SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

COLETTE ANNÉ

Perturbation du spectre $X \setminus TUB^{\varepsilon}Y$ (Conditions de Neumann)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 17-23

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__17_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (17–23)

PERTURBATION DU SPECTRE $X \setminus TUB^{\varepsilon}Y$
(Conditions de Neumann)

par *Colette ANNÉ*

(X, g) est une variété riemannienne compacte.

Y une sous-variété de X de codimension $d \geq 2$.

NY le fibré normal de Y .

$NY = \{(y, v)/v \in T_yX \cap (T_yY)^{\perp}\}$

$TUB^{\varepsilon}Y = \{\exp_y v/(y, v) \in NY$ et $\|v\| < \varepsilon\}$.

Il existe ε_0 tel que exp : $N^{\varepsilon_0}Y \to TUB^{\varepsilon_0}Y$ soit un difféomorphisme, on définit alors :

$$X_{\varepsilon} = X \setminus TUB^{\varepsilon}Y \text{ variété à bord .}$$

Dans $L_2(X)$ on définit la forme quadratique $q(f) = \int |\nabla f|^2 dv_g$ elle est compacte pour les domaines denses $H_0^1(X_{\varepsilon})$ dans $L_2(X_{\varepsilon})$, $H^1(X_{\varepsilon})$ dans $L_2(X_{\varepsilon})$ et $H^1(X)$ dans $L_2(X)$ (c'est-à-dire que l'opérateur obtenu par l'extension de Friedrich est à résolvante compacte). Donc on peut lui associer un spectre discret, positif ne s'accumulant qu'en $+\infty$.

NOTATIONS :

pour $H_0^1(X_{\varepsilon}) : \nu_1^0(\varepsilon) < \nu_2^0(\varepsilon) \leq \nu_3^0(\varepsilon) \ldots$

pour $H^1(\overline{X}_{\varepsilon}) : \nu_1(\varepsilon) < \nu_2(\varepsilon) \leq \ldots$

pour $H^1(X) \quad : \nu_1 < \nu_2 \leq \ldots .$

Résultat :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_n^0(\varepsilon) = \nu_n.$$

On note :

Δ le laplacien sur X

Δ_ε le laplacien avec conditions de Neumann sur X_ε.

1. $\lim_{\varepsilon \to 0} \nu_n^0(\varepsilon) = \nu_n$.

Ce résultat est déjà connu. Dans le livre de Chavel *"Eigenvalues in Riemannian Geometry"* on en trouve une démonstration par la convergence des noyaux de la chaleur.

Les travaux de Gilles Courtois le donnent aussi avec des estimées du noyau de Green. J'en donne ici une démonstration simple avec le

LEMME 1. — *$C_0^\infty(X \setminus Y)$ est dense dans $H^1(X)$.*

Démonstration. — Soit $\psi(r)$ une fonction de classe C^∞ sur X ne dépendant que de la distance r à Y et vérifiant :

$$\psi(r) = 1 \text{ si } r < \frac{\alpha}{2}$$
$$\psi(r) = 0 \text{ si } r > \alpha.$$

On pose $\psi_k(r) = \psi(kr)$,

$$\sup \psi_k \subset \{y/d(y,Y) < \frac{\alpha}{k}\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (L_2)\psi_k = 0$$

$$\int |\nabla\psi_k|^2 \, dv_g \leq c^{te} k^{2-d} \int |\nabla\psi|^2$$

et on a supposé $d \geq 2$, donc $\psi_{k|k\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans $H^1(X)$. Elle converge donc faiblement vers 0 dans $H^1(X)$. Soit alors

$$\mu \in H^{-1}(X) \text{ , } \sup \mu \subset Y.$$
$$\forall \varphi \in C^\infty(X) \text{ , } \langle \mu, (1-\psi_k)\varphi \rangle = 0$$

donc

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \psi_k \varphi \rangle = \langle \varphi\mu, \psi_k \rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (convergence faible)}$$

donc

$$\mu = 0.$$ ∎

• $\nu_n^0(\varepsilon)$ est une fonction décroissante de ε et $\nu_n \leq \nu_n^0(\varepsilon)$ (d'après le minimax), donc $\nu_n \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \nu_n^0(\varepsilon)$.

