Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GÉRARD BESSON

L'entropie minimale des espaces symétriques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 77-88

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__77_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (77–88)

L'ENTROPIE MINIMALE DES ESPACES SYMÉTRIQUES

par *Gérard BESSON*

Ce travail est une collaboration entre Gérard Besson, Gilles Courtois et Sylvestre Gallot. Une version détaillée est à paraître.

Avant l'énoncé des théorèmes et même avant de donner une quelconque définition de l'entropie, il est bon de comprendre les raisons qui ont conduit à l'introduction de cet invariant. Pour cela, j'ai choisi de prendre le point de vue de la théorie de l'information, c'est-à-dire de considérer l'entropie comme mesure du degré d'indétermination d'une expérience probabiliste :

$$\text{entropie} = \text{degré d'indétermination.}$$

L'ENTROPIE COMME MESURE DE L'INDÉTERMINATION.

• Soit α une expérience probabiliste dont l'issue est un des k événements équiprobables

$$A_1, \dots, A_k$$

$$\text{probabilité } (A_i) = p(A_i) = 1/k \ .$$

Si le degré d'indétermination de l'expérience α est bien défini ce doit être une fonction f de k vérifiant les axiomes intuitifs :

i) $f(1) = 0$, en effet une expérience à une issue est certaine et donc n'a aucune indétermination.

ii) $f(k\ell) = f(k) + f(\ell)$, en effet si on réalise simultanément et de manière indépendante deux expériences α et β à k et ℓ issues équiprobables, l'expérience ainsi obtenue notée $\alpha\beta$ à $k\ell$ événements équiprobables doit avoir une indétermination somme de celle de α et de celle de β.

Ceci détermine f et on définira donc l'entropie de α par

$$h(\alpha) = \mathrm{Log}(k)\ .$$

• Si l'expérience α est constitué de k événements de probabilité

$$p_i = p(A_i)\ ,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

par analogie (ou par des modélisations de l'intuition ci-dessus) on définit l'entropie, le degré d'indétermination, de l'événement A_i par

$$h(A_i) = -\mathrm{Log}(p(A_i)) = -\mathrm{Log}(p_i)$$

et l'entropie de l'expérience α est alors la moyenne de la variable aléatoire ainsi définie, soit

$$\boxed{h(\alpha) = -\sum p_i \,\mathrm{Log}(p_i)\ .}$$

Remarques.

1) On peut déduire cette formule de trois axiomes régissant une fonction $\varphi(p_1, \dots, p_k)$ modélisant bien l'intuition (voir [Ya-Ya]).

2) L'inégalité de convexité élémentaire

$$-\sum_{i=1}^{k} p_i \,\mathrm{Log}(p_i) \leqslant -\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \mathrm{Log}(\frac{1}{k}) = \mathrm{Log}\, k$$

répond à l'idée intuitive que l'issue de l'expérience où toutes les éventualités ont la même chance de se réaliser est la plus difficile à prévoir, la plus indéterminée.

ENTROPIE MESURÉE D'UNE PARTITION.

Soit X un espace topologique compact (pour simplifier), μ une mesure borélienne régulière; soit également une partition (ou un recouvrement) $\mathcal{A}$ fini,

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$$

l'expérience est ici la position d'un point de X, dont les issues sont les événements $x \in A_i$ de probabilité

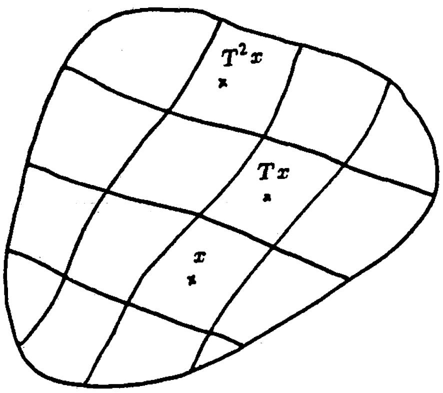
$$\mu(A_i) = p_i\ ,\ \text{on suppose que } \mu(X) = 1\ .$$

L'entropie de cette partition est alors

$$h_\mu(\mathcal{A}) = -\sum \mu(A_i)\,\mathrm{Log}(\mu(A_i)) \ .$$

ENTROPIE MESURÉE D'UNE TRANSFORMATION.

