Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

SYLVESTRE GALLOT

Volume minimal des variétés hyperboliques : un théorème local et un résultat global

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 35-52
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__35_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1988–1989 (35–52)

VOLUME MINIMAL DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES : un théorème local et un résultat global

par *Sylvestre GALLOT*

Ce travail est une collaboration entre Gérard BESSON, Gilles COURTOIS, et Sylvestre GALLOT. Une version plus détaillée sera publiée ultérieurement.

1. Motivations

Soit M^n une variété compacte différentiable de dimension n. Dans [GV], M. Gromov introduit *le volume minimal* de M^n comme la borne inférieure du volume de toutes les métriques g sur M^n dont la courbure sectionnelle est comprise entre -1 et $+1$. En dimension 2, la formule de Gauss-Bonnet donne immédiatement $\mathrm{Min\,Vol}(M^2) = 2\pi|\chi(M^2)|$. De même, M. Gromov remarqua qu'en dimension paire $2d$ dès qu'une des classes caractéristiques $p(M)$ de la variété est non nulle, la formule de Gauss-Bonnet généralisée par Avez-Chern-Weil donne

$$\mathrm{Min\,Vol}(M^{2d}) \geqslant C_n |p(M)| \,, \tag{1.1}$$

puisque les nombres de Pontryagin peuvent s'écrire comme des intégrales sur M d'un polynôme, de degré $d = n/2$ en les composantes du tenseur de courbure, dont les coefficients sont universels. Par ailleurs, M. Gromov dresse dans [GV] une liste de variétés dont le volume minimal est nul. A titre de support intuitif, nous en retiendrons que toute variété qui admet une action libre de S^1 ou une métrique plate vérifie $\mathrm{Min\,Vol}(M^n) = 0$. En particulier, les volumes minimaux de S^{2d+1} et de $\mathbf{T}^n$ sont nuls.

De notre point de vue, nous retiendrons que deux des buts poursuivis par M. Gromov, dans la partie de [GV] qui concerne le volume minimal, peuvent schématiquement être présentés comme suit :

Objectif 1. — Exhiber un invariant topologique qui minore le volume minimal de manière universelle, fournissant ainsi une sorte de généralisation en dimension quelconque (même impaire) du théorème de Gauss-Bonnet.

Objectif 2. — Rendre cette minoration optimale dans le plus grand nombre de cas possibles, ce qui donnerait un procédé général pour le calcul du volume minimal et de l'éventuelle métrique "minimisante" qui le réalise.

Dans [GV], M. Gromov introduit un invariant topologique le "*volume simplicial*" (noté $\|[M]\|$) en suivant le cheminement suivant : pour tout chaîne fermée c à coefficients réels, de décomposition simpliciale $c = \sum_i a_i \cdot \sigma_i$, posant $\|c\|_{\ell^1} = \sum_i |a_i|$, il définit $\|[M]\|$ comme l'infimum des $\|c\|_{\ell^1}$ pour toutes les chaînes c représentant la classe fondamentale $[M]$ de M. Il obtient le

1.2. THÉORÈME (M. Gromov [GV]). — *Pour toute variété différentiable M^n et toute métrique g dont la courbure de Ricci est minorée par $-(n-1)\alpha^2$.*

$$\alpha^n \operatorname{Vol}(M^n, g) \geqslant \frac{1}{(n-1)^n n!} \|[M^n]\| \ .$$

Cet énoncé répond bien à l'objectif 1, puisqu'il implique que le volume minimal de M^n est minoré par $\frac{1}{(n-1)^n n!}\|[M^n]\|$. [Remarquons cependant qu'il n'y a pas équivalence entre la nullité du volume minimal et celle du volume simplicial : par exemple le volume simplicial de toute variété qui admet une métrique de courbure de Ricci positive ou nulle est nul alors que son volume minimal est non nul dès que sa caractéristique d'Euler est non nulle (*cf.* ci-dessus)].

Par contre le théorème 1.2 ne répond pas à l'objectif 2 puisque son application en dimension 2 donne par exemple

$$\operatorname{Min Vol}(M^2) \geqslant -\chi(M^2)$$

(au lieu de la minoration optimale par $2\pi|\chi(M)|$).

De même l'inégalité 1.1 n'est pas optimale en dimension supérieure à 2. Cette constatation (et le fait que, d'après le théorème 1.2, les variétés qui admettent une métrique hyperbolique sont les exemples les "plus canoniques" de variétés dont le volume minimal est non nul) a amené M. Gromov à poser la

1.3. CONJECTURE GLOBALE. — *Si (M^n, g_0) est une variété compacte quelconque de courbure sectionnelle constante égale à -1, alors toute métrique g sur M^n dont la courbure de Ricci est minorée par* $\operatorname{Ricci}(g_0) = -(n-1)$ *vérifie*

$$\operatorname{Vol}(M, g) \geqslant \operatorname{Vol}(M, g_0) \ .$$

Qualifiant cette conjecture de "très optimiste", M. Gromov pose en préalable une question (que nous appellerons dans la suite "*conjecture locale*") : établir l'inégalité 1.3 pour toute métrique g voisine de g_0.

Remarquons que l'établissement de la conjecture 1.3 permettrait de montrer que certaines variétés hyperboliques n'admettent pas d'autre métrique d'Einstein que la métrique hyperbolique. On aurait par exemple le

1.4. COROLLAIRE (sur une suggestion de M. Ville). — *Si la conjecture 1.3 est vraie, toute variété M^4 qui admet une métrique de courbure -1 n'admet pas d'autre métrique d'Einstein.*

Preuve. — Notons g_0 la métrique de courbure -1 et g n'importe quelle métrique d'Einstein sur M. Quitte à effectuer une homothétie, on peut toujours supposer que la courbure scalaire de g est égale à $-n(n-1)$, zéro ou $n(n-1)$. En exprimant la formule d'Avez dans les composantes irréductibles W_g, Z_g et U_g du tenseur de courbure et en remarquant que $W_{g_0} = 0$ et que $Z_g = Z_{g_0} = 0$, nous obtenons :

$$\int_M (|W_g|^2 + |U_g|^2) dv_g = 8\pi\chi(M) = \int_M |U_{g_0}|^2 dv_{g_0} .$$

L'hypothèse sur la courbure scalaire et le fait que la conjecture 1.3 implique que $\mathrm{Vol}(M,g) \geqslant \mathrm{Vol}(M,g_0)$ donnent $W_g = 0$ et $\mathrm{scal}(g) = \pm\mathrm{scal}(g_0)$. Comme $R_g = W_g + Z_g + U_g = U_g$, nous en déduisons que la courbure sectionnelle de g vaut ± 1. La courbure sectionnelle de g ne peut être égale à +1 ou à zéro (sinon le volume simplicial serait nul d'après le théorème 1.2), donc g est de courbure -1 et, par conséquent, $g = g_0$ par le théorème de rigidité de Mostow. ∎

2. Résolution de la conjecture locale

Les variétés seront dorénavant supposées *compactes*. Le premier résultat en direction de la conjecture locale fut le

2.1. THÉORÈME (M. Ville [VE]). — *Pour toute variété M^n de dimension paire qui admet une métrique hyperbolique g_0, il existe un nombre $\varepsilon(n)$ tel que toute métrique g sur M^n dont la courbure sectionnelle est pincée entre $-1+\varepsilon(n)$ et -1 vérifie*

$$\mathrm{Vol}(M^n, g) \geqslant \mathrm{Vol}(M^n, g_0)$$

La preuve utilise des décompositions du tenseur de courbure et les formules de Gauss-Bonnet-Avez-Chern-Weil. En dimension quelconque nous obtenons le

