Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES COURTOIS

Spectre d’une variété privée d’un ε-tube (Conditions de Dirichlet)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 25-33
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (25–33)

SPECTRE D'UNE VARIÉTÉ PRIVÉE D'UN ε-TUBE
(Conditions de Dirichlet)

par *Gilles COURTOIS*

I. - On considère une variété riemannienne (M^m, g) et N^n une sous-variété de M^m, ces deux variétés étant compactes et sans bord.

On note $T_\varepsilon N^n = \{x \in M^m \mid d(x, N^n) < \varepsilon\}$ et $M_\varepsilon = M^m \setminus T_\varepsilon N^n$. Le spectre du laplacien Δ de (M^m, g) est noté $\{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$ et celui du laplacien Δ_ε de (M_ε, g) (dont le domaine est défini par la condition de Dirichlet sur ∂M_ε) est noté $\{\lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \leq \lambda_3(\varepsilon) \ldots\}$. Les noyaux des opérateurs $e^{-t\Delta}$ et $e^{-t\Delta_\varepsilon}$ sont notés $k(t,x,y)$ et $k_\varepsilon(t,x,y)$. On note $p = m-n = \dim M^m - \dim N^n$ la codimension de N^n.

THEOREME 1. [C-F], [R-T]
Si $p \geq 2$, $\lambda_i(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \lambda_i$ en particulier, $\lambda_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Remarque. L'hypothese $p \geq 2$ est nécessaire comme on le voit sur l'exemple :

$M = S^1$, $N = \{X_0\}$, M_ε est un segment de longueur $(2\pi - 2\varepsilon)$,
$X_1(\varepsilon) = [\pi/(2\pi - 2\varepsilon)]^2$ et $\lambda_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Le théorème 1 est un corollaire du

THEOREME 2. [R-T], [C-F]
Si $p \geq 2$, $k_\varepsilon(t,x,y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} k(t,x,y)$ et la convergence est uniforme pour (t,x,y) dans tout compact de $[0, \infty[\times (M^m \setminus N^n)^2$.

Dans la suite, on s'intéresse à la convergence de $\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_i$.

THEOREME 3. [OZ]
Si $\dim M^m = 2$ ou 3, $N^n = \{X_0\}$ et si λ_i est simple on a $\lambda_i(\epsilon) - \lambda_i = \varphi(\epsilon)\, f_i^2(X_0) + o(\varphi(\epsilon))$ où f_i est une base orthonormée de l'espace propre associé à λ_i, et où

$$\varphi(\epsilon) = \begin{cases} 2\pi\,|\mathrm{Log}\,\epsilon|^{-1} & \text{si } m = 2 \\ 4\pi\,\epsilon & \text{si } m = 3\,. \end{cases}$$

Remarque. En particulier, sous les hypothèses du théorème 3 on a $\lambda_1(\epsilon) = \dfrac{\varphi(\epsilon)}{\mathrm{vol}\, M^m} + o(\varphi(\epsilon))$.

THEOREME 4. [BE]
Si $\dim M^m = 2$, λ_i simple, on a

$$\lambda_i(\epsilon) - \lambda_i = \sum_{n\geq 1} a_n\,|\mathrm{Log}\,\epsilon|^{-n}$$

où le rayon de convergence de la série est non nul.

Remarque. Dans [BE], l'auteur obtient des résultats analogues en dimension 3 et 4.

THEOREME 5. [B-G]
Pour toute variété M^m, si $N^n = \{X_0\}$, il existe une fonction explicite $\alpha(\epsilon)$ tendant vers 0 avec ϵ telle que

$$\left|\lambda_1(\epsilon) - \frac{\varphi_m(\epsilon)}{\mathrm{vol}\, M^m}\right| \leq \varphi_m(\epsilon)\cdot\alpha(\epsilon)$$

où $\varphi_m(\epsilon) = \begin{cases} (m-2)\,\mathrm{vol}\, S^{m-1}\,\epsilon^{m-2} & \text{si } m \geq 3 \\ 2\pi\,|\mathrm{Log}\,\epsilon|^{-1} & \text{si } m = 2\,. \end{cases}$

En fait, par une méthode différente, on peut généraliser la théorème 5 :

THEOREME 6. Pour toute variété M^m et toute sous variété N^n de M^m de codimension $p \geq 2$, il existe une fonction explicite $\alpha(\epsilon)$ tendant vers 0 avec ϵ telle que :

$$\left|\lambda_1(\epsilon) - \frac{\mathrm{vol}\, N^n}{\mathrm{vol}\, M^m}\cdot\varphi_p(\epsilon)\right| \le \varphi_p(\epsilon)\cdot\alpha(\epsilon) \quad .$$