Soit alors une transformation préservant la mesure μ



$$T : X \longrightarrow X$$

que nous supposerons continue (donc mesurable), on se propose de définir l'entropie de T relative à une partition $\mathcal{A}$. L'expérience est ici la position d'une orbite entière de T

$$(x, Tx, T^2x, \ldots, T^n x, \ldots) \ .$$

Il est clair que le degré d'indétermination est, comme l'orbite, en général infini.

On peut alors s'intéresser à la position de n points consécutifs $(x, Tx, \ldots, T^n x)$. Dans l'espace des n-uples la partition à considérer est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^n &= \mathcal{A} \wedge T^{-1}(\mathcal{A}) \wedge \cdots \wedge T^{-n}(\mathcal{A}) \\ &= \left\{ A_{i_1} \cap T^{-1}(A_{i_2}) \cap \cdots \cap T^{-n}(A_{i_{n+1}}) \ , \ A_{i_j} \in \mathcal{A} \right\} \end{aligned}$$

elle décrit tous les événements possibles, il est tentant alors de poser

$$\text{degré d'indétermination } = h_\mu(\mathcal{A}^n)$$

l'inconvénient est qu'en général ceci tend vers l'infini avec n. On est donc conduit à s'intéresser au degré d'indétermination moyen de T par rapport à $\mathcal{A}$ et on définit

$$\begin{aligned} h_\mu(T, \mathcal{A}) = &\text{ entropie par rapport à la mesure } \mu \text{ et} \\ &\text{ la partition } \mathcal{A} \text{ de } T \\ = &\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{h_\mu(\mathcal{A}^n)}{n+1} \right) \end{aligned}$$

et l'entropie de T par

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{A}} \left\{ h_\mu(T, \mathcal{A}) \right\} \ .$$

ENTROPIE TOPOLOGIQUE DE T.

Si $\mathcal{A}$ est maintenant un recouvrement fini de X, on définit

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}^n) = \text{cardinal minimal d'un sous-recouvrement fini de } \mathcal{A}$$

et

$$h_{\text{top}}(T, \mathcal{A}) = \lim \left[\frac{1}{n+1} \,\mathrm{Log}(\mathcal{N}(\mathcal{A}^n)) \right]$$

et enfin

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{top}}(T) &= \text{ entropie topologique de } T \\ &= \sup\{h_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{A}) \setminus \mathcal{A} \text{ recouvrement ouvert fini}\} \end{aligned}$$

Remarque. — Ceci est la définition de h_{top} suivant l'idée de départ, c'est-à-dire de l'entropie comme mesure du degré d'indétermination. Si X est un espace métrique il existe une autre définition, bien sûr équivalente mais beaucoup plus maniable, en particulier tous les théorèmes énoncés ci-dessous repose sur cette approche métrique. Je renvoie le lecteur intéressé à [Mis].

Un théorème clef est alors le

THÉORÈME 1 (Goodwyn, Dinaburg, Goodman). — *Sous les hypothèses précédentes*

$$h_{\mathrm{top}}(T) = \sup\left\{ h_{\mu}(T) \setminus \mu \textit{ mesure de probabilité borélienne régulière invariante par } T \right\} .$$

(voir [Mis] pour une preuve élémentaire)

De plus il résulte de la preuve qu'il existe une mesure μ_0 telle que

$$h_{\mu_0}(T) = h_{\mathrm{top}}(T)$$

une partie des travaux récents sur le problème qui suit repose sur l'unicité de cette mesure et surtout sur une bonne description de celle-ci.

A ce point fixons le cadre du problème de l'entropie minimale.

X est une variété riemannienne compacte, nous nous intéressons au système dynamique défini par le flot géodésique φ_t sur le fibré unitaire UX. Tout ce qui a été dit pour une transformation T s'applique mutatis mutandis à cette situation; il suffit en effet de considérer la transformation $T = \varphi_1$.

On ne mentionnera plus le flot dans les formules concernant l'entropie mais la métrique riemannienne dont il se déduit naturellement.

