Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

YVES CARRIÈRE

Variations sur les flots riemanniens

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 43-55

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__43_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (43–55)

VARIATIONS SUR LES FLOTS RIEMANNIENS

par *Yves CARRIÈRE*

Avertissement : La traduction anglaise du texte présent doit constituer l'un des appendices du livre de P. Molino, *Riemannian Foliations*, à paraître in Progress in Math, Birkaüser. Je l'insère ici en pensant qu'il couvre *grosso modo* deux des conférences que j'ai données dans ce séminaire. Les références internes du livre ont été conservées et j'ai juste ajouté une section 0 tirée de [C3] qui rappelle brièvement quelques notions de base déjà nécessaires à un premier survol du sujet.

Le but de ce texte est de donner un résumé des résultats connus sur les feuilletages riemanniens de dimension 1 orientés. Ces feuilletages seront plus brièvement appelés *flots riemanniens*. Le terme "flot" utilisé ici n'est qu'une contraction de "feuilletage de dimension 1 orienté" et par conséquent *ne sous-entend pas de paramétrage*. Tout au long de ce qui suit, nous renverrons souvent de manière implicite à [C1] pour des détails et des exemples. Les flots riemanniens apparaissent dans les deux situations naturelles suivantes. Donnons-nous une variété riemannienne (M, g). Soit φ_t un groupe à un paramètre d'isométries de (M, g). Les orbites de φ_t (supposé sans singularité) constituent un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 orienté pour lequel la métrique g est évidemment quasi-fibrée (bundle like). Par conséquent, $\mathcal{F}$ est un flot riemannien. Un flot riemannien qui peut être obtenu par ce procédé sera appelé *flot isométrique*. La seconde situation est celle où l'on prend sur (M, g) un feuilletage totalement géodésique de codimension 1, transversalement orienté; le feuilletage qui lui est orthogonal est un flot riemannien $\mathcal{F}$ ayant g pour métrique quasi-fibrée (*cf.* [Gh1]). Ainsi l'étude des feuilletages totalement géodésiques de codimension 1 est indissociable de celle des flots riemanniens (*cf.* Appendice C).

Le texte qui suit est organisé en forme de variations sur le théorème de structure des flots riemanniens. Dès la section 1, nous énonçons ce théorème et indiquons comment on peut aborder sa démonstration dans le cadre des variétés presque plates de Gromov. Au début de la section 2, nous esquissons la démonstration de ce même théorème pour un flot isométrique. L'existence d'un exemple de flot riemannien non isométrique prouve qu'il n'y a pas d'espoir que cette démonstration fonctionne directement dans le cas général. Pour finir, nous énonçons les théorèmes de P. Molino et V. Sergiescu [M-S] permettant de caractériser les flots riemanniens qui sont isométriques et ceux qui ont une section en termes de cohomologie basique. A la section 3 est rappelé le théorème de structure du groupe d'holonomie d'un flot de Lie qui est à la source du théorème de structure des flots riemanniens. En application, nous montrons brièvement comment on peut classifier les G-flots de Lie où G est supposé *simple* en utilisant un article de C. Moore [Moo] (pour le cas où G est *nilpotent* voir Appendice E). La section 4 est consacrée à d'autres classifications. On donne d'abord celle des flots riemanniens "transversalement à courbure constante". Le cas hyperbolique (courbure -1) est dû à D. Epstein [E]. Nous esquissons la démonstration conduisant à la classification dans le cas euclidien (courbure 0) et elliptique (courbure 1). On donne ensuite des indications sur la classification des flots riemanniens en dimension 3 [C1] et celle récemment obtenue en dimension 4 par R. Almeida et P. Molino [A-M]. A la dernière section, nous décrivons les résultats dûs à A. Ranjan [R] portant sur l'existence de flots riemanniens sur une variété riemannienne fixe.

0. Rappels

Nous allons essentiellement rappeler la définition de l'algèbre structurale $\mathfrak{g}$ d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ d'une variété compacte M (*cf.* [Mo1] pour les détails). Dire que $\mathcal{F}$ est *riemannien* revient à dire qu'il existe sur M une métrique riemannienne g dont la partie orthogonale à $\mathcal{F}$ est invariante par holonomie. On dit alors que g est *quasi-fibrée* (bundle like). Pour une telle métrique, on considère $\hat{M}$ la variété fibrée sur M dont la fibre au-dessus d'un point x est constituée des repères orthonormés de $T_x(\mathcal{F})^{\perp}$. Cette variété est un O_q-fibré principal (q =codim $\mathcal{F}$) que l'on appelle aussi *variété des repères orthonormés transverses à* $\mathcal{F}$. La propriété de g permet de construire un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de $\hat{M}$ relevé de $\mathcal{F}$ et ayant même dimension. Si l'on voit $\mathcal{F}$ comme localement engendré par des flots $\varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^p$, alors $\hat{\mathcal{F}}$ est localement engendré par les différentielles $D\varphi_t^1, \ldots, D\varphi_t^p$ agissant sur les repères orthonormés transverses à $\mathcal{F}$. Par construction, $\hat{\mathcal{F}}$ est invariant par l'action de O_q sur $\hat{M}$ et se projette sur $\mathcal{F}$.