2.2. THÉORÈME. — *En toute dimension, pour toute variété d'Einstein (M, g_0) de courbure sectionnelle strictement négative, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de g_0 [(pour la topologie $C^2(g_0)$] tel que toute métrique g conforme à une métrique de $\mathcal{U}$ et de courbure scalaire supérieure ou égale à celle de g_0 vérifie* $\mathrm{Vol}(M,g) \geqslant \mathrm{Vol}(M,g_0)$. *L'égalité a lieu si et seulement si g est isométrique à g_0.*

La preuve de ce théorème s'obtient en trois étapes marquées par les trois propositions suivantes. Tout d'abord on montre qu'il suffit de démontrer le théorème 2.2 pour des métriques g à courbure scalaire constante voisines de g_0. Une première étape est le

2.3. LEMME. — *Soit (M,g) n'importe quelle variété riemannienne de courbure scalaire constante négative. Alors toute métrique g' conforme à g et de courbure scalaire supérieure ou égale à celle de g vérifie* $\mathrm{Vol}(M,g') \geqslant \mathrm{Vol}(M,g)$. *L'égalité a lieu si et seulement si $g' = g$.*

Preuve. — Ecrivons la métrique $g' = e^{2f} \cdot g$. Les formules classiques de changement de métriques (voir par exemple [BE], p. 59) donnent :

$$\mathrm{scal}(g') = e^{-2f}\left[\mathrm{scal}(g) + 2(n-1)\Delta_g f - (n-2)(n-1)|df|_g^2\right] .$$

En intégrant, nous obtenons :

$$\int_M e^{2f}\,\mathrm{scal}(g')dv_g \leqslant \int_M \mathrm{scal}(g)dv_g \ .$$

L'hypothèse $\mathrm{scal}(g') \geqslant \mathrm{scal}(g)$ et l'inégalité de Hölder impliquent, en divisant de part et d'autre par la constante négative $\mathrm{scal}(g)$,

$$1 \leqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M e^{2f}\cdot dv_g \leqslant \left[\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\int_M e^{nf}dv_g\right]^{2/n} \leqslant \left[\frac{\mathrm{Vol}(g')}{\mathrm{Vol}(g)}\right]^{2/n}$$

∎

Pour pouvoir nous ramener à l'étude des seules métriques à courbure scalaire constante, il nous faut une version locale de la conjecture de Yamabe, *i.e.* toute métrique g' voisine de g_0 est dans la même classe conforme qu'une métrique g à courbure scalaire constante, également voisine de g_0. Ceci découle de la

2.4. PROPOSITION (N. Koiso, *cf.* [Be], p. 127). — *Notons Σ l'ensemble des métriques g sur M^n dont le volume est égal à 1 et dont la courbure scalaire est une fonction constante sur M. Pour toute métrique $g_0 \in \Sigma$ telle que $\frac{\mathrm{scal}(g_0)}{(n-1)}$ ne soit pas une valeur propre du laplacien de g_0, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de g_0 à l'intérieur duquel Σ est une sous-variété (au sens I.L.H.) de l'espace $\mathcal{M}$ de toutes les métriques. L'application $(f,g) \mapsto f\cdot g$ est alors un difféomorphisme I.L.H. d'un voisinage de $(1, g_0)$ dans $C^\infty(M)\times\Sigma$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de g_0 dans $\mathcal{M}$.*

Pour achever la preuve du théorème 2.2 il suffit d'établir la

2.5. PROPOSITION. — *Pour toute métrique d'Einstein g_0 de volume égal à 1, dont la courbure sectionnelle est négative, il existe, pour la topologie C^2, un voisinage $\mathcal{U}'$ de g_0 dans Σ tel que toute métrique g de $\mathcal{U}'$ vérifie* $\mathrm{scal}(g) < \mathrm{scal}(g_0)$ *dès que g n'est pas isométrique à g_0.*

Preuve. — Comme l'action $g \mapsto \varphi^* g$ du groupe des difféomorphismes φ de M^n sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des métriques sur M_n laisse Σ stable, nous pouvons nous restreindre à une tranche Σ' orthogonale à l'orbite de g_0 par cette action. Par la proposition 2.4 de N. Koiso et par le "Slice Theorem" d'Ebin ([BE], p. 345), Σ' est (au voisinage de g_0) une variété I.L.H. dont l'espace tangent $T_{g_0}\Sigma'$ est l'ensemble des 2−tenseurs symétriques h qui vérifient simultanément $\delta_{g_0}h = 0$ et $\mathrm{Trace}_{g_0}h = 0$ (*cf.* [BE], lemme 4.57).

La métrique g_0 est un point critique de la fonctionnelle

$$S : g \mapsto \mathrm{Vol}(g)^{(2/n)-1} \cdot \int_M \mathrm{scal}(g) \cdot dv_g \ ,$$

définie sur l'espace $\mathcal{M}$ de toutes les métriques. Pour démontrer la proposition 2.5, il suffit de prouver que, pour toute métrique g_1 suffisamment voisine de g_0 dans la topologie $C^2(g_0)$ [*i.e.* si $h = g_1 - g_0$ et si D^0 est la connexion de Levi-Civita associée g_0 on a $|h|_{g_0} + |D^0h|_{g_0} + |D^0D^0h|_{g_0} < \varepsilon$], on a $S(g_1) - S(g_0) < 0$. Il suffit pour cela de prouver que $\frac{d^2}{dt^2}S(g_0 + th) < 0$ pour tout $t \in [0,1]$ puisque

$$S(g_1) - S(g_0) = \int_0^1 \int_0^s \frac{d^2}{dt^2} S(g_0 + th)dtds.$$

Nous allons d'abord démontrer que

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} S(g_0 + tk) \leqslant -C_1 \cdot \|k\|_{H_1(g_0)}$$

pour tout $k \in T_{g_0}\Sigma'$.

En utilisant la structure de I.L.H.-variété de Σ', nous allons en déduire que

$$\text{(2)} \qquad \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} S(g_0 + th) \leqslant (-C_1 + C_2\varepsilon)\|h\|^2_{H_1(g_0)} \ , \quad \text{où } h = g_1 - g_0.$$

Enfin, en majorant $\frac{d^3}{dt^3}S(g_0 + th)$, nous prouverons

$$\text{(3)} \qquad \left|\frac{d^2}{dt^2}_{|t=s} S(g_0 + th) - \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} S(g_0 + th)\right| \leqslant C_3\varepsilon\|h\|^2_{H_1(g_0)} \ ,$$

ce qui achèvera de prouver que $\frac{d^2}{dt^2}_{|t=s}S(g_0 + th) < 0$.

Preuve de l'inégalité (1). — Le calcul de l'opérateur variation seconde en une métrique d'Einstein donne, lorsque $k \in T_{g_0}\Sigma'$ (*cf.* [BE] théorème 4.60, (ii))

$$\frac{d^2}{dt^2}_{t=0} S(g_0 + tk) = -\frac{1}{2}\left[\langle D^*Dk, k\rangle_{g_0} - 2\langle \overset{\circ}{R}(k), k\rangle_{g_0}\right]$$

où $\overset{\circ}{R}(k)_{ij} = \Sigma R_{isjt} \cdot k^{st}$.

Définissons les opérateurs d^D et δ^D par les égalités : $d^D\alpha = D\alpha$ pour toute 1−forme α

$$d^Dk(X,Y,Z) = Dk(X,Y,Z) - Dk(Y,X,Z)$$

δ^D = adjoint de d^D pour le produit scalaire L^2 défini sur les sections du fibré $T^*M \otimes T^*M \to M$.