Remarque. Les théorèmes 3 et 4 donnent des équivalents asymptotiques de $\lambda_i(\epsilon)-\lambda_i$, en particulier de $\lambda_1(\epsilon)$, et les théorèmes 5 et 6 donnent une majoration de l'écart entre $\lambda_1(\epsilon)$ et son équivalent asymptotique. Cette majoration $\varphi_p(\epsilon)\cdot\alpha(\epsilon)$ dépend de bornes sur la géométrie de M^m et du plongement $N^n \hookrightarrow M^m$. Précisément, si on note σ la courbure sectionnelle de M^m, S_ξ la deuxième forme fondamentale associée au vecteur ξ du fibré normal unitaire UN^n de N^n, $\mathrm{inj}(N^n \hookrightarrow M^m)$ le rayon d'injectivité de l'application exponentielle associée à UN^n, on suppose que

(1) $\quad |\sigma| \le K$

(2) $\quad \|S_\xi\| \le \eta$

(3) $\quad \mathrm{inj}(N^n \hookrightarrow M^m) \ge \alpha > 0$

(4) $\quad \sup\limits_{x\in M^m} d(x, N^m) \le D$

et la fonction $\alpha(\epsilon)$ du théorème 6 vérifie en fait :

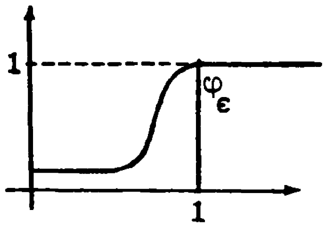
$$\alpha(\epsilon) = \begin{cases} 2n\eta\dfrac{(p-2)}{(p-3)}\epsilon + o_{K,\eta,D,\alpha}(\epsilon) & \text{si } p \ge 4 \\ 2n\eta\,\epsilon|\mathrm{Log}\,\epsilon| + o_{K,\eta,D,\alpha}(\epsilon|\mathrm{Log}\,\epsilon|) & \text{si } p = 3 \\ o_{K,\eta,D,\alpha}(|\mathrm{Log}\,\epsilon|^{-1}) & \text{si } p = 2\ . \end{cases}$$

Les hypothèses (1) - (4) qui interviennent dans la majoration de l'écart entre $\lambda_1(\epsilon)$ et son équivalent asymptotique sont nécessaires comme le montrent les exemples suivants :

1) Nécessité de l'hypothèse sur σ.

On considère $N^n = \{X_0\}$ dans (M^m, g) et on suppose que $\mathrm{inj}(N^n \hookrightarrow M^m) = 2$. On note ρ la fonction distance à X_0 et on considère une fonction $\varphi_\varepsilon : [0,\infty[\to [0,\infty[$, C^∞, telle que $\varphi_\varepsilon \ge 0$, $\varphi'_\varepsilon \ge 0$,

$$\varphi_\varepsilon(t) = 1 \text{ si } t \ge 1 \quad , \quad \text{et } \int_0^1 \varphi'_\varepsilon(t)dt = \epsilon\ .$$



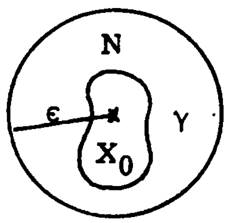
Les métriques $g_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon \circ \rho)\cdot y$ coïncident avec g sur $M^m \backslash B_g(X_0, 1)$ et $B_{g_\varepsilon}(X_0, \varepsilon) = B_g(X_0, 1)$. En particulier,

$$\lambda_1(M^m \backslash B_{g_\varepsilon}(X_0, \varepsilon)) = \lambda_1(M^m \backslash B_g(X_0, 1)) \underset{\varepsilon \to 0}{\not\longrightarrow} 0 .$$

Dans la boule $B_{g_\varepsilon}(X_0, \varepsilon)$, la courbure sectionnelle σ_ε de g_ε n'est pas bornée, les autres invariants restant bornés.

2) <u>Nécessité de l'hypothèse sur</u> $\|S_\xi\|$.

On considère une variété M^3 et $N^1_\varepsilon = \gamma$ une courbe fermée dont tous les points sont à distance inférieure à ε d'un point fixé x_0 .