L'ENTROPIE DE LA MESURE DE LIOUVILLE.

Parmi toutes les mesures invariantes par le flot géodésique il en est une plus canonique que les autres c'est la mesure de Liouville λ. Il est à noter qu'en général

$$h_\lambda \neq h_{\mathrm{top}}$$

cette égalité est toutefois vraie si X est un espace localement symétrique. La réciproque n'est pas connue à ce jour sauf en dimension 2 ([Kat 1]).

L'ENTROPIE VOLUMIQUE DE X.

Une autre notion d'entropie peut être donnée dans ce cadre considéré. Soit $\widetilde{X}$ le revêtement universel de X muni de la métrique image réciproque et x un point de $\widetilde{X}$

$$B(x, R) = \text{ boule de rayon } R \text{ centrée en } x \text{ dans } \widetilde{X}$$

l'expérience est maintenant la position de x dans $\widetilde{X}$, mais cette dernière étant non compacte on doit comme dans le cas d'une transformation calculer un degré d'indétermination moyen, on défini donc

$$h_{\mathrm{vol}} = \text{ entropie volumique de } X = \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{vol}(B(x; R))}{R}$$

il est facile de montrer que $(1/R) \operatorname{Log} \big(\operatorname{vol}(B(x, R))\big)$ converge vers un nombre indépendant de x (voir [Gui]).

Son rapport à l'entropie topologique est donné par

THÉORÈME 2 (Dinaburg-Manning, [Man]). — *On a l'inégalité*

$$h_{\mathrm{vol}} \leqslant h_{\mathrm{top}}$$

de plus si la métrique est à courbure négative ou nulle

$$h_{\mathrm{vol}} = h_{\mathrm{top}} .$$

Remarque. — Si la courbure n'est pas partout négative ou nulle alors l'inégalité peut être stricte, en effet même sur S^2 il existe des métriques riemanniennes avec beaucoup de courbure négative (mais aussi de la courbure positive à cause du théorème de Gauss-Bonnet) en sorte que

$$h_{\mathrm{top}} > 0$$

par ailleurs la compacité de S^2 qui est son propre revêtement universel donne

$$h_{\mathrm{vol}} = 0 .$$

(voir les références dans [Gui]).

LA CONJECTURE DE L'ENTROPIE MINIMALE.

Quelles sont les valeurs de l'entropie lorsque la métrique riemannienne varie sur X?

Nous la noterons g dans la suite. Il est assez évident que la question n'a aucun sens sans une quelconque normalisation, en effet, on a par exemple

$$h_{\mathrm{vol}}(\lambda^2 g) = \frac{1}{\lambda} h_{\mathrm{vol}}(g)$$

donc si $h_{\mathrm{vol}}(g) \neq 0$ on atteint tous les nombres réels positifs par une opération triviale.

Il faut donc normaliser et pour ce faire on utilise l'invariant le plus simple à notre portée : le volume.

La question devient alors : étudier les valeurs de $h_{\text{vol}}(g)$ pour les métriques g de volume 1 ?

La même question est bien sûr pertinente avec toutes les autres notions d'entropie. C'est un vieux problème et je ne citerai que le résultat qui justifie la conjecture.

THÉORÈME 3 (Gromov [Gro 1]). — *Si X^n admet une métrique hyperbolique notée* hyp, *alors il existe une constante C_n telle que si g est une métrique vérifiant*

$$\mathrm{vol}(X, g) = \mathrm{vol}(X, \mathrm{hyp})$$

on a

$$h_{\text{vol}}(g) \geqslant C_n h_{\text{vol}}(\mathrm{hyp}) \qquad (C_n < 1)\ .$$

On a bien entendu une inégalité analogue avec l'entropie topologique, mais celle-ci est plus forte.

En d'autres termes, si X admet une métrique hyperbolique, l'entropie de toute autre métrique de même volume est minorée, elle ne peut donc être arbitrairement petite. On a une situation analogue à celle du volume, d'ailleurs la preuve de M. Gromov est rigoureusement la même que celle de l'inégalité similaire qu'il obtient sur le volume. Elle utilise l'invariant topologique appelé le volume simplicial (voir [Gro 1]).