De la classique formule de Weitzenböck

$$(\delta^D \circ d^D + d^D \circ \delta^D)k = D^*Dk - \overset{\circ}{R}(k) + k \circ r_{g_0}$$

[où r_{g_0} désigne le tenseur de courbure de Ricci], nous déduisons, pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\delta^D k\|^2_{L^2(g_0)} + \|d^D k\|^2_{L^2(g_0)} \\ &= -\alpha\langle D^*Dk, k\rangle_{L^2(g_0)} + (1+\alpha)\langle (D^*D - 2\overset{\circ}{R})k, k\rangle_{L^2(g_0)} \\ &\qquad + \langle [(1+2\alpha)\overset{\circ}{R} + \frac{s}{n}]k, k\rangle_{L^2(g_0)}, \end{aligned}$$

où s est la courbure scalaire de g_0. Un lemme algébrique, dû à Fujitani (*cf.* [BE], lemme 12.71), permet, par des calculs ponctuels, d'estimer les valeurs propres de $(1+2\alpha)\overset{\circ}{R} + \frac{s}{n}$ et montre qu'elles sont majorées par $(1+2\alpha)(n-2)K_{\max} - \frac{2\alpha}{n}s$. La compacité de M et la continuité de la courbure impliquent, si la courbure sectionnelle est strictement négative, l'existence d'un $\alpha \in]0,1[$ tel que $(1+2\alpha)(n-2)K_{\max} - \frac{2\alpha}{n} \cdot s \leqslant -\alpha$. Nous en déduisons

$$(1+\alpha)\langle (D^*D - 2\overset{\circ}{R})k, k\rangle_{L^2(g_0)} \geqslant \alpha\|k\|_{H_1^2(g_0)},$$

ce qui prouve (1).

Preuve de l'inégalité (2). — Pour tout t, posons $g_t = g_0 + th$ et

$$A(g_t) = -r_{g_t} + \frac{1}{2}\left[s_{g_t} - (\frac{n-2}{n})\frac{1}{\mathrm{Vol}(g_t)}\int_M s_{g_t} dv_{g_t}\right] \cdot g_t ,$$

où r_{g_t} et s_{g_t} désignent respectivement la courbure de Ricci et la courbure scalaire de la métrique g_t. Un calcul direct, utilisant les formules de variations premières du tenseur de courbure (*cf.* par exemple [BE], théorème 1.174), donne

$$\frac{d}{dt}S(g_t) = \mathrm{Vol}(g_t)^{\frac{2-n}{n}} \int_M g_t[A(g_t), h] \cdot dv_{g_t} .$$

Nous en déduisons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Vol}(g_t)^{1-(2/n)} \cdot \frac{d^2}{dt^2}S(g_t) &= -2\int_M g_t[A(g_t), h \circ h] \cdot dv_{g_t} \\ &- (\frac{n-2}{2n})\frac{1}{\mathrm{Vol}(g_t)}\Big(\int_M g_t(g_t, h)\cdot dv_{g_t}\Big)\Big(\int_M g_t[A(g_t), h]\cdot dv_{g_t}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\int_M g_t[A(g_t), h] \cdot g_t(g_t, h) \cdot dv_{g_t} \\ &+ \int_M g_t\big[-\frac{d}{dt}r_{g_t} + \frac{1}{2}(\frac{d}{dt}s_{g_t}) \cdot g_t, h\big] \cdot dv_{g_t} \\ &+ \frac{1}{2}\int_M g_t\Big[(s_{g_t} - \frac{n-2}{n}\int_M s_{g_t}\frac{dv_{g_t}}{\mathrm{Vol}(g_t)}) \cdot h, h\Big] \cdot dv_{g_t} \\ &- (\frac{n-2}{2n})\frac{1}{\mathrm{Vol}(g_t)}\Big(\int_M g_t\big[-r_{g_t} + \frac{1}{2}(s_{g_t} \\ &\qquad - \int_M s_{g_t}\frac{dv_{g_t}}{\mathrm{Vol}(g_t)})g_t, h\big]\cdot dv_{g_t}\Big)\Big(\int_M g_t(g_t, h)\cdot dv_{g_t}\Big) \end{aligned}\right.$$

En $t = 0$, en utilisant le fait que (*cf.* [BE], théorème 1.174)

$$\frac{d}{dt} r_{g_t} = \frac{1}{2} D^*_{g_t} D_{g_t} h + \frac{1}{2} r_{g_t} \circ h + \frac{1}{2} h \circ r_{g_t} - \overset{\circ}{R}_{g_t}(h) - \delta^*_{g_t}[\delta_{g_t} h] - \frac{1}{2} D_{g_t} d[\mathrm{Tr}_{g_t} h] \tag{5}$$

et que

$$\frac{d}{dt} s_{g_t} = \Delta_{g_t}(\mathrm{Tr}_{g_t} h) + \delta_{g_t}(\delta_{g_t} h) - g_t(r_{g_t}, h) \ , \tag{6}$$

nous déduisons de (4), en remarquant que $A(g_0) = 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(g_0)^{(n-2)/n} \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} S(g_t) = &-\frac{1}{2}\int_M |D_{g_0} h|^2 + \int_M \langle \overset{\circ}{R}_{g_0}(h), h\rangle \\ &+ \int_M \delta_{g_0}(\delta_{g_0} h) \mathrm{Tr}_{g_0} h + \frac{1}{2}\int_M \Delta_{g_0}(\mathrm{Tr}_{g_0} h)(\mathrm{Tr}_{g_0} h) \\ &- \frac{1}{2n} s_{g_0} \Big[\int_M (\mathrm{Tr}_{g_0} h)^2 - \big(\frac{n-2}{n}\big)\Big(\int_M \mathrm{Tr}_{g_0} h\Big)^2 \frac{1}{\mathrm{Vol}(g_0)}\Big] + \int_M |\delta_{g_0} h|^2, \end{aligned} \tag{7}$$

où les intégrales s'entendent au sens de dv_{g_0}. De l'aspect quadratique de (7) et de sa formulation nous déduisons :

$$\Big|\frac{d^2}{dt^2} S(g + th) - \frac{d^2}{dt^2} S(g + tk)\Big| \leqslant C\|h - k\|_{H_1} \|h + k\|_t \tag{8}$$

où $\| \ \|_{H_1}$ est la norme de Sobolev associée à la métrique g_0 [*i.e.* $\|h\|^2_{H_1} = \int_M \big(|D_{g_0} h|^2_{g_0} + |h|^2_{g_0}\big) dv_{g_0}$].

La structure de I.L.H.-variété de Σ' assure, pour tout h tel que $g_0 + h \in \Sigma'$, l'existence d'un $k \in T_{g_0}\Sigma'$ tel que $\|h - k\|_{H_1} = o(\|k\|_{H_1})$. De cette constatation et des inégalités (1) et (8), nous déduisons l'inégalité (2).

