, \xi) \frac{d\xi}{\pi(1 + \xi^2)}$$

avec le noyau :

$$P(z = x + iy, \xi) = \frac{y(1 + \xi^2)}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Interprétons cette formule :

$\frac{d\xi}{\pi(1 + \xi^2)}$  est la mesure de Cauchy sur  $\mathbb{R}$ , en fait sur  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , invariante par  $SO(2)$ , admettant une densité par rapport à la mesure de Haar  $d\xi$  de  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(1 + \xi^2) = q_{\text{can}}((\xi, 1))^2$ .

$z \rightarrow P(z, \xi)$  est une fonction harmonique ayant un pôle en  $\xi$  et dont les lignes de niveau sont les cercles du demi-plan tangents au bords, horocycles pour la métrique hyperbolique.

On définit la mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$  invariante par  $PGL(2, \mathbb{Z}_p)$  par :

$$\mu(\partial B_v) = e^{-d(C, v)}, \quad (v \neq C)$$

$\mathbb{Q}_p$  est localement compact donc a une mesure de Haar  $\mu_0$  (i.e. invariante par translation).  $\mathbb{Z}_p = B(0, 1)$  est un voisinage ouvert de 0 et

$$p + \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p = B(p, 1) = B(0, 1).$$

Les translations ne changent donc pas en général la norme. En normalisant avec  $\mu_0(\mathbb{Z}_p) = 1$  et en remarquant

$$\mu_0(\mathbb{Z}_p) = \mu_0(0 + p\mathbb{Z}_p) + \mu_0(1 + p\mathbb{Z}_p) + \dots + \mu_0((p-1) + p\mathbb{Z}_p) = p \cdot \mu_0(p\mathbb{Z}_p),$$

on déduit par récurrence :

$$\mu_0(x + p^n \mathbb{Z}_p) = p^{-n}$$

LEMME. —  $\mu$  admet une densité par rapport à  $\mu_0$  et :

$$\begin{aligned} d\mu(a) &= \frac{1}{q_{\text{can}}((a, 1))^2} d\mu_0(a) = d\mu_0(a) \quad \text{si } a \in \mathbb{Z}_p \\ &= \frac{1}{|a|_p^2} d\mu_0(a) \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

*Preuve.* — Si  $a \in \mathbb{Z}_p$ ,  $n \geq 0$ ,  $d(Rn(a), C) = n$  et  $\partial B_{Rn(a)} = s_n(a) + p^n \mathbb{Z}_p = a + p^n \mathbb{Z}_p$  (dessin). Donc  $\mu(\partial B_{Rn(a)}) = \mu_0(a + p^n \mathbb{Z}_p) = p^n$ .  $n \rightarrow \infty$  donne le lemme. Si  $a \in \mathbb{Z}_p$ ,  $d(Rn(a), C) = n - 2v_p(a)$  pour  $n \geq -v_p(a) \geq 0$ .

Il ne reste plus qu'à trouver le noyau :

Si  $a \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$  et  $z \in T_0$ ,  $\langle z, a \rangle = \delta(\{C, a\}, \{C, z\}) + \delta(\{z, a\}, \{C, a\})$

Alors  $z \rightarrow p^{(z,a)}$  est harmonique, ses lignes de niveau sont des horocycles du graphe et  $\lim p^{(z,a)} = \infty$  quand  $z \rightarrow a$  et  $\lim p^{(z,a)} = 0$  quand  $z \rightarrow a' \neq a$ .

**THÉORÈME.** — Si  $f : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, il existe une unique fonction harmonique  $F : T \rightarrow \mathbb{R}$  ayant pour limite au bord  $f$  et :

$$F(z) = \frac{p}{p+1} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) p^{(z,x)} d\mu(x) .$$

Cette formule est un cas particulier d'une formule générale donnée dans l'article de P. Cartier où on a reconnu la mesure sur le bord.

### References

- [1] MANIN Y. — *Three dimensional hyperbolic geometry as  $\infty$ -adic Arakelov geometry*, IHES, 1990.
- [2] ZABRODIN A.V. — *Non archimedean strings and Bruhat-Tits Trees*, (Commun Math Phys) 125, 1989.
- [3] SERRE J.P. — *Arbres, amalgames et  $SL_2$* , (Astérisque 46).
- [4] CARTIER P. — *Géométrie et analyse sur les arbres*, Séminaire Bourbaki 407, 1972.
- [5] MORGAN J.W., SHALEN P.B. — *Hyperbolic Structures*, Annals of Maths, 1984.

Philippe GILLE  
 INSTITUT FOURIER  
 Laboratoire de Mathématiques  
 BP 74  
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)