THÉORÈME [Mo1]. — *Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est transversalement parallélisable complet; en particulier, les adhérences des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ fibrent $\hat{M}$ et la restriction de $\hat{\mathcal{F}}$ à l'une de ces adhérences est un $\mathfrak{g}$-feuilletage de Lie.*

Nous allons essayer de donner une idée de la façon dont apparait l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dire que $\hat{\mathcal{F}}$ est transversalement parallélisable complet revient à dire qu'il existe des champs de vecteurs complets $X_1, \ldots, X_{q'}$ ($q' =$ codim$\hat{\mathcal{F}}$) transverses à $\hat{\mathcal{F}}$ qui en chaque point de $\hat{M}$ forment une base du fibré normal de $\hat{\mathcal{F}}$ et dont les flots associés sont des automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$. Etant donné un champ de vecteurs X, appelons $\overline{X}$ sa partie normale à $\hat{\mathcal{F}}$. On vérifie que les $\overline{[X_i, X_j]}$ ont des coefficients en les $\overline{X_i}$ qui sont des fonctions *basiques* (*i.e.* constantes sur les feuilles) de $\hat{\mathcal{F}}$ et sont donc constants en restriction à l'adhérence $\overline{L}$ d'une feuille L. Les parties des $\overline{X_i}$ tangentes à $\overline{L}$ engendrent par conséquent une algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ qui fait de $\hat{\mathcal{F}}_{|\overline{L}}$ un $\mathfrak{g}$-feuilletage de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est (à automorphisme d'algèbre de Lie près) un invariant du feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ que l'on appelle *l'algèbre de Lie structurale de* $\mathcal{F}$. L'invariance par rapport au choix de $\overline{L}$ provient du fait que les flots associés aux champs $X_1, ..., X_{q'}$ engendrent un groupe *transitif* d'automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$. Ceci signifie qu'étant donné deux feuilles L_1 et L_2 de $\hat{\mathcal{F}}$, il existe un difféomorphisme φ de $\hat{M}$ préservant les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ et envoyant L_1 sur L_2.

1. Structure des flots riemanniens

Le théorème de structure général énoncé au cours du Chapitre VI (*cf.* [Mo1]) se précise de la façon suivante pour les flots riemanniens des variétés compactes :

THÉORÈME 1.1 [C1] OU [C2] . — *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien sur une variété compacte M. Désignons par N l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ et par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$. On a alors :*

1) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne.

2) La variété N est difféomorphe à un tore T^k.

3) Le feuilletage $\mathcal{F}_{|N}$ restriction de $\mathcal{F}$ à N est conjugué différentiablement à un feuilletage linéaire de T^k.

L'idée de départ pour la démonstration est de considérer la variété des repères orthonormés transverses $\hat{M}$ de $\mathcal{F}$ et le feuilletage relevé $\hat{\mathcal{F}}$ (*cf.* Chapitre IV). Dans l'adhérence d'une de ses feuilles $\hat{\mathcal{F}}$ est un $\mathfrak{g}$-flot de Lie (*cf.* Chapitre VI). On est alors ramené à démontrer le résultat dans le cas où $\mathcal{F}$ est un $\mathfrak{g}$-flot de Lie à feuilles denses sur une variété compacte. Nous reviendrons sur ce point à la section 3.

Un flot riemannien sur une variété M est dit *complet* s'il existe une métrique riemannienne *complète* sur M et quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$.

PROPOSITION 1.2 [Mo2]. — *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien complet sur une variété M. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont toutes fermées ou toutes d'adhérence compacte.*

En groupant ces deux résultats on voit que la topologie d'un flot riemannien complet en restriction à l'adhérence d'une de ses feuilles est parfaitement comprise. Dans le cas compact, on a une information supplémentaire que nous allons décrire sur la topologie de la variété ambiante. Dans [Gr2] , Gromov a introduit l'invariant suivant d'une variété différentiable M, appelé *volume minimum de M* et défini par :

$$\mathrm{MinVol}(M) = \inf_{|K(g)|\leqslant 1} \mathrm{Vol}(M, g)$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes sur M dont la courbure sectionnelle $K(g)$ est majorée en valeur absolue par 1. Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien sur une variété compacte M ayant g pour métrique quasi-fibrée. On considère la famille de métriques g_ε obtenue de g en multipliant g par ε^2 uniquement dans le sens de $\mathcal{F}$. Il est clair que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Vol}(M, g_\varepsilon) = 0$$

par ailleurs, il est montré dans [C2] que $|K(g_\varepsilon)|$ reste borné indépendamment de ε, on en déduit immédiatement que $\mathrm{MinVol}(M) = 0$. D'où le

THÉORÈME 1.3. — *Si une variété compacte M supporte un flot riemannien, on a alors* $\mathrm{MinVol}(M) = 0$. *En particulier, l'invariant de Gromov $\|M\|$ et tous les nombres de Pontriaguine de M sont nuls (cf.* [Gr2]*).*

D'après [I-Y], une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle strictement négative a un invariant de Gromov non nul; on a donc le

COROLLAIRE 1.4. — *Si une variété compacte M admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative, il n'existe sur M aucun flot riemannien.*

Considérons de nouveau la famille g_ε et supposons que $\mathcal{F}$ a ses feuilles *denses* dans M. On constate alors que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Diam}(M, g_\varepsilon) = 0$$

les courbures sectionnelles $K(g_\varepsilon)$ étant bornées indépendamment de ε, la variété M est *presque plate* et donc, à un revêtement fini près, *une nilvariété* (cf. [Gr1] ou [B-K]). On est ainsi assuré que dans le théorème 1.1, N est déjà, à revêtement fini près, une nilvariété. Ceci constitue le début de la seconde preuve du théorème 1.1 donnée dans [C2].