Preuve de l'inégalité (3). — De (4), (5) et (6), nous déduisons que la variation seconde de la fonctionnelle S *en un point différent de* g_0 s'écrit sous la forme suivante en coordonnées locales

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} S(g_t) = &\int_M \Big[\sum_{i,j,k,\ell} A_{ijk\ell}(g_t, R_{g_t})(x) h_{ij} h_{k\ell} \\ &+ \sum_{i,j,k,\ell,s,u} \big(\alpha_{ijk\ell su}(g_t) D^t h(i,j,k) D^t h(\ell, s, u) \\ &\qquad + \beta_{ijk\ell su}(g_t) D^t D^t h(i,j,k,\ell) h(s,u)\big)\Big] dv_{g_0} \\ &+ \Big[\int_M \sum_{i,j} B_{ij}(R_{g_t}, g_t)(x) h_{ij} dv_{g_0}(x)\Big]\Big[\sum_{i,j} c_{ij}(g_t)(x) h_{ij}(x) dv_{g_0}(x)\Big] \ , \end{aligned} \tag{9}$$

où D^t désigne la dérivée covariante de la métrique g_t et R_{g_t} son tenseur de courbure. La variation première du tenseur de courbure (*cf.* [BE], p. 63) donne

$$\Big|\frac{d}{dt} R_{g_t}\Big|_{g_0} \leqslant C\Big[|D^t D^t h|_{g_0} + |D^t h|_{g_0} + |h|_{g_0}\Big] \ .$$

Nous en déduisons

$$(10) \qquad \left|\frac{d}{dt}A_{ijk\ell}(g_t, R_{g_t})\right| + \left|\frac{d}{dt}B_{ij}(R_{g_t}, g_t)\right| \leqslant C''\left[|D^tD^th|_{g_0} + |D^th|_{g_0} + |h|_{g_0}\right] .$$

Par ailleurs, d'après le théorème 1.174, (a) de [BE], on a

$$\left(\frac{d}{dt}D^t_XY\right)_i = \frac{1}{2}\sum_j g_t^{ij}\left[D^th(X,Y,e_j) + D^th(Y,X,e_j) - D^th(e_j,X,Y)\right] .$$

Nous en déduisons, pour tout p−tenseur T ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D^tT(X;X_1,\ldots,X_p) =& \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{\ell=1}^{p} g_t^{ij}\left[D^th(X,X_\ell,e_j) + D^th(X_\ell,X,e_j)\right.\\ &\left. - D^th(e_j,X,X_\ell)\right]\cdot T(X_1,\ldots,X_{\ell-1},e_i,X_{\ell+1},\ldots,X_p)\\ \frac{d}{dt}_{|t=t_0}D^tD^tT(X,X_0;X_1,\ldots,X_p) =& \frac{d}{dt}D^t(D^{t_0}T)(X;X_0,X_1,\ldots,X_p)\\ &+ D^{t_0}_X\left(\frac{d}{dt}D^tT\right)(X_0,X_1,\ldots,X_p) .\end{aligned}$$

Ceci implique les majorations suivantes :

$$(11) \qquad \begin{cases} \left|\frac{d}{dt}D^t_XY\right|_{g_0} \leqslant \frac{3}{2}|D^th|_{g_0} \\ \left|\frac{d}{dt}D^tT\right|_{g_0} \leqslant C\cdot|T|_{g_0}|D^th|_{g_0} \\ \left|\frac{d}{dt}D^tD^tT\right|_{g_0} \leqslant C\Big(|T|_{g_0}|D^tD^th|_{g_0} + |D^tT|_{g_0}|D^th|_{g_0} + |D^th|^2_{g_0}|T|_{g_0}\Big) . \end{cases}$$

Notons $|\ \ |_{C^s(g_t,x)}$ la norme ponctuelle définie par

$$|h|_{C^s(g_t,x)} = \big(|h|_{g_0} + \cdots + |(D^t)^sh|_{g_0}\big)(x) .$$

De (11) nous déduisons que, pour $s = 1$ ou 2, en supposant que $|h|_{C^0(g_0)} \leqslant 1$,

$$\frac{d}{dt}|h|_{C^s(g_t,x)} \leqslant C\cdot|h|^2_{C^s(g_t,x)} .$$

En intégrant l'équation différentielle sous-jacente, nous en déduisons :

$$(12) \qquad |h|_{C^s(g_t,x)} \leqslant C'\cdot|h|^2_{C^s(g_0,x)} ,$$

ce qui implique que D^t peut-être remplacé par D^0 dans les seconds membres des inégalités (10) et (11). En reportant les inégalités (10) et (11) ainsi modifiées dans l'équation obtenue en dérivant (9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^3}{dt^3}S(g_t)\right| \leqslant C''\Big[&(|h|_{L^\infty} + |D^0h|_{L^\infty} + |D^0D^0h|_{L^\infty})\int_M |h|^2dv_{g_0}\\ &+ |h|_{L^\infty}\int_M |D^0h|^2\cdot dv_{g_0}\Big] ,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité (3) et, par conséquent, achève de prouver que $\frac{d^2}{dt^2}S(g_0+th) < 0$ pour tout t, donc prouve que $S(g) < S(g_0)$ pour tout g voisin (au sens $C^2(g_0)$) de g_0 . ∎

Fin de la preuve du théorème 2.2. — Soit $\mathcal{U}'$ un C^2-voisinage de g_0 dans Σ. D'après la proposition 2.5, on a $\mathrm{scal}(g) \leqslant \mathrm{scal}(g_0) < 0$ pour tout $g \in \mathcal{U}'$, l'égalité n'étant atteinte que lorsque g est dans l'orbite de g_0 par l'action du groupe des difféomorphismes. D'après la proposition 2.4, l'image par l'application $(f, g) \mapsto f \cdot g$, de $C^\infty_+(M) \times \Sigma$ contient un C^2-voisinage de g_0 dans $\mathcal{M}$. D'après le Lemme 2.3, on a dans ce cas

$$\mathrm{Vol}(fg)^{2/n} \min_x \mathrm{scal}(f \cdot g)(x) \leqslant \mathrm{Vol}(g)^{2/n} \cdot \mathrm{scal}(g) \leqslant \mathrm{Vol}(g_0)^{2/n}\, \mathrm{scal}(g_0)$$

l'égalité n'ayant lieu que si $f \equiv 1$ et si g est dans l'orbite de g_0 par l'action du groupe des difféomorphismes. ∎

3. Corollaires d'isospectralité

3.1. Corollaire. — *Soit g_0 une métrique de courbure scalaire constante négative sur une variété M de dimension $n \geqslant 3$. Pour toute métrique g située dans la classe conforme de g_0, on a*

$$\text{Spectre } (M, g) = \text{Spectre } (M, g_0) \Longrightarrow g = g_0 \ .$$

Ce résultat a été prouvé indépendamment par A. El Soufi et S. Ilias (voir [E–I]).

3.2. Corollaire. — *Soit g_0 une métrique d'Einstein de courbure sectionnelle négative. Il existe un voisinage $\mathcal{U}'$ de g_0 dans l'ensemble des métriques à courbure scalaire constante (pour la topologie C^2) tel que toute métrique g de $\mathcal{U}'$ qui est isospectrale à g_0 est automatiquement isométrique à g_0.*

Preuve du corollaire 3.1. — Posons $g_0 = e^{2f} g$. Les formules classiques de changement de métriques (voir par exemple [BE], p.59) donnent

$$\mathrm{scal}(g_0) = e^{-2f} \left[\mathrm{scal}(g) + 2(n-1)\Delta_g f - (n-2)(n-1)|df|_g^2 \right] \ .$$

En intégrant, nous obtenons

$$\int_M e^{2f}(-\,\mathrm{scal}(g_0))dv_g = \int_M (-\,\mathrm{scal}(g))dv_g + \int_M (n-2)(n-1)|df|_g^2 \ .$$

D'où, par l'inégalité de Hölder, si on suppose $f \not\equiv 1$,

$$-\,\mathrm{scal}(g_0)\Big(\int_M e^{nf} dv_g\Big)^{2/n} \cdot \mathrm{Vol}(g)^{(n-2)/n} > \int_M -\,\mathrm{scal}(g) dv_g .$$

Si les variétés sont isospectrales, on a

$$\int_M e^{nf} dv_g = \mathrm{Vol}(g_0) = \mathrm{Vol}(g)$$

et

$$- \operatorname{scal}(g_0) \cdot \operatorname{Vol}(g_0) = \int_M - \operatorname{scal}(g_0) dv_{g_0} = \int_M - \operatorname{scal}(g) dv_g,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité précédente. D'où $f \equiv 1$. ∎

Preuve du corollaire 3.2. — La proposition 2.5 implique que, pour tout $g \in \mathcal{U}'$ tel que $\operatorname{Vol}(g) = \operatorname{Vol}(g_0)$ et $\int_M \operatorname{scal}(g) dv_g = \int_M \operatorname{scal}(g_0) dv_{g_0}$, il existe une isométrie de (M, g) sur (M, g_0), ce qui prouve le corollaire. ∎

4. Introduction d'invariants permettant une approche de la conjecture globale

a) Définitions.

