Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Christophe Bavard

Inégalités isosystoliques conformes

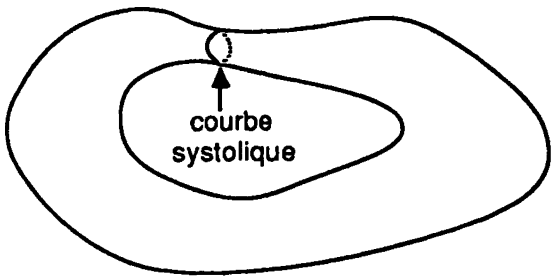
Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 71-79
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__71_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1987–1988 (71–79)

INÉGALITÉS ISOSYSTOLIQUES CONFORMES

par *Christophe BAVARD*

Soit M une variété riemannienne compacte non simplement connexe. La *systole* de M est la plus petite longueur d'une courbe non contractile :



Une inégalité isosystolique permet d'estimer le volume en fonction de la systole, *i.e.*

$$\mathrm{vol} \geqslant C(\mathrm{sys})^n$$

pour un type topologique (ou conforme) fixé. On s'intéressera ici uniquement à des inégalités *optimales*.

Remarque. — Une telle inégalité non triviale ($C > 0$) n'existe pas toujours; par exemple pour $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ on a $C = 0$ (prendre $\mathbf{S}^1$ de longueur fixée et $\mathbf{S}^2$ d'aire petite).

I. Deux résultats classiques

1.1. — Les premières inégalités ont été obtenues par Lœwner (1949) sur le tore $\mathbf{T}^2$: $C = \sqrt{3}/2$ avec égalité pour le tore plat équilatéral, et Pu (1952) sur le plan projectif réel $\mathbf{P}^2$: $C = 2/\pi$ avec égalité pour la courbure 1 (voir [Pu]).

La preuve s'appuie sur le fait que toute classe conforme de métriques sur $\mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{P}^2$ contient une métrique homogène; avec $\mathbf{S}^2$, ce sont les seules surfaces fermées qui ont cette propriété. Considérons donc une métrique $g = \varphi^2 g_0$ sur $M = \mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{P}^2$, avec

Isom $g_0 = G$ transitif et $\varphi \in C^0(M)$. Noter que

$$\operatorname{long}^g(\gamma) = \int \varphi_o\gamma \; ds \quad \text{et} \quad \operatorname{vol} g = \int \varphi^2 dg_0 \; .$$

On fait la moyenne de φ par le groupe d'isométries en posant

$$\psi(x) = \int_G \varphi_o\sigma(x)d\sigma \quad (= \text{ constante})$$

où $x \in M$ et $d\sigma$ est la mesure de Haar de masse 1 sur G . Alors :

$$\operatorname{vol} g = \int_G \Big(\int_M \varphi_o^2\sigma dg_0 \Big) d\sigma \geqslant \int_M \Big(\int_G \varphi_o\sigma d\sigma \Big)^2 dg_0 = \int_M \psi^2 dg_0 \;,$$

et pour toute courbe γ non contractile :

$$\operatorname{long}^{\psi^2 g_0}(\gamma) = \int \psi_o\gamma \; ds = \int_G \big(\varphi_o\sigma_o\gamma\big) \; ds \geqslant \operatorname{sys} g \; .$$

Ce qui établit les inégalités de Lœwner et Pu.

1.2. — Dans la théorie des applications conformes, on s'intéresse à la question plus générale de majorer la *longueur conforme* d'une famille de courbes Γ . Etant donné (M^2, g_0) et Γ on définit

$$\operatorname{long\,conf} \Gamma = \sup_{g=\varphi^2 g_0} \big(\operatorname{long}^g \Gamma / \sqrt{\operatorname{vol} g}\big)$$

et également le *module conforme* de Γ :

$$\operatorname{mod}(\Gamma) = (\operatorname{long\,conf} \Gamma)^{-2}$$

qui sont des invariants conformes (voir [Je]).