Un flot étant un cas particulier de feuilletage à croissance linéaire, il est naturel de se demander si on a un énoncé analogue au théorème 1.1 avec des hypothèses sur des invariants de quasi-isométrie des feuilles tels que la croissance. En fait, on a le

THÉORÈME 1.5 [C3]. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien d'une variété compacte et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie structurale. Alors on a :*

1) $\mathcal{F}$ est Fölner si et seulement si $\mathfrak{g}$ est résoluble.

2) $\mathcal{F}$ est à croissance polynomiale si et seulement si $\mathfrak{g}$ est nilpotente et dans ce cas, le degré de nilpotence de $\mathfrak{g}$ est majoré par le degré de croissance de $\mathcal{F}$.

3) En particulier, si $\mathcal{F}$ est à croissance linéaire, $\mathfrak{g}$ est abélienne.

Comme corollaire on obtient de nouveau le théorème 1.1 ce qui en fournit une troisième preuve, sensiblement différente des précédentes car complètement "transverse".

2. Flots riemanniens et flots isométriques

Pour un flot isométrique $\mathcal{F}$, le théorème 1.1 est bien connu. En effet, dire que $\mathcal{F}$ est isométrique revient à dire qu'il existe sur M une métrique riemannienne g et un groupe à un paramètre $H = \{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ d'isométries de (M,g) dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$. La variété M étant supposée compacte, le groupe d'isométries G de (M,g) est *un groupe de Lie compact.* L'adhérence $\overline{H}$ de H dans G est un tore et on a pour tout x de M : $\overline{H}.x \subset \overline{H.x}$ l'adhérence de l'orbite de x par H. D'autre part, $\overline{H}.x = \overline{H}/\overline{H}_x$ où $\overline{H}_x$ est le stabilisateur de x, d'où on déduit que $\overline{H}.x$ est un tore T^k. Ce tore contient $H.x$ et est contenu dans $\overline{H.x}$, on a donc $\overline{H.x} = \mathsf{T}^k$ et par conséquent le point 2) du théorème 1.1. Le feuilletage $\mathcal{F}$ dans T^k est donné par les orbites de l'action d'un sous-groupe à un paramètre de T^k , d'où le point 3) du théorème. Pour obtenir le point 1), il suffit de remarquer que $\hat{\mathcal{F}}$ est à son tour *isométrique*. En effet, $\hat{M}$ s'identifie à la variété des repères orthogonaux à $\mathcal{F}$. La différentielle $D\varphi_t$ préserve les repères orthogonaux à $\mathcal{F}$ et induit donc un flot ψ_t sur $\hat{M}$, évidemment isométrique pour la métrique naturelle $\hat{g}$ induite par g sur $\hat{M}$. Les orbites de ψ_t sont les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ et donc $\hat{\mathcal{F}}$ est bien isométrique. Par conséquent, dans l'adhérence d'une de ses feuilles, $\hat{\mathcal{F}}$ est conjugué à un flot linéaire sur un tore qui est un $\mathfrak{g}$-flot de Lie où $\mathfrak{g}$ est abélienne.

Le théorème 1.1 se démontrerait donc facilement à l'aide d'arguments classiques de géométrie riemannienne si les flots riemanniens étaient tous isométriques. Malheureusement, il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 2.1 [C1]. — Soit A une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ avec $\mathrm{Tr}(A) > 2$. L'automorphisme A a deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2,

$$O < \lambda_1 < 1 < \lambda_2, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Soit V_1 et V_2 des vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et λ_2. Dans $\mathsf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, les directions V_1 et V_2 déterminent des flots linéaires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ à feuilles denses et A induit un difféomorphisme préservant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui est l'exemple standard de difféomorphisme d'Anosov de T^2.

On désigne par T^3_A le fibré en tores T^2 sur le cercle dont la monodromie est donnée par A :

$$\mathsf{T}^3_A = \mathsf{T}^2 \times \mathbb{R}/(x,t) \sim (Ax, t+1)$$

Sur $\mathsf{T}^2 \times \mathbb{R}$, on a deux feuilletages $\mathcal{F}_1'$ et $\mathcal{F}_2'$, ceux qui en restriction au premier facteur coïncident avec $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Ces feuilletages passent au quotient pour donner des feuilletages $\overline{\mathcal{F}}_1$ et $\overline{\mathcal{F}}_2$ sur T^3_A, ceci du fait que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont préservés par A.