• A cause du lemme $\nu_n = \inf_{E\in \mathcal{G}r_n(C_0^\infty(X\setminus Y))} \sup_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{q(f)}{\|f\|^2}$.

$$\forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{G}r_n(C_0^\infty(X \setminus K)) \sup_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{q(f)}{\|f\|^2} \leq \nu_n + \eta$$

$$\exists \varepsilon_0 / \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow E \subset H_0^1(X_\varepsilon)$$

et donc

$$\nu_n^0(\varepsilon) \leq \sup_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{q(f)}{\|f\|^2},$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_n^0(\varepsilon) \leq \nu_n + \eta \ , \ \forall \eta > 0.$$

D'où on conlut.

2. $\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_n(\varepsilon) = \nu_n$

a) Ce résultat a déjà été démontré si Y est un point. Ozawa le fait pour des domaines de $\mathbf{R}^2$ et des valeurs propres simples avec des estimées du noyau de Green. Rauch et Taylor aussi pour des domaines de $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, utilisent le

LEMME 2. — $\exists c > 0$ *tel que si*

$$P_\varepsilon : H^1(\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon) \to H^1(\mathbf{R}^d)$$

est l'opérateur défini par :

$$\begin{cases} P_\varepsilon f_{|\mathbf{R}^m \setminus B_\varepsilon} = f \\ P_\varepsilon f_{|B_\varepsilon} \ \ \textit{solution de} \ \ \begin{cases} \Delta g &= 0 \\ g_{|s_\varepsilon} &= f_{|s_\varepsilon} \end{cases} \end{cases}$$

alors $\|P_\varepsilon\| < C$. *(B_ε est la boule centrée en 0 de rayon ε , S_ε est son bord).*

Démonstration. — On suit

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon) & \xrightarrow{\partial_\varepsilon} & H^1(\mathbf{R}^d \setminus B_1) \\ \downarrow{\scriptstyle P_\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle P_1} \\ H^1(\mathbf{R}^d) & \xleftarrow{\partial_{1/\varepsilon}} & H^1(\mathbf{R}^d) \end{array}$$

$\partial_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$.

* On vérifie que P_1 est continue par le théorème du graphe fermé.

* $\int |\partial_\varepsilon f|^2 = \frac{1}{\varepsilon^{-d}} \int |f|^2$ et $\int |\partial_{1/\varepsilon} g|^2 = \varepsilon^d \int |g|^2$.

* $\int |\nabla \partial_\varepsilon f|^2 = \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \int |\nabla f|^2$ et $\int |\nabla \partial_{1/\varepsilon} g|^2 = \varepsilon^{d-2} \int |g|^2$.

* si $u = P_1 f_{|B_1}$, $\int |\nabla u|^2 \leq C \int_{|x|\leq 2} |\nabla f|^2$ (par l'absurde).

Montrons qu'alors : $\nu_n(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \nu_n$.

• $H_0^1(X_\varepsilon) \subset H^1(X_\varepsilon) \Rightarrow \nu_n(\varepsilon) \leq \nu_n^0(\varepsilon) \Rightarrow \limsup \nu_n(\varepsilon) \leq \nu_n$.

• $\alpha_n = \liminf_{\varepsilon\to 0} \nu_n(\varepsilon) \quad \alpha_n = \lim_{p\to\infty} \nu_n(\varepsilon_p)$.

On peut supposer $\nu_j(\varepsilon_p) \to \alpha_j$ pour $1 \leq j \leq n$, quitte à extraire des sous-suites.

Soit $\varphi_j(\varepsilon)_{|1\leq j\leq n}$ une famille orthonormée de fonctions propres relatives à $\nu_j(\varepsilon)$.

Les suites $P_{\varepsilon_p}(\varphi_j(\varepsilon_p))$ sont bornées dans $H^1(X)$. On peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, qu'elles convergent en norme dans $L_2(X)$ et faiblement dans $H^1(X)$. Soit φ_j $(1 \leq j \leq n)$ les limites. Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} \|P_\varepsilon\varphi - \varphi\| = 0$, $(\varphi_j)_{1\leq j\leq n}$ est orthonormée.

Par ailleurs, $\forall f \in C_0^\infty(X \setminus Y)$

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j / f\rangle &= \lim_{p\to\infty} \langle P_{\varepsilon_p}\varphi_j(\varepsilon_p)/f\rangle_{H^1(X)}\\ &= \lim_{p\to\infty} \langle \varphi_j(\varepsilon_p)/f\rangle_{H^1(X_{\varepsilon_p})}\end{aligned}$$

car pour ε_p petit, $f \in H_0^1(X_{\varepsilon_p})$.