M. Gromov décrit dans [Gr] la méthode des longueurs extrémales comme suit. A toute probabilité μ sur Γ est associée une mesure ${}^*\mu$ sur M^2 :

$$\langle {}^*\mu, \varphi \rangle = \int_\Gamma \Big(\int \varphi_o\gamma \; ds \Big) d\mu(\gamma) \;, \quad \varphi \in C^0(M) \; .$$

Si ${}^*\mu$ a une densité $f \in L^2(dv)$ par rapport à la mesure volume dv de M^2 , alors

$$\operatorname{long\,conf} \Gamma \leqslant \|f\|_2 \; .$$

Par exemple $\operatorname{vol} / \operatorname{sys}^2(g) \geqslant 1/\|f\|_2^2 \;\; (g = \varphi^2 g_0)$. En effet

$$\operatorname{sys} g \leqslant \int_\Gamma \Big(\int \varphi_o\gamma \; ds \Big) d\mu(\gamma) = \int_M f\varphi dv \leqslant \|f\|_2 (\operatorname{vol} g)^{1/2} \; . \tag{1}$$

Cependant l'inégalité isosystolique obtenue n'est pas optimale en général.

II. Critère de minimalité

Les inégalités (1) montrent que M^2 minimise vol / sys^2 dans sa classe conforme quand les conditions suivantes sont vérifiées :

1) toute courbe du support de μ est systolique;

2) $f \equiv$ constante.

En fait, elles sont nécessaires :

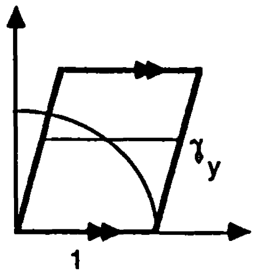
THÉORÈME ([Ba 3]). — *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n , $s_0 = \operatorname{sys} M$, $v_0 = \operatorname{vol} M$, dv la mesure volume et S l'espace des courbes systoliques de M .*

M minimise $\operatorname{vol}/\operatorname{sys}^n$ dans sa classe conforme si et seulement si il existe une probabilité μ sur S telle que ${}^*\mu = s_0/v_0\, dv$.

Dans ce cas M est unique à homothétie près.

Il est clair que l'existence de μ entraîne la minimalité (on dira que la métrique est *optimale*). Voici quelques exemples :

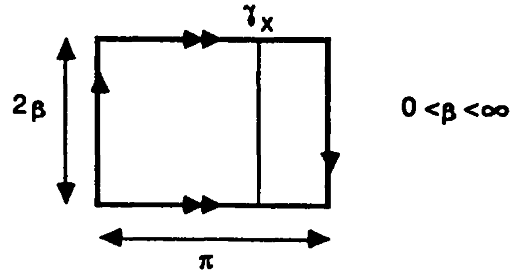
Exemple 1. —



$\mu = dy$ sur $\{\gamma_y\} \subset S$. Donc un tore plat est optimal.

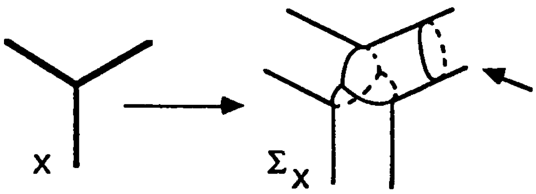
Noter qu'on n'a pas utilisé tout le groupe d'isométries.

Exemple 2. — Soit K_β la bouteille de Klein plate :



On voit que K_β est optimale pour $0 < \beta \leqslant \pi/2$ en posant $\mu = dx$ sur $\{\gamma_x\} \subset S$. Pour $\beta > \pi/2$ l'inégalité obtenue n'est pas optimale car les γ_x ne sont plus systoliques.

Exemple 3. — A tout graphe métrique compact X on associe une surface Σ_X (plate avec des singularités coniques) :



Pour chaque sommet de degré k de X, on a deux singularités d'angle $k\pi$. Quand systole $X \geqslant 1$, Σ_X est optimale (S = les sections des cylindres, μ = mesure de longueur de X).

Démonstration du théorème. — Il reste à prouver l'existence de μ pour une métrique optimale. Fixons $L > \operatorname{sys} M$, et notons Γ^L l'espace des courbes géométriques non contractiles de longueur $\leqslant L$, muni de la topologie uniforme quotient; c'est un compact métrique. Sa topologie est aussi définie par la distance de Hausdorff des compacts de M . Enfin, notons K l'ensemble convexe et compact des probabilités sur Γ^L avec la topologie vague.