PROPOSITION 2.2 . — *Les flots $\overline{\mathcal{F}}_1$ et $\overline{\mathcal{F}}_2$ sont riemanniens et ne sont pas isométriques.*

Preuve. — Considérons par exemple $\overline{\mathcal{F}}_1$ (même raisonnement pour $\overline{\mathcal{F}}_2$). Appelons $p : T^3_A \longrightarrow S^1$ la fibration sur le cercle dont les fibres sont les adhérences des feuilles de $\overline{\mathcal{F}}_1$ et I_1 et I_2 deux intervalles ouverts recouvrant S^1. Au-dessus de ces intervalles, la fibration p est triviale et de manière évidente $\overline{\mathcal{F}}_{1|p^{-1}(I_i)}$ $(i = 1, 2)$ est un flot isométrique et donc admet une métrique quasi-fibrée, disons g_i $(i = 1, 2)$. Considérons maintenant une partition de l'unité u_1, u_2 subordonnée au recouvrement $\{I_1, I_2\}$ de S^1. Les fonctions $v_1 = u_1 \circ p$ et $v_2 = u_2 \circ p$ constituent une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{p^{-1}(I_1), p^{-1}(I_2)\}$ de $\mathbf{T}^3_A$. Les fonctions v_1 et v_2 sont *basiques* (*i.e.* constantes sur les feuilles de $\overline{\mathcal{F}}_1$) puisque constantes sur les fibres de p qui sont saturées par $\overline{\mathcal{F}}_1$. En posant $g = v_1 g_1 + v_2 g_2$ on obtient une métrique riemannienne quasi-fibrée pour $\overline{\mathcal{F}}_1$; il suffit pour le voir de remarquer qu'une métrique quasi-fibrée le reste lorsqu'on la multiplie par une fonction basique strictement positive. Donc $\overline{\mathcal{F}}_1$ est *riemannien.* Nous disons qu'il n'est pas isométrique. En effet, dans le cas contraire et en reprenant les notations du début de cette section, la fibration p serait obtenue par l'action du tore $\overline{H}$, autrement dit, serait un fibré principal en tores $\mathbf{T}^2$. Alors, il existerait une fibration en cercles tangente aux fibres de p et donc A devrait préserver une fibration en cercles de $\mathbf{T}^2$. En particulier, A laisserait invariante la classe d'homologie (non triviale) de la fibre de cette fibration, c'est-à-dire un vecteur non nul à coordonnées entières de $\mathbf{R}^2$. Ce qui est contradictoire avec le fait que les valeurs propres de A sont différentes de 1.□

On peut à ce stade se demander ce qui fait précisément la différence entre flots riemanniens et flots isométriques. Une première remarque est la suivante : un flot d'isométries φ_t préserve le champ des hyperplans orthogonaux à ses orbites. Par conséquent, une condition nécessaire pour qu'un flot riemannien $\mathcal{F}$ soit isométrique est qu'il existe un groupe à un paramètre φ_t dont les orbites soient les feuilles de $\mathcal{F}$ et qui préserve un champ d'hyperplans tranverses à $\mathcal{F}$. Cette condition revient à dire que $\mathcal{F}$ est *géodésible*, c'est-à-dire qu'il existe sur la variété ambiante une métrique riemannienne pour laquelle les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des géodésiques (*cf.* [S]). Il est facile de voir que cette condition est en fait suffisante (cf. [C1]) :

PROPOSITION 2.3. — *Un flot riemannien est isométrique si et seulement si il est géodésible.*

Il existe un critère homologique de géodésibilité dû à D.Sullivan : un flot $\mathcal{F}$ est géodésible si et seulement si *le courant associé à n'importe quelle mesure transverse invariante n'est pas limite de bords de courants associés à des 2-chaînes tangentes à* $\mathcal{F}$ (*cf.* [S]). Lorsque $\mathcal{F}$ est riemannien, au lieu de lire la géodésibilité sur l'homologie des courants feuilletés, on peut la lire sur la cohomologie des formes basiques. C'est ce que dit le théorème suivant qui contient un autre critère de géodésibilité portant sur le faisceau transverse central de $\mathcal{F}$:

THÉORÈME 2.4 [M-S]. — *Pour un flot riemannien $\mathcal{F}$ sur une variété compacte orientée M de dimension n, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{F}$ est géodésible (i.e. isométrique).

ii) L'espace de cohomologie basique en degré maximum $H_b^{n-1}(M,\mathcal{F})$ n'est pas réduit à zéro.

iii) Le faisceau transverse central $C(M,\mathcal{F})$ admet une trivialisation globale.