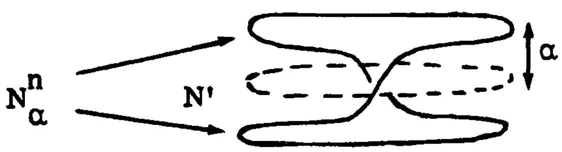
On a alors $T_\varepsilon N_\varepsilon \subset B(X_0, 2\varepsilon)$ et par le principe du minimax

$$\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\varepsilon) \leq \lambda_1(M^m \backslash B(X_0, 2\varepsilon)) .$$

L'estimation du théorème 6 ne peut être uniformément vérifiée pour N_ε puisque $\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\varepsilon) \sim \dfrac{2\pi}{\mathrm{vol}\, M^m} |\mathrm{Log}\, \varepsilon|^{-1}$ et $\lambda_1(M^m \backslash B(X_0, 2\varepsilon)) \sim \dfrac{\mathrm{vol}\, S^2}{\mathrm{vol}\, M}(2\varepsilon)$.

3) <u>Nécessité de l'hypothèse sur le rayon d'injectivité</u> :

Dans une variété M^m on considère :



On a $T_\varepsilon N_\alpha \hookrightarrow T_{\varepsilon+\alpha} N'$, vol $N_\alpha = 2$ vol N' . Par le minimax :

$$\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\alpha) \leq \lambda_1(M^m \backslash T_{\varepsilon+\alpha} N') .$$

L'estimation du théorème 6 ne peut être uniformément vérifiée pour N_α puisque

$$\lambda_1(M^m \backslash T_\varepsilon N_\alpha) \sim \frac{2\,\mathrm{vol}\, N'}{\mathrm{vol}\, M}(p-2)\,\mathrm{vol}\, S^{p-1}\, \varepsilon^{p-2}$$

et

$$\lambda_1(M^m \setminus T_{\epsilon+\alpha} N') \sim \frac{\text{vol } N'}{\text{vol } M} (p-2) \text{vol } S^{p-1} (\epsilon+\alpha)^{p-2} .$$

II. - RESUME DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 6.

Dans ce paragraphe, toutes les variétés considérées sont compactes sans bord :

1) Les fonctions de Green : pour toute sous variété N^n de M^m, compacte sans bord, on définit la fonction de Green de pôle N^n, par

$$G_N(x) = \int_N dy \int_0^\infty [k(t, X, Y) - (1/\text{vol } M^m)] \, dt .$$

La fonction G_N est C^∞ sur $M^m \setminus N^n$ et est caractérisée par les propriétés :

(1) $\Delta G_N = \delta_N - (\text{vol } N^n / \text{vol } M^m)$

(2) $\int_M G_N(X) \, dX = 0$

où δ_N est la masse de Dirac de N^n, i.e. $\delta_N(f) = \int_N f(y) \, dy$.

La démonstration du théorème 6 provient d'une majoration de $\lambda_1(\epsilon)$ par le principe du minimax appliqué à une fonction ad-hoc et d'une minoration de $\lambda_1(\epsilon)$ qui découle du

LEMME. Pour toute variété M^m et toute sous variété N^n de M^m, si on note $G_N^* = G_N - \min_{X \in M^m} G_N(X)$, pour tout $\beta > 0$, on a $\lambda_1(G_N^* \le \beta) \ge \frac{1}{\beta} \frac{\text{vol } N}{\text{vol } M}$ où $\lambda_1(G_N^* \le \beta)$ désigne la première valeur propre du domaine $\{G_N^* \le \beta\}$ avec condition de Dirichlet sur le bord.

Preuve. Soit f la première fonction propre du problème de Dirichlet de $\Omega = \{G_N^* \le \beta\}$. On a d'une part :

$$\int_\Omega [\beta - G_N^*] \Delta f \le \lambda_1(G_N^* \le \beta) \cdot \beta \cdot \int_\Omega f$$

et d'autre part, par la formule de Stokes :

$$\int_\Omega [\beta - G_N^*]\,\Delta f = (\mathrm{vol}\,N/\mathrm{vol}\,M)\int_\Omega f$$

d'où la minoration, puisque $\int_\Omega f > 0$. ■

2) Un cas particulier : dans le cas où M^m est de révolution autour de N^n, (par exemple $M^m = S^m$ et $N^n = \{X_0\}$) , la fonction G_N^* est une fonction (décroissante) de la distance à N^n , i.e. $G_N^*(x) = g(r(x))$ où $r(X) = \mathrm{dist}(X, N^n)$.

• Le principe du minimax appliqué à $\varphi = g(\epsilon) - G_N^*$ donne alors facilement : $\lambda_1(\epsilon) \le \frac{\mathrm{vol}\,N}{\mathrm{vol}\,M}\frac{1}{g(\epsilon)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{g(\epsilon)}$ où $\alpha(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$.