Soit M^n une variété compacte munie d'une mesure μ de densité C^∞ et de masse totale égale à 1. Nous *noterons dans la suite* $\mathcal{E}$ l'ensemble des immersions Φ de type C^∞ du revêtement universel $\widetilde{M}$ de M dans la sphère unitaire S^∞_μ de $L^2(\widetilde{M}, \tilde{\mu})$ [où $\tilde{\mu}$ désigne la mesure "pull back" de μ par l'application de revêtement $\pi : \widetilde{M} \to M$] qui sont de plus $\pi_1(M)$–équivariantes *i.e.* pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$ et tout $x \in \widetilde{M}$, on a $\Phi(\gamma \cdot x) = \Phi(x) \circ \gamma^{-1}$. Cette dernière condition implique que la métrique $\Phi^*\mathrm{can}$ [image réciproque de la métrique canonique de $L^2(\widetilde{M}, \tilde{\mu})$] passe au quotient en une métrique définie sur M.

Notons $V(M, \mu)$ l'infimum, pour toutes les $\Phi \in \mathcal{E}$ du volume de M muni de la métrique $\Phi^*\mathrm{can}$. Pour toute métrique riemannienne g sur M, *définissons* :

$$T(g, \mu) = \operatorname{Inf}_{\Phi \in \mathcal{E}} \int_M \left[\frac{1}{n} \operatorname{Trace}_g(\Phi^*\mathrm{can})\right]^{n/2} \cdot dv_g,$$

$$T(M, \mu) = \operatorname{Inf}_g T(g).$$

4.1. PROPOSITION. — *Les invariants $V(M, \mu)$ et $T(M, \mu)$ sont indépendants du choix de la mesure μ, ce sont donc des invariants de la structure différentiable de M que nous noterons désormais $V(M)$ et $T(M)$. De plus $V(M) = T(M)$. Par ailleurs, $T(g, \mu)$ est indépendant du choix de la mesure μ (c'est pourquoi nous le noterons désormais $T(g)$) et est constant sur chaque classe conforme de métriques.*

Preuve. — D'après un résultat de J. Moser (*cf.* [MR]), toute autre mesure μ' de densité C^∞ et de masse totale égale à 1 peut s'écrire $\mu' = \varphi^*\mu$, où φ est un difféomorphisme de M isotope à l'identité. Comme $\pi_1(\varphi)$ est l'identité sur $\pi_1(M)$, φ se relève en un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\widetilde{M}$ qui vérifie $\tilde{\varphi}(\gamma x) = \gamma \cdot \tilde{\varphi}(x)$ pour tous les $(\gamma, x) \in \pi_1(M) \times \widetilde{M}$. Par conséquent, si Φ est $\pi_1(M)$–équivariante de $\widetilde{M}$ dans la sphère unitaire S^∞_μ de $L^2(\widetilde{M}, \tilde{\mu})$, alors $\Phi' : x \mapsto \Phi[\tilde{\varphi}(x)] \circ \tilde{\varphi}$ est $\pi_1(M)$–équivariante de $\widetilde{M}$ dans la sphère unitaire $S^\infty_{\mu'}$ de $L^2(\widetilde{M}, \tilde{\mu}')$. Comme l'application $I : f \mapsto f \circ \tilde{\varphi}$

est une isométrie de $L^2(\widetilde{M},\tilde{\mu})$ sur $L^2(\widetilde{M},\tilde{\mu}')$ et comme $\Phi' = I \circ \Phi \circ \widetilde{\varphi}$, la métrique $g_{\Phi'} = \Phi'^* \operatorname{can}_{L^2(\widetilde{M},\tilde{\mu}')}$ est le "pull back" par φ de la métrique $g_\Phi = \Phi^* \operatorname{can}_{L^2(\widetilde{M},\tilde{\mu})}$. Les volumes de ces deux métriques sont donc égaux, ce qui implique que $V(M,\mu') = V(M,\mu)$. Par ailleurs, pour tout difféomorphisme ψ isotope à l'identité, on a

$$\begin{aligned}(13) \qquad \operatorname{Trace}_{\psi^* g}[(\Phi \circ \widetilde{\psi})^* \operatorname{can}](x) &= \operatorname{Trace}_{\psi^* g}[\widetilde{\psi}^*(g_\Phi)](x) \\ &= \operatorname{Trace}_g[g_\Phi](\psi(x)) \ .\end{aligned}$$

De (13), et du fait que $\Phi \circ \widetilde{\psi}$ est $\pi_1(M)$−équivariante de $\widetilde{M}$ dans S^∞_μ, nous déduisons par un calcul direct

$$(14) \qquad T(\psi^* g,\mu) = T(g,\mu).$$

De (13), nous tirons encore :

$$\int_M \operatorname{Trace}_{\varphi^* g}(g_{\Phi'})^{n/2} \cdot dv_{\varphi^* g} = \int_M \operatorname{Trace}_g[g_\Phi]^{n/2} \cdot dv_g.$$

En utilisant également (14), nous en déduisons :

$$T(g,\mu') = T([\varphi^{-1}]^* g,\mu) = T(g,\mu).$$

De plus, un calcul direct et l'égalité (14) donnent, pour toute fonction C^∞ positive f et tout difféomorphisme ψ isotope à l'identité,

$$T(f \cdot \psi^* g,\mu) = T(\psi^* g,\mu) = T(g,\mu),$$

ce qui prouve que $T(g)$ est un invariant conforme et est constant sur chacune des orbites de $\operatorname{Diff}_0(M)$.

L'inégalité $V(M) \leqslant T(g)$ découle de l'inégalité $\det(A) \leqslant (\frac{1}{n}\operatorname{Trace} A)^n$, valable pour toute matrice symétrique de valeurs propres positives. Inversement, posons

$$T(g,\Phi) = \int_M (\frac{1}{n}\operatorname{Trace}_g \Phi^* \operatorname{can})^{n/2} \cdot dv_g.$$

On a $T(\Phi^* \operatorname{can},\Phi) = \operatorname{Vol}(\Phi^* \operatorname{can})$, d'où

$$T(M) \leqslant \operatorname{Inf}_\Phi T(\Phi^* \operatorname{can},\Phi) = V(M),$$

d'où $T(M) = V(M)$. ∎

4.2. Remarque. — L'espace $\mathcal{E}$ des immersions $\pi_1(M)$−équivariantes de $\widetilde{M}$ dans la sphère unitaire de $L^2(\widetilde{M},\frac{d\tilde{v}_g}{\operatorname{Vol}(g)})$ peut aussi être vu comme un ensemble C^1−dense dans l'ensemble des applications Φ de type C^∞ de $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ dans **R**, invariantes par l'action diagonale de $\pi_1(M)$, telles que, en tout point x,

$$\int_{\widetilde{M}} \Phi^2(x,y)\frac{dv_{\tilde{g}}(y)}{\operatorname{Vol}(g)} = 1.$$

Les définitions précédentes des invariants $V(M)$ et $T(g)$ peuvent être relues dans ce contexte, ce qui donne par exemple

$$T(g) = \operatorname{Inf}_{\Phi\in\mathcal{E}} \int_U \Big[\int_{\widetilde{M}} |d_1\Phi|^2_g(x,y)\frac{dv_g(y)}{\operatorname{Vol}(g)}\Big]^{n/2} dv_g(x),$$

où U est un domaine fondamental de l'action de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ et où d_1 représente la différentielle par rapport à la première variable.

b) Calcul de ces invariants pour les variétés riemanniennes homogènes et pour les surfaces.