En particulier, si $\pi_1(M) = O$ d'après la proposition V.5, la condition iii) est réalisée. On retrouve ainsi l'un des résultats de [Gh2] :

COROLLAIRE 2.5. — *Sur une variété compacte simplement connexe tout flot riemannien est isométrique.*

Le critère de Schwartzman d'existence d'une section pour un flot est énoncé de la façon suivante dans [S] : un flot admet une section si et seulement si *le courant associé à n'importe quelle mesure transverse invariante n'est pas un bord.* Pour les flots riemanniens, ce critère se traduit de nouveau en termes de cohomologie basique :

THÉORÈME 2.6 [M-S]. — *Un flot riemannien $\mathcal{F}$ sur une variété compacte a une section (i.e. est la suspension d'une isométrie) si et seulement si l'application naturelle $H_b^{n-1}(M,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n-1}(M)$ est non nulle.*

3. Flots de Lie

Comme nous l'avons dit à la section 1, la démonstration du théorème 1.1 se réduit essentiellement au cas où $\mathcal{F}$ est un $\mathfrak{g}$-flot de Lie à feuilles denses sur une variété compacte. La donnée d'un $\mathfrak{g}$- flot de Lie sur une variété compacte M est, d'après la fin du Chapitre VI, la même chose que la donnée :

1) D'une fibration $D : \widetilde{M} \longrightarrow G$ où $\widetilde{M}$ est le revêtement universel de M et G le groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. Les fibres de D sont de dimension 1.

2) D'une représentation $h : \pi_1(M) \longrightarrow G$ par rapport à laquelle D est équivariante :

$$\forall \gamma \in \pi_1(M), \forall x \in \widetilde{M} \ : \ D(\gamma.x) = h(\gamma).D(x)$$

Avec cette dernière condition, le feuilletage défini par les fibres de D passe au quotient M de $\widetilde{M}$ sous l'action de $\pi_1(M)$ et donne donc un G-flot de Lie $\mathcal{F}$ sur M. L'application D est *l'application développante* ou *développement* de $\mathcal{F}$, h est *la représentation d'holonomie* et $\Gamma = h(\pi_1(M))$ *le groupe d'holonomie* de $\mathcal{F}$.

Les flots de Lie *de type homogène* forment une classe d'exemples particulièrement simple :

EXEMPLE 3.1. — Soit G_1 un groupe de Lie et Γ_1 un sous- groupe discret et cocompact de G_1. Soit K un sous-groupe à un paramètre normal dans G_1. Alors, la fibration $D : G_1 \longrightarrow G = G_1/K$ est équivariante par rapport à la représentation $h = D_{|\Gamma_1} : \Gamma_1 \longrightarrow G$. On obtient ainsi un G-flot de Lie sur la variété compacte $M = \Gamma_1 \backslash G_1$.

L'exemple 2.1 est de ce type (*cf.* [C1]). Les flots de Lie connus sans orbite fermée sur les variétés compactes sont tous obtenus ainsi ou par suspension. On peut penser qu'il n'y en a pas d'autres. Ceci est vérifié dans des cas particuliers. Par exemple, si la dimension de la variété ambiante est 3 (*cf.* [C1]) ou si le groupe de Lie transverse est nilpotent (*cf.* appendice E). Avant d'espérer obtenir une classification topologique complète des flots de Lie, il est nécessaire tout d'abord de classifier les groupes d'holonomie possibles ou tout au moins de détecter leurs propriétés caractéristiques. Le théorème suivant répond partiellement à cette question :

THÉORÈME 3.2. — *Soit $\mathcal{F}$ un G-flot de Lie sur une variété compacte et Γ son groupe d'holonomie, H l'adhérence de Γ dans G. On a alors :*

1) H est cocompact.

2) La composante connexe de l'élément neutre H_0 de H est abélienne.

3) Si $H_0 = \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$ $(p + q \geqslant 1)$ où $\mathbb{T}^p$ est le tore de dimension p, le groupe $\Gamma_0 = \Gamma \cap H_0$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{q+1}$ et dense dans H_0.

Ce sont évidemment les propriétés 2) et 3) qui sont non triviales. Une première démonstration en a été donnée dans [C-C] en améliorant une méthode dûe à Thurston [Th] consistant à construire une relation de bon ordre sur les "petits éléments" du groupe d'holonomie. On peut la trouver développée dans [E]. Bien entendu, on obtient le théorème 1.1 à partir de ce résultat. Remarquons aussi que d'après le théorème 1.5, on pourrait seulement supposer que $\mathcal{F}$ est à croissance linéaire (*cf.* [C3]).

A la suite d'une question posée par D. Epstein, C. Moore a donné dans [Moo] des éléments de classification des paires (G, H) où G est un groupe de Lie semi-simple et H un sous-groupe fermé vérifiant 1) et 2) :

THÉORÈME 3.3 [MOO]. — *Soit G un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, H un sous-groupe fermé cocompact dont la composante de l'identité H_0 est abélienne et de dimension strictement positive (H n'est pas discret). Alors :*

1) Il existe un unique sous-groupe parabolique P contenant H et dont le radical unipotent est égal à H_0.

2) Si de plus H est moyennable, alors P est minimal et G est localement isomorphe à un produit de groupes $SO(n, 1)$ (i.e. le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique de dimension n).

Nous remarquons ici que dans la situation "géométrique" où H est l'adhérence du groupe d'holonomie d'un flot de Lie (ou d'un feuilletage de Lie à croissance linéaire) sur une variété compacte, alors nécessairement 2) est vérifié si G est simple :

PROPOSITION 3.4. — *On garde les hypothèses et les notations du théorème 3.2 et on appelle $C_\Gamma(\Gamma_0)$ le centralisateur de Γ_0 dans Γ. Alors :*

a) Le groupe $\Gamma/C_\Gamma(\Gamma_0)$ est abélien.

b) Si G est simple non compact, H est résoluble (donc moyennable).