• Le lemme appliqué à $\beta = g(\epsilon)$ donne :

$$\lambda_1(G_N^* \le g(\epsilon)) = \lambda_1(\epsilon) \ge \frac{\mathrm{vol}\,N}{\mathrm{vol}\,M}\frac{1}{g(\epsilon)} .$$

On conclut le théorème 6 dans ce cas particulier en remarquant que $g(\epsilon)^{-1} = \varphi_p(\epsilon) + \delta(\epsilon)\,\varphi_p(\epsilon)$ où $\delta_p(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$.

3) Cas général : dans le cas général, la difficulté vient de ce que G_N^* n'est pas une fonction de la distance à N^m , le lemme ne pouvant pas s'appliquer directement pour la minoration.

Mais on a, pour toute variété M^m et toute variété N^n de codimension $p \ge 2$ vérifiant les hypothèses (1)-(4) que nous rappelons :

(1) $|\sigma| \le K$

(2) $\|S_\xi\| \le \eta$

(3) $\inf(N^n \hookrightarrow M^m) \ge \alpha > 0$

(4) $\sup_{x\in M^m} d(X, N^n) \le D$

le théorème suivant.

On désigne par g_0 la métrique canonique de la sphère S^{p-1}.

THEOREME 7. Il existe deux constantes explicites $\bar{\gamma}(K, D)$ et $\tilde{\gamma}(K, D, \alpha, \eta)$ telles que

$\bar{g} \circ r(X) - \bar{\gamma} \leq G_N(X) \leq \tilde{g} \circ r(X) + \tilde{\gamma}$

où la fonction $\bar{g}(r)$ [resp. $\tilde{g} \circ r$] est la fonction de Green de pôle $\{0\}$ de la boule $\bar{B}(0, D)$
[resp. $\tilde{B}(0, \tilde{\alpha}) = \tilde{B}\left(0, \inf\left(\alpha, (1/\sqrt{K}) \operatorname{Arctg}(\sqrt{K}/\eta)\right)\right)$] de $\mathbb{R}^p$ muni de la métrique s'écrivant en coordonnées polaires autour de 0

$\bar{g} = (dr)^2 + (\mathrm{ch}\, Kr + \eta\, \mathrm{sh}\, Kr)^{(2n)/(p-1)} (K^{-1} \mathrm{sh}\, Kr)^2\, g_0$

[resp. $\tilde{g} = (dr)^2 + (\cos Kr - \eta \sin Kr)^{(2n)/(p-1)} (K^{-1} \sin Kr)^2\, g_0$] ,
la condition au bord de $\bar{B}$ [resp. $\tilde{B}$] étant celle de Neumann.

Le théorème 6 découle alors de :

- la majoration de $\lambda_1(\epsilon)$ par le principe du minimax appliqué à la fonction $\varphi = \bar{g}(\epsilon) - \bar{g} \circ r$ dont le quotient de Rayley vérifie

$$\int |\nabla\varphi|^2 / \int \varphi^2 \leq \frac{\mathrm{vol}\, N}{\mathrm{vol}\, M} \frac{1}{\bar{g}(\epsilon)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{\bar{g}(\epsilon)} \quad ;$$

- du lemme appliqué à $\Omega_\epsilon = \{G_N^* \leq \tilde{g}^*(\epsilon)\}$ où $G_N^* = G_N - \min_{X \in M} G_N(X)$ et $\tilde{g}^* = \tilde{g} + \tilde{\gamma} - \min_{X \in M} G_N(X)$, en remarquant que, puisque $G_N \leq \tilde{g} + \tilde{\gamma}$, on a l'inclusion $\Omega_\epsilon \supset M_\epsilon$, et donc

$$\lambda_1(\epsilon) \geq \lambda_1(\Omega_\epsilon) \geq \frac{\mathrm{vol}\, N}{\mathrm{vol}\, M} \frac{1}{\tilde{g}^*(\epsilon)} .$$

- du fait que $\bar{g}(\epsilon)^{-1} = \varphi_p(\epsilon) + \bar{\delta}(\epsilon)\varphi_p(\epsilon)$

$$\tilde{g}^*(\epsilon)^{-1} = \varphi_p(\epsilon) + \tilde{\delta}(\epsilon)\varphi_p(\epsilon)$$

où $\bar{\delta}(\epsilon)$ et $\tilde{\delta}(\epsilon)$ tendent vers 0 avec ϵ.