4.3. PROPOSITION. — *Si (M, g_0) est une variété localement homogène, on a*
$$\operatorname*{Sup}_{\substack{g \text{ conforme} \\ \text{à } g_0}} \lambda_0(\widetilde{M}, \tilde{g})^{n/2} \cdot \mathrm{Vol}(M, g) = n^{n/2} T(g_0) = \lambda_0(\widetilde{M}, \tilde{g}_0)^{n/2} \cdot \mathrm{Vol}(M, g_0).$$

Preuve. — Posons
$$\Phi_t(x, y) = \int_{\lambda_0(\tilde{g}_0)}^{\lambda_0(\tilde{g}_0)+\varepsilon} e^{-t\lambda} dE(\lambda, x, y) \cdot d\lambda,$$
où dE désigne la mesure spectrale de Δ_{g_0}. Nous avons
$$\int_{\widetilde{M}} |d_1 \Phi_t|^2(x, y) dv_{\tilde{g}_0}(y) =$$
$$= \int_{\widetilde{M}} (\Phi_t \cdot \Delta_1 \Phi_t)(x, y) \cdot dv_{\tilde{g}_0}(y) - \Delta \Big[\int_{\widetilde{M}} \Phi_t(x, y)^2 dv_{\tilde{g}_0}(y) \Big],$$
où d_1 et Δ_1 désignent la différentielle et le laplacien portant sur la première variable. Un théorème classique d'Ehresman dit que le revêtement universel $(\widetilde{M}, \tilde{g}_0)$ d'un espace localement homogène est lui-même homogène. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \int_{\widetilde{M}} \Phi_t(x, y)^2 \cdot vg_{\tilde{g}_0}(y)$ est constante car invariante par les isométries. Comme de plus Φ_t vérifie l'équation de la chaleur, nous en déduisons
$$\int_{\widetilde{M}} |d_1 \Phi_t|^2_{\tilde{g}_0}(x, y) dv_{\tilde{g}_0}(y) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\widetilde{M}} \Phi_t(x, y)^2 dv_{\tilde{g}_0}(y).$$
Posons $\Phi = \frac{\Phi_t}{(\int_{\widetilde{M}} \Phi_t(x,y)^2 dv_{\tilde{g}_0}(y))^{1/2}} \cdot \mathrm{Vol}(g_0)^{1/2}$. En exploitant la remarque 4.2, on vérifie aisément que, selon le point de vue de cette remarque, on a $\Phi \in \mathcal{E}$, ce qui donne
$$n^{n/2} T(g_0) \leqslant \mathrm{Vol}(g_0) \Big[\frac{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\widetilde{M}} \Phi_t^2(x, y) dy}{\int_{\widetilde{M}} \Phi_t^2(x, y) dy} \Big]^{n/2}$$
$$\leqslant (\lambda_0(\tilde{g}_0) + \varepsilon)^{n/2} \cdot \mathrm{Vol}(g_0).$$
Le lemme général suivant achève la preuve de la proposition 4.3.

4.4. LEMME. — *Pour tout variété (M, g) on a*
$$\operatorname*{Sup}_{\substack{g \text{ conforme} \\ \text{à } g_0}} \lambda_0(\widetilde{M}, \tilde{h}) \cdot \mathrm{Vol}(M, g) \leqslant n^{n/2} T(g).$$

Preuve. — Définissons $T(g)$ selon le point de vue de la remarque 4.2. Pour toute métrique h conforme à g, on a
$$n^{n/2} \cdot T(g) = n^{n/2} T(h) = \mathrm{Inf}_{\Phi \in \mathcal{E}} \int_U \Big[\int_{\widetilde{M}} |d_1 \Phi|^2_{\tilde{h}}(x, y) \frac{dv_{\tilde{h}(y)}}{\mathrm{Vol}(h)} \Big]^{n/2} dv_{\tilde{h}}(x)$$
$$\geqslant \mathrm{Inf}_{\Phi \in \mathcal{E}} \Big[\int_U \int_{\widetilde{M}} |d_1 \Phi|^2_{\tilde{h}}(x, y) dv_{\tilde{h}}(y) \cdot dv_{\tilde{h}}(x) \Big]^{n/2} \cdot \mathrm{Vol}(h).$$

On achève la démonstration en commutant les intégrales, en remarquant que

$$\int_{\widetilde{M}} |d_1\Phi|^2_{\tilde{h}}(x,y)dv_{\tilde{h}}(x) \geqslant \lambda_0(\widetilde{M},\tilde{h}) \int_{\widetilde{M}} \Phi^2(x,y)dv_{\tilde{h}}(x)$$

et en se rappelant que $T(g)$ est un invariant conforme d'après la proposition 4.1. ∎

4.5. Corollaire. — *Pour toute surface compacte M dont le genre est au moins égal à 2, pour toute métrique riemannienne g sur M, on a*

$$V(M) = T(g) = \frac{\pi}{4}|\chi(M)|.$$

Si de plus g_0 est une métrique de courbure constante -1 on a

$$\mathrm{Sup}_g\, \lambda_0(\widetilde{M},\tilde{g}) \cdot \mathrm{Vol}(M,g) = \lambda_0(\widetilde{M},\tilde{g}_0) \cdot \mathrm{Vol}(M,g_0) = \frac{\pi}{2}|\chi(M)|.$$

Preuve. — La seconde égalité découle de la proposition 4.3. et du fait que $\lambda_0(\widetilde{M},\tilde{g}_0) = \frac{1}{4}$ et $\mathrm{Vol}(g_0) = 2\pi|\chi(M)|$. On en déduit également que $T(g_0) = \frac{\pi}{4}|\chi(M)|$. Comme toute métrique g est conforme à une métrique g_0 à courbure constante -1 et comme T est un invariant conforme, on déduit également de la proposition 4.3 que $T(g) = \frac{\pi}{4}|\chi(M)|$.

Comme $V(M) = \mathrm{Inf}_g\, T(g)$ d'après la proposition 4.1, on a ainsi achevé la preuve. ∎

5. L'inégalité principale

5.1. Théorème. — *Pour toute variété riemannienne (M,g) dont la courbure de Ricci est minorée par $-(n-1)\cdot g$, on a*

$$\mathrm{Vol}(M,g) \geqslant \left(\frac{2\sqrt{n}}{(n-1)}\right)^n V(M) \geqslant \frac{n^{n/2}}{(n-1)^n n!}\|[M]\|.$$

Remarque 1. — Cette inégalité améliore quantitativement celle de M. Gromov. En dimension 2 par exemple, la première inégalité est optimale et prouve que le volume minimal est atteint pour les métriques de courbure -1 puisqu'elle s'écrit, d'après le corollaire 4.5

$$\mathrm{Vol}(M,g) \geqslant 8V(M) = 2\pi|\chi(M)|.$$

Remarque 2. — D'un point de vue qualitatif, il serait intéressant de voir s'il existe des variétés pour lesquelles $\|[M]\| = 0$ et $V(M) \neq 0$. Remarquons cependant que, d'après le théorème 5.1 et [S], en dimension 3, on a

$$\mathrm{Min\,Vol}(M^3) \neq 0 \iff V(M) \neq 0 \iff \|[M]\| \neq 0.$$

Nous définissons l'*Entropie de la variété* (M,g) par l'égalité $\mathrm{Ent}(M,g) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \mathrm{Log}[\mathrm{Vol}\,\widetilde{B}(x,R)]$, où $\widetilde{B}(x,R)$ est une boule de $(\widetilde{M},\tilde{g})$. On sait que cette entropie est en général majorée par l'*entropie topologique* du flot géodésique et qu'elle lui est égale en courbure négative.