Preuve. — Démontrons d'abord b) à partir de a). On peut appliquer 3.3 : H_0 est le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique P. Comme Γ_0 est dense dans H_0, $C_P(\Gamma_0) = C_P(H_0)$; du fait que G est simple, on peut montrer que $C_P(H_0)/H_0$ est abélien (la démonstration est évidente pour $SL_n(\mathbf{R})$ et s'adapte facilement au cas général). Donc $C_\Gamma(\Gamma_0)/\Gamma_0$ est abélien. Par conséquent, si on suppose a) : $\Gamma/C_\Gamma(\Gamma_0)$, $C_\Gamma(\Gamma_0)/\Gamma_0$ et Γ_0 sont abéliens, d'où la résolubilité de Γ et celle de son adhérence H.

Pour démontrer a), il suffit de considérer l'action de Γ sur Γ_0 par conjugaison. Le noyau de cette action étant $C_\Gamma(\Gamma_0)$, on est ramené à étudier l'action effective de $\Gamma_1 = \Gamma/C_\Gamma(\Gamma_0)$. Pour montrer le résultat et quitte à passer au revêtement universel de H_0, il suffit de prouver le

LEMME 3.5. — *Soit Γ_1 un groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^s$ ($s \geqslant 1$) conservant un sous-groupe Γ_0 de $\mathbf{R}^s$ isomorphe à $\mathbf{Z}^{s+1}$ et dense dans $\mathbf{R}^s$. Alors Γ_1 est abélien.*

Preuve. — Soit dans $\mathbf{R}^{s+1}$ le réseau $\mathbf{Z}^{s+1}$ des points à coordonnées entières et p une projection linéaire de $\mathbf{R}^{s+1}$ sur $\mathbf{R}^s$, envoyant $\mathbf{Z}^{s+1}$ isomorphiquement sur Γ_0. Pour tout $\gamma \in \Gamma_1$ il existe un unique $\overline{\gamma} \in SL_{s+1}(\mathbf{Z})$ tel que $\gamma \circ p = p \circ \overline{\gamma}$. On réalise ainsi Γ_1 comme un sous-groupe de $SL_{s+1}(\mathbf{Z})$ ayant la propriété de conserver la direction de projection V. Le fait que Γ_0 soit dense dans $\mathbf{R}^s$ équivaut à ce que cette direction soit totalement irrationnelle. On est ramené au

LEMME 3.6 [GH1]. — *Un sous-groupe Γ_1 de $SL_{s+1}(\mathbf{Z})$ préservant une direction totalement irrationnelle V est abélien libre (de rang $\leqslant s$).*

Preuve. — A chaque élément $\gamma \in \Gamma_1$ on fait correspondre sa valeur propre λ_γ dans la direction V. On obtient ainsi un morphisme de Γ_1 dans $\mathbf{R}^*$. Il est injectif; en effet, dire que $\lambda_\gamma = 1$ pour $\gamma \in \Gamma_1$ revient à dire que $V \in \mathrm{Ker}(\gamma - id)$. Mais l'espace $\mathrm{Ker}(\gamma - id)$ est rationnel, s'il contient une direction totalement irrationnelle, c'est tout $\mathbf{R}^{s+1}$ et donc $\gamma = id$. Pour la majoration du rang voir [Gh1].□

De 3.2, 3.3 et 3.4 et en adaptant [E] on déduit le

THÉORÈME 3.7. — *Soit $\mathcal{F}$ un G-flot de Lie sans orbite fermée sur une variété compacte. Si G est simple non compact alors G est localement isomorphe à $SO(2,1)$ ou $SO(3,1)$.*

En fait,il semble que l'on ait encore mieux : à conjugaison topologique près le feuilletage $\mathcal{F}$ devrait être essentiellement le feuilletage relevé dans la variété des repères transverses d'un modèle intervenant dans la classification de [E]. Il est facile de voir en utilisant comme dans [E] le théorème de D. Fried [F] que lorsque G est *compact*, $\mathcal{F}$ admet une section et donc est obtenu par suspension d'une translation de G. Lorsque les orbites de $\mathcal{F}$ sont fermées, elles constituent une fibration en cercles sur $\Gamma\backslash G$ (Γ est alors discret). On aurait ainsi une classification topologique des G-flots de Lie sur les variétés compactes dans le cas où G est *simple*. Resterait à voir comment le cas G *semi-simple* pourrait s'y réduire.

4. Classifications

La classification de [E] à laquelle nous avons fait allusion porte sur les flots riemanniens admettant une (G,T)-structure riemannienne transverse (*cf.* [C1]) où T est l'espace hyperbolique et G le groupe d'isométries hyperboliques. De tels flots sont appelés *transversalement hyperboliques.*

THÉORÈME 4.1 [E]. — *Soit $\mathcal{F}$ un flot transversalement hyperbolique sur une variété compacte M. Alors on a deux possibilités :*

1) Toutes les orbites de $\mathcal{F}$ sont fermées et constituent une fibration de Seifert.