Quelle est alors la valeur minimale de $h_{\text{vol}}(g)$ lorsque g parcourt l'ensemble des métriques à volume fixé ?

Au vu du résultat ci-dessus, on est conduit à la conjecture suivante :

CONJECTURE ([Gro 2], p. 58). — *Si X admet une métrique hyperbolique alors pour toute métrique g*

$$\mathrm{vol}(g) = \mathrm{vol}(\mathrm{hyp}) \Longrightarrow h_{\text{vol}}(g) \geqslant h_{\text{vol}}(\mathrm{hyp})\ .$$

UN PREMIER PAS VERS LA PREUVE DE LA CONJECTURE.

Dans [Kat], A. Katok fait un premier pas vers la preuve de la conjecture plus faible qui consisterait à remplacer l'entropie volumique par l'entropie topologique. Précisément, on suppose que X porte une métrique hyperbolique (ou plus généralement une métrique localement symétrique de rang 1) et soit g une autre métrique qui lui est conforme, c'est-à-dire

$$\mathrm{hyp} = \rho g$$

on les suppose de plus de même volume c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(X, g)} \int_X \rho^{n/2} dv_g = 1\ .$$

Alors

THÉORÈME 4 (voir [Kat]). — *Sous ces hypothèses on a*

$$h_{\text{top}}(g) \geqslant \frac{1}{\frac{1}{\text{vol}(X,g)} \int_X \rho^{1/2} dv_g} h_{\text{top}}(\text{hyp}) .$$

Remarquons que par l'inégalité de Jensen

$$\frac{1}{\text{vol}(X,g)} \int_X \rho^{1/2} dv_g \leqslant \frac{1}{\text{vol}(X,g)} \int_X \rho^{n/2} dv_g = 1$$

et l'égalité n'a lieu que si $\rho \equiv 1$.

Le théorème de Katok est donc plus fort que la simple inégalité

$$h_{\text{top}}(g) \geqslant h_{\text{top}}(\text{hyp}) .$$

Il est à interpréter comme un théorème de rigidité c'est-à-dire , quitte à normaliser par le volume on repère dans une classe conforme la métrique hyperbolique par son entropie.

Ce résultat se prouve en connaissant avec précision la mesure d'entropie maximale dont une bonne description est donnée par R. Bowen, et en particulier le fait que les géodésiques périodiques sont équidistribuées pour cette mesure, c'est-à-dire :

$$P(T) = \#\{\text{géodésiques périodiques de période } \leqslant T\}$$

$$h_{\text{top}} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \operatorname{Log}(P(T)) .$$

LA MÉTHODE VARIATIONNELLE.

Une approche possible serait de considérer h_{top} comme une fonctionnelle sur l'espace des métriques et de faire du calcul des variations.

Pour cela il faut savoir dériver et surtout pouvoir dériver.

En fait même la continuité de l'entropie peut poser des problèmes pour un système dynamique général.

L'exemple suivant le prouve : sur le disque unité $U \subset \mathbf{C}$ on définit

$$f_\lambda : U \longrightarrow U$$

$$f_\lambda(z) = (1-\lambda)z^2 \ , \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

$$h_{\text{top}}(f_\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ \operatorname{Log}(2) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} .$$

De même Katok, Newhouse et Yomdin ont étudié l'application

$$h_{\text{top}} : \text{Diff}^\infty(X^n) \longrightarrow \mathbf{R}$$

où X^n est une variété de dimension n et ont montré :

1) la non continuité pour $n \geqslant 4$

2) la continuité pour $n = 2$

la question reste ouverte pour $n = 3$.

En opposition à ces résultats négatifs, pour les flots géodésiques de variétés riemanniennes à courbure strictement négative et plus généralement pour les flots d'Anosov il y a des travaux en cours de Katok, Knieper, Pollicott et Weiss. Citons, à titre d'exemple un de leurs résultats.