Afin d'établir le théorème 5.1, nous démontrons d'abord la première inégalité en établissant la

5.2. PROPOSITION. — *Pour toute variété riemannienne (M,g), on a*

$$\sup_{h \text{ conforme à } g} \lambda_0(\widetilde{M},\tilde{h})^{n/2}\cdot \mathrm{Vol}(M,h)$$
$$\leqslant n^{n/2}T(g) \leqslant \inf_{h \text{ conforme à } g} \left[\frac{\mathrm{Entropie}(M,h)}{2}\right]^n \cdot \mathrm{Vol}(M,h).$$

Remarque. — La première inégalité est une égalité pour toutes les variétés localement homogènes (proposition 4.3) et pour toutes les variétés de courbure négative dont le revêtement est asymptotiquement harmonique (travaux de Ledrappier). La seconde inégalité est également une égalité pour les variétés de courbure négative dont le revêtement est asymptotiquement harmonique. Ceci redémontre un résultat de Katok ([KK]) : dans la classe conforme d'une métrique asymptotiquement harmonique de courbure négative c'est celle-ci qui est d'entropie topologique minimale (une fois le volume fixé).

Preuve. — Notons d la distance riemannienne associée à la métrique g. Considérons toutes les fonctions ψ de la forme $\psi(x,y) = u[d(x,y)]$ qui sont dans $L^2(\widetilde{M}, \frac{d\tilde{v}_g}{\mathrm{Vol}(g)})$.

Posons
$$\Phi(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{\left[\int_{\widetilde{M}} \psi(x,y)^2 \frac{dv_{\tilde{g}}(y)}{\mathrm{Vol}(g)}\right]^{1/2}}.$$

On a
$$d_X^1\Phi(x,o) = \frac{d_X^1\psi(x,o)}{\|\psi(x,o)\|_{L^2}} - \frac{\psi(x,o)}{\|\psi(x,o)\|_{L^2}}\left\langle \frac{d_X^1\psi(x,o)}{\|\psi(x,o)\|_{L^2}}, \frac{\psi(x,o)}{\|\psi(x,o)\|_{L^2}}\right\rangle$$

$$\|d_X^1(\Phi(x,o)\|_{L^2}^2 = \frac{\|d_X^1\varphi(x,o)\|_{L^2}^2}{\|\varphi(x,o)\|_{L^2}^2} - \left\langle \frac{d_X^1\psi(x,o)}{\|\psi(x,o)\|_{L^2}}, \frac{\psi(x,o)}{\|\psi(x,o)\|_{L^2}}\right\rangle_{L^2}$$
$$\leqslant \frac{\|d_X^1\psi(x,o)\|_{L^2}^2}{\|\varphi(x,o)\|_{L^2}^2}.$$

Pour tout nombre $c >$ Entropie(M,g), la fonction $\psi(x,y) = e^{-\frac{c}{2}d(x,y)}$ est dans $L^2(\widetilde{M}, \frac{dv_{\tilde{g}}}{\mathrm{Vol}(g)})$.

En effet, on a
$$\int_{\widetilde{M}} e^{-c.d(x,y)}dv_g(y) = \int_0^\infty e^{-ct}\cdot \mathrm{Vol}[\partial B(x,t)]dt$$
$$= [e^{-2ct}\,\mathrm{Vol}\,B(x,t)]_0^\infty + 2c\int_0^\infty e^{-2ct}\,\mathrm{Vol}\,B(x,t)dt.$$

Rappelons que, par définition de l'entropie de (M,g) on a, pour tout $c >$ Entropie(M,g)
$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{Vol}\,B(x,t)}{e^{ct}}\right]=0,$$
d'où la convergence des intégrales ci-dessus.

Par suite, nous avons
$$\begin{aligned}n^{n/2}T(g) &\leqslant \int_U\left[\int_{\widetilde{M}}|d_1\Phi|_{\tilde g}^2(x,y)\frac{dv_{\tilde g}(y)}{\mathrm{Vol}(g)}\right]^{n/2}dv_g(x)\\ &\leqslant \int_U\left[\frac{\int_{\widetilde{M}}|d_1\psi|_{\tilde g}^2(x,y)dv_{\tilde g}(y)}{\int_{\widetilde{M}}\psi^2(x,y)dv_{\tilde g}(y)}\right]^{n/2}dv_g(x)\\ &\leqslant c^n\cdot\mathrm{Vol}(M,g).\end{aligned}$$

La minoration se déduit du lemme 4.4. ∎

La proposition 5.2 établit la première inégalité du théorème 5.1. En effet, toute variété (M,g) vérifiant $\mathrm{Ric}(g)\geqslant-(n-1)g$ a son entropie majorée par $(n-1)$ d'après le théorème de comparaison de Bishop. Ceci implique
$$\mathrm{Vol}(M,g)\geqslant\left(\frac{2\sqrt{n}}{n-1}\right)^nT(g)\geqslant V(M)\cdot\left(\frac{2\sqrt{n}}{n-1}\right)^n.$$
La proposition suivante achève alors la preuve du théorème 5.1.

5.3. Proposition. — $V(M)\geqslant\frac{1}{2^n\cdot n!}\|[M]\|$.

Preuve. — Dans un premier temps nous suivrons la démarche de M. Gromov. Notons $\mathcal{M}^+$ l'ensemble des mesures positives sur $\widetilde{M}$.

Pour toute i-cochaîne c sur M, posons
$$\psi(c)(\mu_0,\ldots,\mu_i)=\iiint_{\widetilde{M}}c(y_0,\ldots,y_i)d\mu_0(y_0),\ldots,d\mu_i(y_i).$$
Considérons le sous-complexe des cochaînes "multilinéaires" alternées sur $\mathcal{M}_1^+$, où la "multilinéarité" signifie que c est continue et que $c[\alpha\mu_0+\beta\mu_0',\mu_1,\ldots,\mu_i]=\alpha\cdot c[\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_i]+\beta\cdot c[\mu_0',\mu_1,\ldots,\mu_i]$ dès que $\alpha+\beta=1$ (l'invariance par application de bord est alors évidente) et notons $H_L^i(\mathcal{M}^+/\Gamma)=H_L^i(\mathcal{M}_1^+/\Gamma)$ la cohomologie associée (où $\mathcal{M}_1^+$ est l'ensemble des mesures de masse totale égale à 1 sur $\widetilde{M}$). On a le

5.4. Lemme. — (Lecture commentée de [GV] p.35). *Pour toute application $\Phi : M\to\mathcal{M}_1^+$ qui est $\pi_1(M)$-équivariante, l'application ψ induit un isomorphisme isométrique de $H_b^i(M)$ sur $H_L^i(\mathcal{M}_1^+/\Gamma)$ dont l'application réciproque est l'application Φ^* induite par $c\mapsto c\circ\Phi$.*

Preuve. — Montrons tout d'abord que l'application Φ^* ne dépend pas de Φ. En effet, si Φ_1 et Φ_2 sont deux applications $\pi_1(M)$-équivariantes de $\widetilde{M}$ dans $\mathcal{M}_1^+$, nous définissons une 1-cochaîne bornée b à partir de toute 2 cochaîne fermée c par l'égalité :
$$\begin{aligned}b(x_0,x_1)&=c[\Phi_1(x_0),\Phi_2(x_0),\Phi_2(x_1)]+c[\Phi_2(x_1),\Phi_1(x_1),\Phi_1(x_0)]\\&=c[\Phi_2(x_0),\Phi_2(x_1),\Phi_1(x_1)]+c[\Phi_1(x_0),\Phi_2(x_0),\Phi_1(x_1)].\end{aligned}$$

Un calcul direct donne (en utilisant le fait que $dc = 0$)

$$db(x_0, x_1, x_2) = c(\Phi_2(x_0), \Phi_2(x_1), \Phi_2(x_2)) \\ - c(\Phi_1(x_0), \Phi_1(x_1), \Phi_1(x_2))$$

d'où

$$[c \circ \Phi_1] = [c \circ \Phi_2].$$

La démonstration se fait de la même manière lorsque c est une i−cochaîne fermée.