Soit $\varphi \in C^0(M)$ et

$$\overline{\varphi}(\gamma) = \int \varphi_o \gamma \, ds \ .$$

Si φ est positive, $\overline{\varphi}$ est semi-continue inférieurement sur Γ^L (c'est une fonction longueur), donc quand $\mu \in K$, $\langle {}^*\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \overline{\varphi} \rangle$ est bien défini pour tout $\varphi \in C^0(M)$. Observer que

$$\langle {}^*\mu, 1 \rangle \geqslant s_0 \ .$$

Assertion 1.

$$s_0/v_0 \; dv \text{ appartient à l'adhérence de } {}^*K \ .$$

Sinon il existerait $\psi \in C^0(M)$ et a réel > 0 tels que

$$\frac{s_0}{v_0} \int \psi dv + a < \inf_{\nu \in {}^*K} \langle \nu, \psi \rangle = \inf_{\mu \in K} \langle {}^*\mu, \psi \rangle \ .$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$:

$$a\varepsilon + \int \frac{s_0}{v_0}(1 + \varepsilon\psi) dv < \inf_{\mu \in K} \langle {}^*\mu, 1 + \varepsilon\psi \rangle \ .$$

Soit M^φ la métrique conforme M par $\varphi = 1 + \varepsilon\psi$ (supposée > 0) et $s = \operatorname{sys} M^\varphi$, $v = \operatorname{vol} M^\varphi$. Par continuité de la systole et de la longueur par rapport à φ il existe $\gamma \in \Gamma^L$ systolique pour M^φ; d'où

$$\inf_{\mu \in K} \langle {}^*\mu, \varphi \rangle = s \ , \ (\mu = \delta_\gamma) \ .$$

Vu que $s_0/v_0 \int \varphi dv = s_0\sqrt{v/v_0} - O(\varepsilon^2)$, on en déduit finalement

$$s_0\sqrt{v/v_0} < s - a\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

ce qui est absurde.

Assertion 2.

$$s_0/v_0\ dv \in {}^*K\ .$$

On sait déjà qu'il existe une suite $(\mu_n) \subset K$ qui converge vers $\mu \in K$ et avec $\lim_n\ {}^*\mu_n = \frac{s_0}{v_0} dv$. Soit $\varphi \in C^0(M)$, $\varphi > 0$. Comme $\overline{\varphi}$ est s.c.i. on a

$$\langle \mu_n, \overline{\varphi} \rangle = \sup\{\langle \mu_n, g\rangle\ ;\ g \text{ continue } \leqslant \overline{\varphi}\}$$

(idem pour μ) et pour tout réel $\alpha > 0$ il existe g continue sur Γ^L telle que

$$\langle \mu, \overline{\varphi} \rangle \leqslant \alpha + \langle \mu_n, g\rangle \leqslant \alpha + \langle \mu_n, \overline{\varphi}\rangle = \alpha + \langle {}^*\mu_n, \varphi\rangle$$

(n assez grand). Donc

$$\langle {}^*\mu, \varphi\rangle \leqslant \frac{s_0}{v_0} \int \varphi\ dv\ . \tag{2}$$

En fait (2) est une égalité car pour $0 < \varphi < 1$

$$s_0 \leqslant \langle {}^*\mu, 1\rangle = \langle {}^*\mu, \varphi\rangle + \langle {}^*\mu, 1-\varphi\rangle \leqslant s_0\ .$$

D'où l'assertion 2.

Enfin, on vérifie facilement que le support de μ est inclus dans S .