THÉORÈME (A. Katok, G. Knieper et H. Weiss [Kat-Kni-We]). — *Soit* (X^n, g_0) *une variété riemannienne compacte* C^2 *à courbure strictement négative. Soit* g_ε *(*ε *petit) une perturbation* C^2 *alors* $h_{\mathrm{top}}(g_\varepsilon)$ *est une fonction* C^1 *de* ε *et*

$$\frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} h_{\mathrm{top}}(g_\varepsilon) = -\frac{1}{2} h_{\mathrm{top}}(g_0) \int_{UX} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} g_\varepsilon(v, v) d\mu_{g_0}$$

où UX *est le fibré unitaire de* X *et* μ_{g_0} *la mesure d'entropie maximale (appelée mesure de Bowen-Margulis) de* g_0.

Remarque. — Une telle formule devrait permettre de chercher les points critiques de la fonctionnelle h_{top} restreinte à l'espace des métriques à volume fixé. Elle ne montre en fait que la criticité des métriques pour lesquelle la mesure de Bowen-Margulis coïncide avec la mesure de Liouville, la réciproque n'étant toujours pas prouvée. De plus, ces métriques ne sont pas connues sauf en dimension 2 ou 3 où nous savons qu'il s'agit de métriques à courbure constante.

NOTRE MÉTHODE ET NOS RÉSULTATS.

Les résultats découlent presque immédiatement de la définition d'un nouvel invariant conforme. En cela, la méthode est plus performante que celle utilisée par Katok car plus simple et plus souple.

Soit μ une mesure (absolument continue par rapport aux mesures de Lebesgue) sur $\widetilde{X}$, le revêtement universel de X, invariante par le groupe fondamental Γ de X.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\Phi} & S^\infty \subset L^2(\widetilde{X}, \mu) \\ \downarrow & & \\ \widetilde{X}/\Gamma = X & & \end{array}$$

nous allons considérer des immersions Φ de $\widetilde{X}$ dans $L^2(\widetilde{X}, \mu)$ à savoir

$$\Phi(\gamma \cdot x) = \Phi(x) \circ \gamma^{-1} = \gamma_*(\Phi(x))$$

(la seconde action est la représentation régulière de Γ dans $L^2(\widetilde{X}, \mu)$, préservant S^∞).

Remarques. —

i) De telles immersions peuvent bien sûr être pensées comme fonctions de deux variables $\varphi(x, y)$ sur $\widetilde{X}$ vérifiant :

a) $\int_{\widetilde{X}} \varphi^2(x, y) dy = 1$ pour tout $x \in \widetilde{X}$.

b) $\varphi(\gamma x, y) = \varphi(x, \gamma^{-1} y)$ pour tout $x, y \in \widetilde{X}$ et $\gamma \in \Gamma$.

ii) Ceci permet de vérifier qu'il en existe, en effet il suffit de prendre,

$$\psi(x, y) = e^{-cd(x,y)}$$

où d est la distance associée à une métrique riemannienne g quelconque sur X, et c est assez grand; on construit une telle immersion en posant alors

$$\varphi(x, y) = \frac{e^{-cd(x,y)}}{\left(\int_{\widetilde{X}} e^{-2cd(x,y)} dv_g(y) \right)^{1/2}} .$$

Il suffit de choisir c tel que l'intégrale au dénominateur converge afin que ψ soit dans $L^2(\widetilde{X}, dv_g)$ c'est-à-dire tel que

$$c > \frac{h\mathrm{vol}(g)}{2}$$

(ici on a pris $\mu = dv_g$ la forme volume associée à la métrique g).

iii) Il est aisé de vérifier que toute la construction qui suit ne dépend pas de μ.

A l'aide d'une mesure μ et d'une immersion Φ on peut définir une métrique sur $\widetilde{X}$, en effet il suffit de prendre

$$g_\Phi = \Phi_*(\mathrm{can})$$

où can est la métrique canonique de S^∞ induite par le produit scalaire de L^2.

De plus l'équivariance de Φ implique l'invariance de g_Φ par l'action de Γ, et définit ainsi une métrique sur X.

Donnons-nous une métrique auxiliaire g sur X, nous allons la comparer à g_Φ de la manière suivante : on pose

$$T(g, \Phi) = \int_X (\mathrm{trace}_g(g_\Phi))^{n/2} dv_g$$

et

$$T(g) = \inf \left\{ T(g, \Phi) \setminus \Phi \right\} .$$

PROPOSITION. — *La quantité $T(g)$ ne dépend que de la classe conforme de g.*

Preuve. — Immédiate car l'intégrand de $T(g, \Phi)$ est invariant par homothétie sur g.

