Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

MARC BURGER

Multiplicité de petites valeurs propres du laplacien

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. nº 9, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A9_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MULTIPLICITE DE PETITES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN

par Marc BURGER

Soit S une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres du Laplacien de S comptées avec multiplicités. On sait qu'il existe c_g, constante positive ne dépendant que du genre g de S tel que $\lambda_{2g-2} > c_g$ (Schoen) et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe S de genre g telle que $\lambda_{2g-3} < \varepsilon$, exemple dû à Buser ([2]). Buser montre également que $\lambda_{4g-2} > 1/4$, ([2]), enfin on a le résultat dû à Besson ([1]) : la multiplicité de λ_1 est au plus $4g+3$.

Le théorème énoncé ci-dessous montre essentiellement que pour chaque a entier non nul, il existe des surfacesde genre g arbitrairement grand dont les a premières valeurs propres distinctes ont multiplicité au moins $g^{1/a+1}$.

Plus précisément : ([4])

THEOREME. (Burger-Colbois) <u>Soit</u> $\mathbb{F}_q$ <u>le corps à</u> $q = p^n$ <u>éléments</u>, r <u>un entier divisant</u> n

$$G_{q,m} = \left\{ \begin{pmatrix} a^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \right\}$$

<u>où</u> $m = \dfrac{p^n - 1}{p^r - 1}$, <u>et</u> S <u>une surface de genre</u> $g = \frac{n}{r}+1$. <u>Il existe alors un revêtement galoisien</u> S' <u>de</u> S <u>de groupe</u> $G_{q,m}$ <u>et un ouvert</u> V <u>de l'espace de Teichmüller</u> T_g <u>des métriques de courbure constante</u> -1 <u>sur</u> S <u>tel que si</u> M <u>est une métrique de</u> V <u>et</u> M' <u>la métrique déduite sur</u> S' <u>les</u> n/r <u>premières valeurs propres du Laplacien de</u> M' <u>sont de multiplicité au moins</u> p^r-1.

En dimension $n \geq 3$ la situation est quelque peu différente : soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$ et de courbure -1. Alors $\lambda_1(M) \geq c_v$ pour tout M tel que $\mathrm{vol}(M) \leq v$ (Schoen) et si $n \geq 4$, Buser ([2]) a montré l'inégalité avec $c_v = c_n v^{-2(n+8)}$, en contraste avec la dimension 2 où il est possible de rendre $\lambda_1(M)$ arbitrairement petit, $\mathrm{vol}(M)$ étant fixé. En ce qui concerne les bornes de multiplicités de petites valeurs propres on a les résultats suivants : ($A_M(X)$: nombre de valeurs propres $\leq X$)

- en dimension 3 : $A_M(1) \leq c\ \mathrm{vol}(M)$ (Buser)
- en général : $A_M((\frac{n-1}{2})^2) \leq c(r_M)\ \mathrm{vol}(M)$

où r_M = rayon d'injectivité de M et $c(r) \sim r^{-3}$ si $r \to \infty$, $c(r) \sim r^{-n}$ si $r \to 0$.

Pour $n \geq 4$ on peut combiner cette inégalité avec : $r_M \geq c(n)\ \mathrm{vol}(M)^{-\sigma(n)}$ où $\sigma(n) = [\frac{n+1}{2}] / [\frac{n-2}{2}]$ (Buser [2]), et on obtient :

$$A_M((\frac{n-1}{2})^2) \leq c(n)\ \mathrm{vol}(M)^{n+3}, \quad n \geq 4 .$$

Enfin, si on considère le cas particulier d'une famille de revêtements $M(N) \to M$, alors $r_{M(N)} \geq r_M$ et $A_{M(N)}((\frac{n-1}{2})^2) \leq c(M)\,\mathrm{vol}(M(N))$. Cette dernière inégalité est la meilleure possible, en effet :

PROPOSITION. <u>Supposons</u> $\beta_1 = \dim H^1(M, \mathbb{R}) \geq 1$. <u>Alors il existe des revêtements</u> $M(N) \to M$ <u>tels que pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe</u> $N(\varepsilon)$ <u>et</u> $c(\varepsilon)$ <u>avec</u>

$A_{M(N)}(\varepsilon) \geq c(\varepsilon)\ \mathrm{vol}(M(N))$ dès que $N \geq N(\varepsilon)$.

En ce qui concerne la multiplicité ([3]) :

THEOREME. <u>Soit</u> M, <u>localement symétrique de rang</u> 1 <u>tel que</u> $\frac{\beta_1(\beta_1 - 1)}{2} > \beta_2$. ($\beta_i = \dim H^i(M, \mathbb{R})$). <u>Il existe alors</u> $M_N \to M$, <u>revêtements galoisiens de degré</u> N^3 <u>tels que</u> :

1) Les N^3 premières valeurs propres de M_N sont inférieures à $(\frac{n-1}{2})^2$, respectivement n^2 suivant que le revêtement universel de M est l'espace hyperbolique réel ou complexe.

2) N-1 de ces valeurs propres sont de multiplicité au moins N .

3) Si μ est la plus petite valeur propre de multiplicité N, on a : $\mu \leq \frac{c_1(M)}{N^{\frac{1}{2}}}$.

Remarque. Le premier nombre de Betti des variétés M de volume fini dont le revêtement universel est un espace hyperbolique quaternionien ou le plan des octaves de Cayley, est nul, de plus ces variétés n'ont pas de petites valeurs propres, plus précisément :

- Si $\widetilde{M}$ = espace hyperbolique sur $\mathbb{H}$, de dimension n , on a : $\lambda_1(M) \geq 4(n-1)$.
- Si $\widetilde{M}$ = espace hyperbolique sur $\mathcal{O}_2$ on a : $\lambda_1(M) \geq 16$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BESSON, Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes.
Ann. de l'Inst. Fourier, Tome XXX, fasc. 1, p. 109.

[2] P. BUSER, On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$.
Proc. of Symp. in P. Math. vol. XXXVI, p. 29.

[3] M. BURGER, On multiplicity of small eigenvalues of the Laplacian.
Abstracts of Amer. Math. Soc. Août 1984, p. 133.

[4] M. BURGER, B. COLBOIS : A propos de la multiplicité de la première valeur propre du laplacien d'une surface de Riemann.
C.R. Acad. Sc. Paris t. 300, série I, n°8, 1985, p. 247.

M. BURGER
Institut de Mathématiques
Collège propédeutique
1015 DORIGNY-LAUSANNE (Suisse)