III. Cas de la bouteille de Klein (voir [Ba 2])

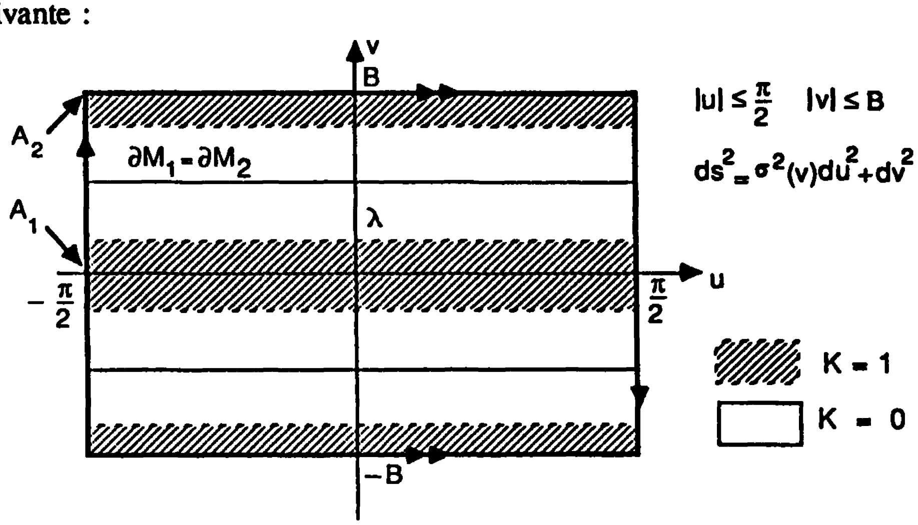
Toute bouteille de Klein est conformément équivalente au modèle plat K_β , $0 < \beta < \infty$ (II. ex.2); β sera le *type conforme*. On se propose de déterminer le volume systolique conforme

$$m(\beta) = \inf\{\operatorname{vol} g/\operatorname{sys}^2 g\ ;\ g \text{ de type } \beta\}\ .$$

1). — $0 < \beta \leqslant \pi/2$.

$$m(\beta) = \pi/2\beta \qquad \text{(voir II, ex. 2)}\ .$$

2). — Pour $\beta > \pi/2$ les métriques plates ne sont plus optimales. Soit K_σ la bouteille suivante :



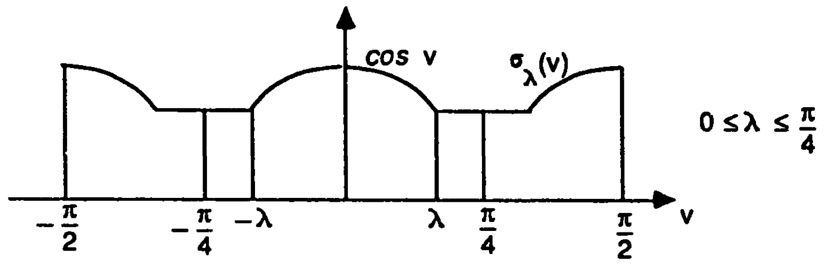
où σ est une fonction continue de v , paire et B-périodique. Topologiquement, K_σ est formée de 2 rubans de Möbius collés par leur bord $\partial M_1 = \partial M_2$. La métrique est invariante par les "translations" $(u,v) \mapsto (u+\theta,v)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, la symétrie le long de ∂M_1 et la symétrie le long des âmes A_i $(i = 1,2)$ des rubans. Noter aussi que les verticales sont géodésiques et que la courbure est $-\sigma''/\sigma$.

Posons $f(v) = \int_0^v dt/\sigma(v)$ et $F(x,y) = \big(x, g(y)\big)$ où g est la réciproque de f . Alors

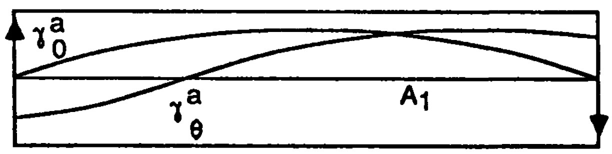
$$F^*(ds^2) = \sigma^2 \circ g(y)(dx^2 + dy^2)$$

le type conforme de K_σ est donc $\beta = \int_0^B dv/\sigma(v)$.