2) Les orbites de $\mathcal{F}$ sont toutes ouvertes. Alors $\dim(M) = 3$ *ou 4, $\mathcal{F}$ est conjugué à un feuilletage de l'exemple 2.1 ou à un analogue dans lequel $\mathbb{T}^2$ est remplacé par $\mathbb{T}^3$ et la matrice A est maintenant dans $SL_3(\mathbb{Z})$; ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont réelles et $|\lambda_1| \neq |\lambda_2| = |\lambda_3|$. Le flot est donné par la direction propre associée à λ_1.*

Le côté étonnant de cette classification est que dans le second cas, la codimension soit majorée par 3. Ceci provient du lemme suivant démontré dans [E] :si un entier algébrique λ a tous ses conjugués de même module différent de $|\lambda|$, alors le degré de λ est au plus 3.

On peut s'intéresser aussi aux flots *transversalement euclidiens*, c'est-à-dire admettant une (G,T)-structure riemannienne transverse où T est l'espace euclidien et G le groupe d'isométries euclidiennes. On a le

THÉORÈME 4.2. — *Soit $\mathcal{F}$ un flot transversalement euclidien sur une variété compacte M. Alors on a deux possibilités :*

1) Toutes les orbites de $\mathcal{F}$ sont fermées et constituent une fibration de Seifert.

2) La variété M est difféomorphe à $\mathbb{T}^k \times P$ où $\mathbb{T}^k$ est le tore de dimension $k > 1$ et P une variété plate. Le flot $\mathcal{F}$ est conjugué au flot qui en restriction au premier facteur est un flot linéaire fixe.

Esquisse de preuve. — Soit Γ le groupe d'isométries de l'espace euclidien qui est le groupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ et $H = \overline{\Gamma}$. On sait par 1.1 ou 3.2 que la composante connexe de l'identité H_0 est abélienne. Si $\dim(H_0) = 0$, on est dans le premier cas. Sinon, par des méthodes analogues à celles utilisées dans [E], on peut prouver que H_0 est en fait un groupe de translations. L'action de Γ sur H_0 par conjuguaison est linéaire et *isométrique*. On est alors ramené à la situation des lemmes 3.5 et 3.6 dont on reprend les notations et où l'on a en plus que Γ_1 est un *groupe d'isométries*. Maintenant γ est une isométrie et par conséquent a toutes ses valeurs propres de module 1. Celles du relevé $\overline{\gamma}$ sont celles de γ avec en plus la valeur propre $\lambda_{\overline{\gamma}}$ associée à la direction de projection V. Comme $\overline{\gamma} \in SL_{s+1}(\mathbb{Z})$, on en déduit que $\lambda_{\overline{\gamma}} = \pm 1$ et donc $\lambda_{\overline{\gamma}} = 1$ car tout est supposé orienté. Par 3.6, $\overline{\gamma} = id$, ce qui signifie que Γ_1 est trivial. Il s'ensuit que Γ centralise Γ_0, d'où il vient que Γ se présente comme le produit de Γ_0 par un groupe *discret* d'isométries. On obtient alors sans difficulté la conclusion 2).□

Reste le cas des flots *transversalement elliptiques*, c'est-à-dire celui où T est la sphère et G son groupe d'isométries. En application de [F], on obtient sans difficulté le

THÉORÈME 4.3. — *Soit $\mathcal{F}$ un flot transversalement elliptique sur une variété compacte. Alors on a deux possibilités :*

1) Toutes les orbites de $\mathcal{F}$ sont fermées et constituent une fibration de Seifert.

2) Le flot $\mathcal{F}$ est obtenu par suspension d'une isométrie d'une variété riemannienne compacte à courbure 1 (autrement dit revêtue par la sphère).

Lorsqu'on n'impose plus de propriété à la coubure de la métrique transverse, on a aussi des théorèmes de classification mais en petite dimension. En dimension 3, on peut résumer la situation par l'énoncé suivant (pour un énoncé détaillé voir [C1]) :

THÉORÈME 4.4. — *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien sur une variété compacte M de dimension 3. Alors on a deux possibilités :*

1) Le flot $\mathcal{F}$ est isométrique, il est connu à conjugaison différentiable près (cf. [C1]*). La variété M est un fibré de Seifert.*

2) Le flot $\mathcal{F}$ est non isométrique, il est alors conjugué à un flot de l'exemple 2.1.

La classification donnée par R. Almeida et P. Molino [A-M] en dimension 4 est plus complexe. Y apparait, en particulier, un grand nombre de modèles non isométriques avec un mélange d'orbites ouvertes et fermées, ce qui était exclus en dimension 3.