Le résultat principal est alors un théorème de comparaison de $T(g)$ avec deux autres invariants riemanniens à savoir :

a) l'entropie volumique $h_{\mathrm{vol}}(\tilde g)$ de la métrique $\tilde g$ relevée sur $\widetilde X$ de g.

b) l'infimum du spectre du Laplacien de cette même métrique sur $\widetilde X$, noté $\lambda_0(\tilde g)$.

THÉORÈME 1 ([B-C-G]). — *Pour toute métrique g' sur X* conforme *à g on a*

$$(\lambda_0(\tilde g'))^{n/2}\mathrm{vol}(X,g') \leqslant T(g) = T(g') \leqslant \left(\frac{h_{\mathrm{vol}}(\tilde g')}{2}\right)^n \mathrm{vol}(X,g')\ .$$

Admettons ce théorème pour l'instant et prouvons le

THÉORÈME 2 [B-C-G]. — *Si X admet une métrique g_0 localement symétrique de type non compacte et si g est conforme à g_0, on a*

$$\mathrm{vol}(X,g) = \mathrm{vol}(X,g_0) \Longrightarrow h_{\mathrm{vol}}(\tilde g) \geqslant h_{\mathrm{vol}}(\tilde g_0)\ .$$

Remarques. —

a) C'est la preuve de la conjecture de M. Gromov dans la classe conforme d'une métrique localement symétrique à courbures sectionnelles négatives ou nulles (de type non compacte).

Ce résultat étend donc celui de A. Katok aux cas où la métrique de référence est à courbure sectionnelle négative ou nulle, il n'utilise aucune description de la mesure de Bowen-Margulis.

b) Il porte de plus sur l'entropie volumique qui par le théorème de Dinaburg-Manning précité est plus petite que l'entropie topologique et strictement en général dès que l'on sort du cadre des variétés à courbures négatives ou nulles.

c) Néanmoins, le théorème de Katok contient un facteur multiplicatif qui permet de traiter simplement le cas d'égalité. Il serait intéressant de voir si la caractérisation de l'égalité repose sur l'ergodicité du flot géodésique.

Preuve du théorème 2. — Il repose sur le théorème 1 et le

LEMME (Folk). — *Avec les notations précédentes*

$$\lambda_0(\tilde g_0) = \frac{h^2_{\mathrm{vol}}(\tilde g_0)}{4}\ .$$

En effet, on a alors, en supposant pour simplier que

$$\mathrm{vol}(X,g) = \mathrm{vol}(X,g_0) = 1$$

$$(\lambda_0(\tilde g_0))^{n/2} = \left(\frac{h_{\mathrm{vol}}(\tilde g_0)}{2}\right)^n = T(g_0) = T(g) \leqslant \left(\frac{h\mathrm{vol}(\tilde g)}{2}\right)^n\ . \blacksquare$$

Preuve du lemme. — Elle repose sur le calcul *explicite* des deux quantités $\lambda_0(\tilde g_0)$ et $h_{\mathrm{vol}}(\tilde g_0)$. Seul le cas où $\tilde g_0$ est symétrique de rang supérieur ou égal à 2 pose un problème pour $\lambda_0(\tilde{g}_0)$, il se déduit toutefois de résultats figurant dans la littérature, en particulier M. A. Olshanetshi et Y. Guivarc'h (voir [Ol] et [Gui]).

Idée de preuve du théorème 1. —

∗ La majoration s'obtient en utilisant les plongements précédents

$$\varphi(x,y) = \frac{e^{-cd(x,y)}}{\left(\int_{\widetilde{X}} e^{-2cd(x,y)}dv_{\tilde{g}}(y)\right)^{1/2}}$$

où d est la distance associée à la métrique $\tilde{g}$ image réciproque de g par le revêtement.