Pour l'instant on conserve $B = \pi/2$ et on introduit progressivement de la courbure 1 dans la bouteille plate carrée ($\sigma \equiv 1$) à partir des âmes A_i :



Il s'agit de 2 rubans de Möbius à courbure 1 de largeur 2λ raccordés par un anneau plat. Les verticales $\{\gamma_u\}$, $(|u| \leqslant \pi/2)$ sont systoliques de longueur π , mais il y a d'autres systoles dans les bandes elliptiques :



γ^a_θ = translatée de γ^a_0 par θ

$\{\gamma_u\}$ est muni de la mesure $\mu_1 = \cos\lambda\ du$ de sorte que $^*\mu_1$ est la mesure volume de la partie plate.

Puis on cherche μ_2 sur $\{\gamma^a_\theta\}$, $(0 \leqslant a \leqslant \lambda$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ de la forme $x(a)da \otimes d\theta$ pour avoir $^*(\mu_1 + \mu_2) = dv$ sur $\{|v| \leqslant \lambda\}$. En fait

$$^*\mu_2 = 2\chi_{\{|v|\leqslant\lambda\}} \left[\int_{|v|}^{\lambda} \left(\sigma_\lambda^2(v) - \sigma_\lambda^2(a)\right)^{-1/2} x(a)da \right] \cdot \mathrm{vol}$$

(χ = fonction caractéristique).

D'où

$$2\int_v^\lambda (\cos^2 v - \cos^2 a)^{-1/2} x(a)da = 1 - \cos\lambda/\cos v \quad (0 \leqslant v \leqslant \lambda) .$$

En posant $z = \cos^2 a - \cos^2 \lambda$ et $t = \cos^2 v - \cos^2 \lambda$ on se ramène à une équation de la forme

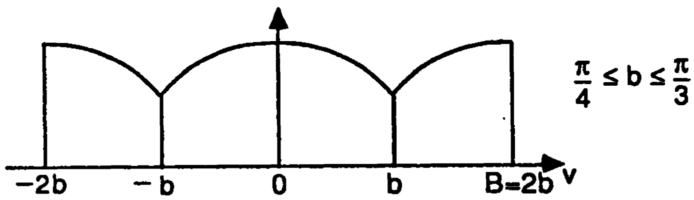
$$\int_0^t (t-z)^{-1/2} y(z)dz = f(t) \ , \ (0 \leqslant t \leqslant t_0)$$

de solution $g(t) = \frac{1}{\pi}\left[f(0)/\sqrt{t} + \int_0^t (t-z)^{-1/2} f'(z)dz\right]$. On trouve ainsi $x(a) = \sin a/\pi \cos a(\cos^2 a - \cos^2 \lambda)$, $0 \leqslant a \leqslant \lambda$. La métrique associée à σ_λ est donc optimale. Quand λ croît de 0 à $\pi/4$, β $(= 2\log \operatorname{tg}(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4}) + (\frac{\pi}{2} - 2\lambda)\cos\lambda)$ croît de $\pi/2$ à $2\log(1+\sqrt{2})$ et

$$m(\beta) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\lambda + (\frac{\pi}{4} - \lambda)\cos\lambda\right]$$

décroît de 1 à $2\sqrt{2}/\pi$. La bouteille plate carrée s'est métamorphosée en une bouteille K_0 à courbure 1, double d'un ruban de Möbius sphérique de longueur π et de largeur $\pi/2$ (métrique lisse en dehors d'une courbe).

3). — Reprenons le modèle général K_σ . Pour augmenter encore le type conforme on augmente B :



Les verticales ne sont plus systoliques, et la systole reste égale à π tant que la longueur du bord des 2 rubans sphériques est supérieure à π , *i.e.* $b \leqslant \pi/3$. Dans $\{|v| \leqslant b\}$ on considère comme plus haut les $\{\gamma_\theta^a\}$, $0 \leqslant a \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, et

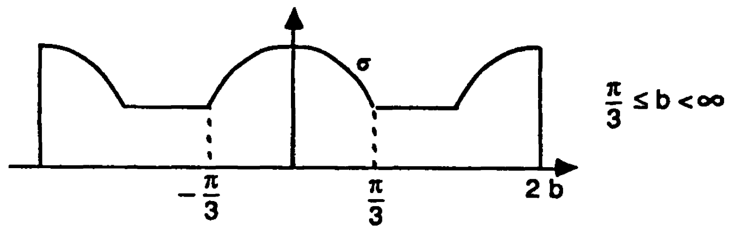
$$\mu = \frac{\sin 2a}{2\pi}(\cos^2 a - \cos^2 b)^{-1/2} \ , \ (0 \leqslant a \leqslant b)$$