5. Autres résultats

Les résultats que nous avons exposés ont tous eu pour but de répondre, sous différentes hypothèses, à la question suivante : étant donné un flot $\mathcal{F}$ sur une variété M, existe-t-il une métrique riemannienne g sur M qui soit quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$, et dans ce cas, que peut-on dire de la structure de $\mathcal{F}$? On peut se poser aussi la question inverse : étant donné une variété riemannienne (M, g), existe-t-il un flot $\mathcal{F}$ ayant g pour métrique quasi-fibrée? Dans [G-G] et [R] un tel flot $\mathcal{F}$ est dit *métrique* sur la variété (M, g). Notons que pour avoir une réponse positive à cette question, il faut que la topologie de M autorise déjà l'existence d'un flot riemannien (voir les obstructions 1.3 et 1.4). Un exemple typique de résultat concernant ce problème a été donné récemment par A. Ranjan. La méthode pour l'obtenir consiste à établir d'abord des équations structurales du type de celle de O'Neill [O] et à en déduire une formule intégrale. Dans ce qui suit $\mathcal{F}$ désigne un flot métrique sur une variété riemannienne (M, g) et V un champ de vecteurs unitaire et tangent à $\mathcal{F}$.

THÉORÈME 5.1 [R]. — *Si M est compacte alors :*

1) $\int_M \langle \mathrm{Ric}(V), V\rangle \, dv_g \geqslant 0$.

2) Il y a égalité si et seulement si le champ d'hyperplans orthogonal à $\mathcal{F}$ est intégrable (dans ce cas le feuilletage $\mathcal{F}^{\perp}$ orthogonal à $\mathcal{F}$ est totalement géodésique).

Comme conséquence évidente, si $\mathrm{Ric}(M, g) < 0$, il n'existe pas de flot métrique sur (M, g) (comparer avec 1.4). Si $\mathrm{Ric}(M, g) \leqslant 0$ alors l'une des conditions équivalente de 2) est réalisée. Le corollaire suivant est obtenu à l'aide d'un résultat de S. Tanno [Ta] :

COROLLAIRE 5.2 [R]. — *Si la courbure sectionnelle $K(M, g)$ est négative ou nulle, alors M est localement le produit riemannien de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}^{\perp}$. En d'autres termes, V est un champ de Killing (donc $\mathcal{F}$ est isométrique).*

Signalons qu'il y a des résultats analogues dans [G-G] pour le cas où (M, g) est à courbure sectionnelle constante.

Bibliographie

[A-M] R. ALMEIDA, P. MOLINO. — *Flots riemanniens sur les 4-variétés compactes*, Tôhoku Math. J., **38** (1986), 313-326.

[B-K] P. BUSER, H. KARCHER. — *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque 81, 1981.

[C-C] P. CARON, Y. CARRIÈRE. — *Flots transversalement de Lie* $\mathbb{R}^n$, *flots de Lie minimaux*, C. R. Acad. Sci., **280** (1980), 477-478.

[C1] Y. CARRIÈRE. — *Flots riemanniens*, Astérisque, **116** (1984), 31-52.

[C2] Y. CARRIÈRE. — *Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates*, Math. Z., **186** (1984), 393-400.

[C3] Y. CARRIÈRE. — Feuilletages riemanniens à croissance polynomiale, à paraître in Comment. Math. Helv.,1987.

[E] D.B.A. EPSTEIN. — *Transversaly hyperbolic 1-dimensional foliations*, Astérisque, **116** (1984), 53-69.

[F] D. FRIED. — *The geometry of cross section to flows*, Topology, **21** (1982), 353-371.

[G-G] D. GROMOLL, K. GROVE. — *One-dimensional metric foliations in constant curvature spaces* , in Differential Geometry and Complex Analysis, H.E. Rauch memorial volume, edited by I. Chavel and H.M. Farkas,pp.165-168, 1985.

[Gh1] E. GHYS. — *Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un*, Comment. Math. Helv., **58** (1983), 543-572.

[Gh2] E. GHYS. — *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Ann. Inst. Fourier. Grenoble, **34**, 4 (1984), 203-223.

[Gr1] M. GROMOV. — *Almost flat manifolds*, J.Differential Geom., **13** (1980), 231-242.

[Gr2] M. GROMOV. — *Volume and bounded cohomology*, Inst.Hautes Études Sci. Publ. Math., **56** (1982), 213-307.

[I-Y] H. INOUE, K. YANO. — *The Gromov invariant of negatively curved manifolds*, Topology, **21** (1981), 83-89.

[Mo1] P. MOLINO. — *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A, **82** (1982), 45-76.

[Mo2] P. MOLINO. — Feuilletages de Lie à feuilles denses, Séminaire de Géométrie Différentielle, Montpellier,1982-83.

[Moo] C.C. MOORE. — *Cocompact subgroups of semi-simple Lie groups*, J. Reine Angew. Math., **350** (1984), 173-177.

[M-S] P. MOLINO, V. SERGIESCU. — *Deux remarques sur les flots riemanniens*, Manuscripta Math., **51** (1985), 145-161.

[O] B. O'NEILL. — *The fundamental equation of a submersion*, Michigan Math. J., **13** (1966), 459-469.

[R] A. RANJAN. — *Structural equations and an integral formula for foliated manifolds*, Geom. Dedicata, **20** (1986), 85-91.

[S] D. SULLIVAN. — *Cycle for dynamical study of foliated manifolds*, Invent. Math., **36** (1976), 225-255.

[Ta] S. TANNO. — *A theorem on totally geodesic foliations and its applications*, Tensor, **24** (1972), 116-122.

[Th] W. THURSTON. — The geometry and topology of 3-manifolds, chapitre IV, Princeton University,1978.