Démonstration du théorème 7 :

a) Majoration. On applique le principe du maximum à $G_N - \tilde{g} \circ r$:

on a en effet

$$\Delta G_N = \delta_N - (\mathrm{vol}\ N/\ \mathrm{vol}\ M)$$
$$\Delta(\tilde{g}\circ r) = \tilde{\Delta}(\tilde{g}\circ r) + (\Delta-\tilde{\Delta})(\tilde{g}\circ r) = \delta_N - (1/\tilde{V}) + (\Delta r - \tilde{\Delta} r)\cdot(\tilde{g}'\circ r)$$

où $\tilde{V}$ désigne le volume et $\tilde{\Delta}$ le laplacien de $\tilde{B}(0,\tilde{\alpha})$. On a donc :

$$\Delta(G_N - (\tilde{g}\circ r)) = (1/\tilde{V}) - (\mathrm{vol}\ N/\mathrm{vol}\ M) + (\tilde{\Delta} r - \Delta r)(\tilde{g}'\circ r) \ .$$

Mais d'après le théorème de Heintze-Karcher, cf. [H-K] , la fonction distance à 0 dans $(\tilde{B}(0,\tilde{\alpha}),\tilde{g})$ est <u>moins convexe</u> que la fonction distance à N^n dans M^m , donc $\Delta r - \tilde{\Delta} r \le 0$ et $\Delta(G_N-(\tilde{g}\circ r)) \le (1/\tilde{V}) - (\mathrm{vol}\ N/\mathrm{vol}\ M)$. (Il faut remarquer que lapartie singulière de $\Delta(\tilde{g}\circ r)$ portée par $\partial\tilde{B}(0,\tilde{\alpha})$ est nulle puisque la fonction $\tilde{g}\circ r$ sur M^m est de classe C^1) .

On note $G_{\{X\}}$ le noyau de Green de pôle $\{X\}$ sur M^m et $G = G_{\{X\}} - \min\limits_{Z\in M} G_{\{X\}}(z)$. On a alors d'une part :

$$\int_M G(y)\,\Delta\big(G_N-(\tilde{g}\circ r)\big)(y)dy \le \Big[(1/\tilde{V}) - (\mathrm{vol}\ N/\mathrm{vol}\ M)\Big]\int_M G(y) \ .$$

Et d'autre part :

$$\int_M G(y)\,\Delta\big(G_N-(\tilde{g}\circ r)\big)(y)dy = \big(G_N-(\tilde{g}\circ r)\big)(x) - (1/\mathrm{vol}\ M)\int_M G_N-(\tilde{g}\circ r)\ (y)\,dy \ .$$

On déduit :

$$G_N(x) - \tilde{g}\circ r(x) \le \Big[(1/\tilde{V}) - (\mathrm{vol}\ N/\mathrm{vol}\ M)\Big]\Big[\int_M G(y)\Big] - (1/\mathrm{vol}\ M)\int_M (\tilde{g}\circ r)(y)d$$

et la majoration de G_N s'obtient en majorant $\|G\|_{L^1}$ par un théorème de Bérard-Gallot, cf. [B-G] , et en majorant $\|\tilde{g}\circ r\|_{L^1}$ par le théorème de Bishop, cf. [C-E] .

b) <u>Minoration.</u> De la même façon que précédemment, on obtient :

$$\Delta(G_N-(\bar{g}\circ r)) = (1/\bar{V}) - (\mathrm{vol}\ N/\mathrm{vol}\ M) + (\bar{\Delta} r - \Delta r)(g^{-1}\circ r) + (\Delta_{\mathrm{sing}} r)(g^{-1}\circ r)$$

où $\Delta_{\mathrm{sing}} r$ désigne la partie singulière de Δr , portée par le art-locus de N^n .

D'après le théoréme de Bishop, on a $(\bar{\Delta} r - \Delta r) \le 0$ et <u>on peut</u>

montrer que $\Delta_{sing} r \leq 0$, d'où

$$\Delta\left(G_N-(\bar{g}\circ r)\right) \geq \left[(1/\bar{V}) - (\mathrm{vol}\, N/\mathrm{vol}\, M)\right] .$$

La minoration s'en déduit comme précédemment la majoration.

BIBLIOGRAPHIE

[OZ] Tôhoku Math. J. (1982), vol. 34,pp.7-14.

[B-G] C.R.A.S. 297 (1983), p. 185.

[R-T] J. Funct. Anal. 18, pp. 27-29 (1975).

[BE] G. BESSON, Chirurgie et spectre du Laplacien. Prépublication de l'Institut Fourier, Institut Fourier, Math. Pures, Université de Grenoble.

[C-F] CHAVEL-FELMAN, J. Funct. Anal. 30, pp. 198-222 (1978).

[C-E] Comparison theorems in Riemannian Geometry. North-Holland Publ. Amsterdam, 1975.

[H-K] A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. Paris 11, pp. 451-470 (1978).

- o -