(de même pour $\{b \leqslant |v| \leqslant 2b\}$). La mesure associée $^*\mu$ est le volume. Quand $b \in [\pi/4, \pi/3]$ on trouve

$$\beta = 2\log\operatorname{tg}(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}) \qquad \text{(croît de } 2\log(1+\sqrt{2}) \text{ à } 2\log(2+\sqrt{3})\text{) et}$$

$$m(\beta) = \frac{4}{\pi}\operatorname{th}\frac{\beta}{2} \qquad \text{(croît de } 2\sqrt{2}/\pi \text{ à } 2\sqrt{3}/\pi\text{)} .$$

4). — Enfin pour épuiser les valeurs de β, il suffit d'épaissir le bord commun des 2 rubans du cas précédent $b = \pi/3$ en un anneau plat de longueur π et de largeur arbitraire :



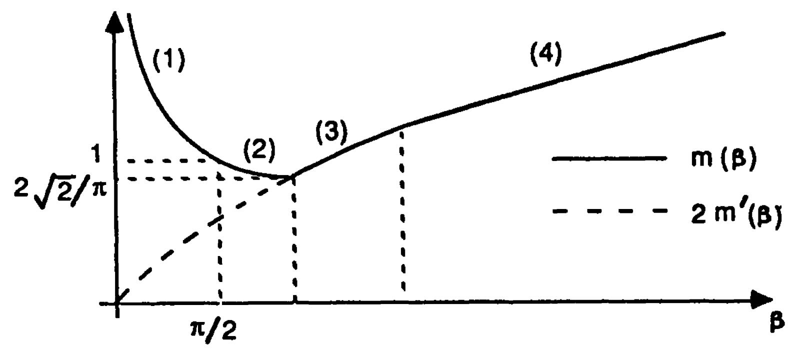
Dans la partie plate où les courbes d'équation $v = \pm a$ sont systoliques on prend $\mu = da$, $(\pi/3 \leqslant a \leqslant 2b - \pi/3)$, puis on complète par une mesure comme en *3)*. Ainsi

$$\beta = 2\left[\log(2+\sqrt{3}) + 4(b - \pi/3)\right]$$

et

$$m(\beta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{2\pi}(\beta - 2\log(2+\sqrt{3}))\ .$$

Voici l'allure de $m(\beta)$:



Remarque. — Soit $m'(\beta)$ le minimum de vol / sys^2 pour les rubans de Möbius conformément équivalents au ruban plat de longueur π et de largeur β . $m'(\beta)$ est donné seulement par les parties *3)* et *4)*, car il n'y a pas à contrôler la longueur des courbes verticales. On retrouve grâce au morceau *3)* une inégalité qui figure dans [Pu] avec une preuve analytique assez longue.

Comme corollaire on obtient l'inégalité optimale pour la bouteille de Klein [Ba 1] :

THÉORÈME. — *Pour toute métrique continue sur* K *on a*

$$\mathrm{vol} / \mathrm{sys}^2 \geqslant 2\sqrt{2}/\pi$$

et l'égalité caractérise K_0 *à isométrie et homothétie près.*

Bibliographie

[Ba 1] BAVARD C. — *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein*, Math. Ann., **274** (1986), 439-441.

[Ba 2] BAVARD C. — *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, Geometriae Dedicata, **27** (1988), 349-355.

[Ba 3] BAVARD C. — *Inégalités isosystoliques conformes*, preprint.

[Gr] GROMOV M. — *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **18** (1983), 1-147.

[Je] JENKINS J. — *Univalent functions and conformal mapping*, Springer-Verlag, 1965.

[Pu] PU P. — *Some inequalities in certain non orientable Riemannian manifolds*, Pacific J. Math., **2** (1952), 55-71.

Christophe BAVARD
E.N.S. Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07