Donc

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j / f\rangle_{H^1(X)} &= \lim_{p\to\infty} (1 + \nu_j(\varepsilon_p))\langle \varphi_j(\varepsilon_p)/f\rangle_{L_2}\\ &= (1+\alpha_j)\langle \varphi/f\rangle_{L_2}\end{aligned}$$

donc

$$\Delta\varphi_j = \alpha_j\varphi_j \quad \text{et (comme} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \ldots \leq \alpha_n)$$

$$\alpha_n \geq \nu_n \ .$$

b) Donc il faut arriver à plonger les fonctions propres de Δ_ε dans $H^1(X)$ en une suite bornée. On définit pour (X, g, Y) la

PROPRIÉTÉ (E). — *X est isométrique au voisinage de $y \in Y$ à un voisinage de $(y, 0)$ de $Y \times \mathbf{R}^d$ muni de la métrique produit.*

LEMME 3. — *Si (X, g, Y) vérifie (E) il existe $C > 0$ (ne dépendant que de la géométrie de X) telle que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon)$, $\exists \psi \in H^1(X)$ tel que :*

(i) $\psi_{|X_\varepsilon} = \varphi$

(ii) $\|\psi\|_1^2 \leq C(\int_{X_\varepsilon} |\varphi|^2 + \int_{X_\varepsilon} |d\varphi|^2 + \int_{X_\varepsilon} |\Delta\varphi|^2)$

(iii) $\|\psi_{|TUB^\varepsilon Y}\| \leq 0(1)\|\varphi\|_{H^1(X_\varepsilon)}$.

On pose $\psi = P_\varepsilon \varphi$.

Avec ce lemme, en suivant la même démonstration que précédemment on montre :

THÉORÈME (E). — *Si (X, g, Y) vérifie (E),*

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_n(\varepsilon) = \nu_n \,.$$

Preuves du lemme. — On localise le problème en prenant une partition de l'unité (χ_i, U_i) pour se ramener à des ouverts isométriques à $(Y \times \mathbf{R}^d\,,\ dv_Y^2 \oplus dx^2)$. D'après [RT], il existe des opérateurs

$$\begin{array}{c} P_\varepsilon : H^1(\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon\,;\ H^1(Y)) = H^1(\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon) \otimes H^1(Y)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle P_\varepsilon \otimes \mathrm{Id}} \\ H^1(\mathbf{R}^d) \otimes H^1(Y) \xrightarrow{\text{inj. can.}} H^1(\mathbf{R}^d \times Y) \end{array}$$

uniformément bornés.

Il reste donc pour prouver le lemme à montrer qu'on peut majorer la norme dans $S_\varepsilon = H^1(\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon\,;\ H^1(Y))$ de $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon)$ par $(\int |\varphi|^2 + \int |d\varphi|^2 + \int |\Delta\varphi|^2)^{1/2}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon) \cap S_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{S_\varepsilon}^2 &= \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon} \|\varphi\|_{H^1(Y)}^2 + \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_\varepsilon} \sum_{i=1}^d \|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\|_{H^1(Y)}^2 \\ &= \iint |\varphi|^2 + \iint |\nabla_Y \varphi|^2 + \iint \sum_{i=1}^d |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2 \\ &\quad + \iint \sum_{i=1}^d |\nabla_Y \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2 \\ &= \iint |\varphi|^2 + \iint |\nabla \varphi|^2 + \sum_{i=1}^d \iint |\nabla_Y \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2 \end{aligned}$$

mais ∇_Y et $\frac{\partial}{\partial x_i}$ commutent donc (si $\Delta_Y = \nabla_Y^* \nabla_Y$) (on utilise le théorème de Fubini)

$$\sum_{i=1}^{d} \iint |\nabla_Y \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|^2 = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_\epsilon} \int \Delta_Y (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$
$$= \int_Y \int_{\mathbf{R}^d \setminus B_\epsilon} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta_Y \varphi) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi$$
$$= \int_Y \left(\int_{\mathbf{R}^d \setminus B_\epsilon} \Delta_Y \varphi . \Delta_{\mathbf{R}^d} \varphi + \int_{S_\epsilon} \Delta_Y \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)$$

grâce au théorème de Stokes si ν est la normale à S_ϵ. Mais $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta_\epsilon) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ (conditon de Neumann). Il reste donc $\iint \Delta_Y \varphi . \Delta_{\mathbf{R}^d} \varphi \leq \frac{1}{2} \iint (\Delta_Y \varphi + \Delta_{\mathbf{R}^d} \varphi)^2$. Donc

$$\|\varphi\|_{S_\epsilon}^2 \leq \|\varphi\|_{H^1(X_\epsilon)}^2 + \frac{1}{2} \iint |\Delta \varphi|^2 .$$

On revient à X en utilisant χ_i

$$\Delta(\chi_i \varphi) = \chi_i \Delta \varphi + \varphi \Delta \chi_i + \langle \nabla \chi_i , \nabla \varphi \rangle$$

donc

$$\iint |\Delta(\chi_i \varphi)^2 \leq C(\chi_i) (\int |\Delta \varphi|^2 + \int |\varphi|^2 + \int |\nabla \varphi|^2)$$

c) Dans la situation générale, on approche X par quasi-isométrie avec (X, g_η) où (X, Y, g_η) vérifie (E).