Un calcul immédiat montre alors que

$$T(g,\Phi) \leqslant c^n \mathrm{vol}(X,g)$$

et donc

$$T(g) \leqslant \left(\frac{h_{\mathrm{vol}}}{2}\right)^n \mathrm{vol}(X,g).$$

∗ Pour la minoration, considérons la quantité

$$\int_D dv_{\tilde{g}}(x) \int_{\widetilde{X}} |\nabla_1\varphi(x,y)|^2 dv_{\tilde{g}}(y) = I$$

où D désigne un domaine fondamental dans $\widetilde{X}$ et $\nabla_1\varphi$ la différentielle de φ par rapport à la première variable (la variable x). On a alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_D \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_D |\nabla_1\varphi(x,\gamma y)|^2 dv_{\tilde{g}}(y)\Big)d\tilde{v}_g(x)\\
&= \int_D \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_D |\nabla_1\varphi(\gamma^{-1}x,y)|^2 dv_{\tilde{g}}(y)\Big)d\tilde{v}_g(x)\\
&= \int_D \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_D |\nabla_1\varphi(\gamma^{-1}x,y)|^2 dv_{\tilde{g}}(x)\Big)d\tilde{v}_g(y)\\
&= \int_D dv_{\tilde{g}}(y)\int_{\widetilde{X}} |\nabla_1\varphi(x,y)|^2 dv_{\tilde{g}}(x)\\
&\geqslant \lambda_0(\tilde{g})\int_D dv_{\tilde{g}}(y)\Big(\int_{\widetilde{X}}\varphi^2(x,y)dv_{\tilde{g}}(x)\Big)\\
&= \lambda_0(\tilde{g})\int_D dv_{\tilde{g}}(x)\Big(\int_{\widetilde{X}}\varphi^2(x,y)dv_{\tilde{g}}(y)\Big) = \lambda_0(\tilde{g})\mathrm{vol}(X,g)
\end{aligned}$$

la minoration du théorème 1 se déduit alors de l'inégalité de Hölder appliquée à la précédente. ■

CONCLUSION.

Cette méthode nouvelle, utilisant des plongements équivariants dans un espace de Hilbert peut permettre de montrer simultanément la conjecture de l'entropie minimale et une autre conjecture de M. Gromov concernant le volume minimal des variétés hyperboliques (voir [Ga]).

Bien d'autres invariants riemanniens pourraient également être traité de manière similaire.

BIBLIOGRAPHIE

[B-C-G] BESSON G., COURTOIS G. et GALLOT S. — *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 151, Grenoble, 1990 (à paraître Inventiones Math.).

[Ga] GALLOT S. — *Volume minimal des variétés hyperboliques*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Institut Fourier de Grenoble, n°7 (88–89), 35–52.

[Gro 1] GROMOV M. — *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S., **56** (1981), 213–307.

[Gro 2] GROMOV M. — *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **18** (1983), 1–147.

[Gui] GUILLOPÉ L. — *Entropie*, Séminaire cohomologie bornée et géométrie riemannienne, E.N.S. Lyon, Janvier, 1988.

[Gui] GUIVARC'H Y. — *Sur la représentation intégrale des fonctions harmoniques et des fonctions propres positives dans un espace riemannien symétrique*, Bull. Soc. Math. France, 2e série, **108** (1984), 373–392.

[Kat] KATOK A. — *Entropy and closed geodesics*, Ergod. Th. Dynam. Sys.2, (1982), 339–367.

[Kat-Kni-We] KATOK A., KNIEPER G. et WEISS H. — *Regularity of topological entropy*, preprint.

[Man] MANNING A. — *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. of Math., **110** (1979), 567–573.

[Mis] MISIUREWICZ M. — *Topological entropy and metric entropy*, in Théorie ergodique, Séminaire de théorie ergodique, Les plans sur Bex, Monographie de l'enseignement des mathématiques, n° 29, 1980.

[Ol] OLSHANETSHI M. A. — *Frontière de Martin de l'opérateur de Laplace Beltrami sur les espaces riemanniens symétriques de courbure non positive*, Math. Nauk., 1969.

[Ya-Ya] YAGLOM A.M. et YAGLOM I.M. — *Probabilité et information*, Monographies Dunod n° 20, Dunod.

Gérard BESSON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)