On a donc $\Phi^* = \delta^*$ où δ est l'application $x \mapsto \delta_x$.

On a donc $\psi_0^* \Phi^*([a]) = \psi^* \circ \delta^*([a]) = [\psi(a \circ \delta)] = [a]$ car

$$\psi(a \circ \delta)(\mu_0, \ldots, \mu_i) = \iiiint_{\widetilde{M}} a(\delta_{y_0}, \ldots, \delta_{y_i}) d\mu_0(y_0), \ldots, d\mu_i(y_i) \\ = a(\mu_0, \ldots, \mu_i) \text{ par multilinéarité.}$$

Par ailleurs, $\Phi^* \circ \psi^*([c]) = \delta^*([\psi(c)]) = [\psi(c) \circ \delta] = [c]$ car

$$\psi(c) \circ \delta(y_0, \ldots, y_i) = \iiiint c(z_0, \ldots, z_i) d\delta_{y_0}(z_0) \cdots d\delta_{y_i}(z_i) = c(y_0, \ldots, y_i).$$

Par ailleurs,

$$\|\psi^*([c])\|_\infty = \|[\psi(c)]\|_\infty \leqslant \operatorname{Inf}_{c' \in [c]} \|\psi(c')\|_\infty \leqslant \inf_{c' \in [c]} \|c'\|_\infty \leqslant \|[c]\|_\infty$$

et d'autre part

$$\|\Phi^*([b])\|_\infty = \|[b \circ \Phi]\|_\infty \leqslant \operatorname{Inf}_{b' \in [b]} \|b' \circ \Phi\|_\infty \leqslant \operatorname{Inf}_{b' \in [b]} \|b'\|_\infty = \|[b]\|_\infty.$$

Q.E.D.

Fin de la preuve de la proposition 5.3. — La deuxième définition du volume simplicial donne, si φ_n est l'application canonique de $H_b^n(M)$ dans $H^n(M)$,

$$\|[M]\| = \operatorname{Sup}_{\beta \in \varphi_n^{-1}(\text{can})} \frac{\langle \beta, [M] \rangle}{\|\beta\|_\infty} = \operatorname{Sup}_\beta \frac{\langle \Phi^* \circ \psi(\beta), [M] \rangle}{\|\Phi^* \circ \psi(\beta)\|_\infty} \\ = \operatorname{Sup}_\beta \frac{\langle \psi(\beta), \Phi_*[M] \rangle}{\|\psi(\beta)\|} \text{ car } \Phi^* \text{ est une isométrie} \\ = \operatorname{Sup}_{a \text{ linéaire}} \frac{\langle a, \Phi_*([M]) \rangle}{\|a\|_\infty}.$$

Reprenons maintenant la démarche de [GV] p.33.

Etant donné une n−cochaîne multilinéaire alternée a sur $\mathcal{M}^+$, on définit la n−forme extérieure $\tilde{a}$ en décidant que, si $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ est un système de n vecteurs de $T_\mu \mathcal{M}^+ \simeq \mathcal{M}$ = espace des mesures sur $\mathcal{M}^+$ de masse finie, alors $\tilde{a}_\mu$ est définie par

$$\tilde{a}_\mu(\mu_1, \ldots, \mu_n) = n! a(\mu, \mu_1, \ldots \mu_n).$$

Inversement, l'intégrale de cette forme sur le simplexe $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ vaut $a(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$. On appelle comasse de $\tilde{a}$ la borne supérieure, pour tous les

$\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n$ de masse totale 1 (vecteurs unitaires) de $\tilde{a}_\mu(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On a donc comasse $(\tilde{a}) = n!\|a\|_\infty$. Cette définition permet d'écrire

$$\|[M]\| = n! \operatorname{Sup}_{a \text{ multilinéaire}} \frac{\int_{\Phi(M)} \tilde{a}}{\text{comasse}\,(\tilde{a})}$$

Notons $\Lambda^{n+1}(\mathcal{M})$ l'espace des $(n+1)-$formes linéaires alternées sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ (*à coefficients constants*). La forme $\tilde{a}$ peut être vue comme $i(\mu)\omega_a$, où i est le produit intérieur et ω_a la $(n+1)-$forme alternée canoniquement associée à a multilinéaire alternée (*i.e.* $\omega_a = a$).

On a donc

$$\|[M]\| = n! \operatorname{Sup}_{\omega \in \Lambda^{n+1}(\mathcal{M})} \frac{\int_{\Phi(M)} i(\mu) \cdot \omega \cdot d\mu}{\text{comasse}\,(\omega)}.$$

Définissons la masse de $\Phi(M)$ comme le supremum, pour toutes les $n-$formes α de comasse $\leqslant 1$, de $\int_{\Phi(M)} \alpha$. On a donc

$$\|[M]\| \leqslant n! \text{ masse } \Phi(M) \text{ dans } \mathcal{M}_1^+.$$

Considérons maintenant l'application

$$J : \begin{cases} S_\mu^\infty \subset L^2(\widetilde{M}, \mu) & \to \mathcal{M}_1^+ \\ f & \mapsto f^2 d\mu \end{cases}$$

A toute application Φ, $\pi_1(M)-$équivariante de $\widetilde{M}$ dans S_μ^∞, on associe l'application $J \circ \Phi$.

L'application $J \circ \Phi$ est bien $\pi_1(M)-$équivariante de $\widetilde{M}$ dans $\mathcal{M}_1^+$ (puisque, par construction, $\gamma^*\mu = \mu$, où μ est la mesure de référence choisie pour définir S_μ^∞). Pour achever la preuve du théorème 5.1, il suffit donc de montrer que

$$\text{Masse}\,[J \circ \Phi(M)] \leqslant 2^n \operatorname{Vol} \Phi(M)\ .$$

Ceci se déduit du fait que J est une application lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure ou égale à 2. En effet, si f_1 et f_2 vérifient $\|f_1\|_{L^2(\mu)} = \|f_2\|_{L^2(\mu)} = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|J(f_1) - J(f_2)\| &= \int_{\widetilde{M}} |f_1^2 - f_2^2) d\mu \\ &\leqslant \Big[\int_{\widetilde{M}} (f_1 - f_2)^2 d\mu \Big]^{1/2} \Big(\int_{\widetilde{M}} (f_1 + f_2)^2 d\mu \Big)^{1/2} \\ &\leqslant 2\|f_1 - f_2\|_{L^2(\mu)}\ . \end{aligned}$$

■

Bibliographie

[BE] BESSE A.L. — *Einstein Manifolds*, Grundlehren, Springer-Verlag, 1987.

[E-I] EL SOUFI A., ILIAS S. — *Opérateurs de Schrödinger sur une variété riemannienne et volume conforme*, Preprint.

[GV] GROMOV M. — *Volume and Bounded cohomology*, Public. Math. I.H.E.S., **56** (1982), 1–99.

[KK] KATOK A. — *Entropy and closed geodesics*, Ergodic theory and dynamical systems, **2** (1982), 339–367.

[MR] MOSER J. — *On the volume element on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., **120** (1965), 286–294.

[S] SOMA T. — *The Gromov invariant for links*, Invent. Math., **64** (1981), 445–454.

[VE] VILLE M. — *Sur le volume des variétés riemanniennes pincées*, Bull. Soc. Math. France , **115** (1987), 127–139.

INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)