Soit (ψ_α, U_α) une partition de l'unité finie sur Y qui trivialise $N^{\varepsilon_0} Y$.

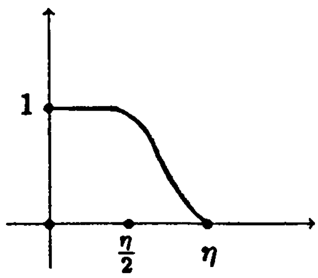
Dans la carte définie par l'exponentielle

$$N^{\varepsilon_0} Y_{|U_\alpha} \times \{x \in \mathbf{R}^d \setminus \|x\| < \varepsilon_0\}.$$

On définit

$$g_0(y,x) = g_0(y,0)_{|T_y Y} + dx_1^2 + \cdots + dx_d^2 .$$

On choisit des fonctions $\xi_\eta : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ de classe C^∞ , φ_η :



$\xi_\eta(x) = \varphi_\eta(\|x\|)$

et soient $g_\eta = \sum_\alpha \psi_\alpha(\xi_\eta(x)g_0 + (1-\xi_\eta(x))g)$ sur $TUB^\eta Y$ et g_η est prolongée par g à l'extérieur (pour tous les objets construits à partir de g_η on met η en indice).

- $\forall \eta \quad (X, Y, g_\eta)$ vérifie (E) donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_n^\eta(\varepsilon) = \nu_n^\eta$.
- Si $y \in Y$, $g_\eta(y) = g(y)$.

Donc les fibrés normaux à Y pour g et g_η sont les mêmes $TUB_\varepsilon^\eta Y = \{y \exp_y^\eta(v)/v \in N_yY \text{ et } \|v\| < \varepsilon\}$. Donc X_ε est difféomorphe à $X_\varepsilon^\eta = X \setminus TUB_\eta^\varepsilon(Y)$ grâce à $\partial_n : \partial_\eta(\exp_y(v)) = \exp_y^\eta(v)$, pour ε assez petit.

- g et g_η diffèrent pour $\|x\| < \eta$ où $g - g_\eta = \sum_\alpha \psi_\alpha(g - g_0)$ et $g - g_{0|Y} = 0$.

La différentiabilité de g assure donc : $\exists M$ tel que $(1-\eta M)g_\eta \leq g \leq (1+\eta M)g_\eta$.

- De plus,

$$d(\exp_y^\eta(v), \exp_y(v)) \leq C_0\|v\|$$

et par continuité, on peut supposer C_0 indépendant de η et de y.

Donc, quitte à modifier M , on peut supposer :

$$(1-\eta M)g_\eta \leq \partial_\eta^{-1*}g \leq (1+M\eta)g_\eta \quad \text{sur} \quad X_\varepsilon^\eta$$

donc, par quasi-isométrie, on a : $\exists m > 0$ tel que $\forall \eta$, $\forall \varepsilon$, $\forall n$

$$\begin{array}{lll} (1-m\eta)\nu_n^\eta(\varepsilon) & \leq \nu_n(\varepsilon) & \leq (1+m\eta)\nu_n^\eta(\varepsilon) \\ (1-m\eta)\nu_n^\eta & \leq \nu_n & \leq (1+m\eta)\nu_n^\eta \end{array}$$

Donc

$$|\nu_n(\varepsilon) - \nu_n| \leq \frac{2m\nu}{1-m\eta}\nu_n + (1+m\eta)|\nu_n^\eta(\varepsilon) - \nu_n^\eta|.$$

On conclut $\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_n(\varepsilon) = \nu_n$.

Bibliographie

[C] G. COURTOIS. — à paraître, 1986.

[CH] I. CHAVEL. — *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.

[O] S. OZAWA. — *Spectre of Domains with small spherical Neumann boundary*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 30 n° 2 (1983), 259-277.

[RT] J. RAUCH, M. TAYLOR. — *Potential and Scattering theory on Wildly Perturbed Domains*, J. Funct. Anal., 18 (1975), 27-59.

— — —