Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Colette Anne
Gérard Besson

Sur le théorème de l'indice d'après Ezra Getzler

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. n° 2, p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A2_0>

Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie
CHAMBERY - GRENOBLE
1984-1985

SUR LE THEOREME DE L'INDICE d'après Ezra GETZLER

par Colette ANNE et Gérard BESSON

PLAN

INTRODUCTION

> *"The philosophical implications are unavoilable : we mathematicians need physics !".*
> Dan Freed & Karen Uhlenbeck,
> in Instantons and Four-manifolds.

Sur une <u>variété spinorielle</u> X , il existe un opérateur elliptique fondamental ; l'opérateur de Dirac. Son indice est le $\hat{A}$-genre de X ; c'est une classe caractéristique évaluée sur le cycle fondamental [X] . Il semble que ce soit pour expliquer le caractère entier de $\hat{A}[X]$ que Atiyah et Singer ont été conduit aux résultats qui portent leur nom (et bien d'autres).

L'importance de ces théorèmes et la complexité de leur démonstration ont été les causes de nombreuses tentatives de simplification par l'introduction de techniques nouvelles. Ce n'est que récemment que E. Getzler a pu faire un progrès significatif dans ce sens. Les idées qu'il utilise reposent sur l'important travail de E. Witten et Alvarez Gaumé (voir [BI]).

En interprétant les objets géométriques comme des quantités physiques, c'est-à-dire exprimés avec une <u>unité</u>, E. Getzler établit un équilibre entre la géométrie de X et celle du fibré des spineurs sur X . Cela conduit à un nouveau calcul symbolique qui permet une démonstration plus directe du théorème.

Soulignons que d'autres preuves sont apparues dans la même période notamment celle de J.M. Bismut [BT] et celle de N. Berline et M. Vergne [B-V].

Il est remarquable que le concept de spineur venant de la physique, les nouvelles démonstrations (et les idées qu'elles mettent en avant) en soient également issues.

Le texte qui suit n'est ni une nouvelle démonstration, ni une exposition détaillée de l'article [GR], il a été conçu comme un guide pour sa lecture, renvoyant à celui-ci pour les détails techniques.

Après un rappel sur les généralités algébriques et l'opérateur de Dirac, nous avons tenté d'expliquer le rôle du calcul symbolique dans la démonstration.

GENERALITES

A - Algèbre de Clifford.

1. DEFINITION. - L'algèbre de Clifford du k-espace vectoriel V relative à la forme quadratique Q définie sur V est $C(Q) = T(V)/I(Q)$ où $T(V)$ est l'algèbre tensorielle de V et $I(Q)$ l'idéal bilataire de $T(V)$ engendré par les $x\otimes x - Q(x).\mathbb{1}$ (nb : si $Q \equiv 0$ on obtient ΛV).

2. Propriété universelle : si $\Phi : V \to A$ (algèbre unifaire) est une application linéaire qui vérifie $\Phi(x)^2 = Q(x)\mathbb{1}_A$ $(\forall x \in V)$ Φ admet un prolongement unique $\tilde{\Phi} : C(Q) \to A$, homomorphisme d'algèbre.

3. Si V est euclidien (ou hermitien) ; $(\ ,\ )$ note son produit scalaire $C(V)$ est l'algèbre de Clifford relative à $Q(x) = -(x,x)$.

Propriétés de $C(V)$:

i) C'est l'algèbre engendrée par V et les relations $v.w + w.v = -2(v,w)$.

ii) Si $(e_j)_{1\le j\le n}$ est une base orthonormée de V , alors :
$e_i^2 = -1$ et pour $i \neq j$, $e_i.e_j + e_j.e_i = 0$.

iii) $O(V)$ agit sur $C(V)$ par automorphisme d'algèbre (cf. la propriété universelle).

iv) $C(V)$ et ΛV sont isomorphes comme espace vectoriel :

$$C(V) \underset{\sigma}{\overset{\theta}{\rightleftarrows}} \Lambda V$$

σ : application symbole.
θ : application de quantification.

On a la formule de produit : soient a et b dans $C(V)$,

$$\sigma(a.b) = \mu[\exp -(\overleftarrow{\partial},\overrightarrow{\partial})(\sigma(a)\otimes\sigma(b))]$$

qui doit se lire ainsi :

$$\mu : \Lambda V \otimes \Lambda V \longrightarrow \Lambda V$$
$$a \otimes b \longmapsto a \wedge b$$

$$(\overleftarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial}) : \qquad \Lambda V \otimes \Lambda V \longrightarrow \Lambda V \otimes \Lambda V$$
$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_p) \otimes (b_1 \wedge \ldots \wedge b_q) \longmapsto \sum_{i,j} (-1)^{p+i+j-1} (a_i, b_j)(a_1 \wedge \hat{a}_i \wedge \ldots \wedge a_p) \otimes (b_1 \wedge \ldots \wedge \hat{b}_j \wedge \ldots \wedge b_q)$$

et exp est l'exponentielle d'endomorphismes de $\Lambda V \otimes \Lambda V$. $(\overleftarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial})$ est un endomorphisme de contraction, il est donc nilpotent et $\exp -(\overleftarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial})$ est une somme finie. $\overrightarrow{\partial}$ est l'adjoint de $\begin{array}{l} V \otimes \Lambda V \to \Lambda V \\ v \otimes a \mapsto v \wedge a \end{array}$

et $\overleftarrow{\partial}$ celui de $\begin{array}{l} V \otimes \Lambda V \to \Lambda V \\ v \otimes a \mapsto a \wedge v \end{array}$.

4. <u>Remarque</u>. - Cette construction est celle du produit $*$ de ΛV telle que l'a définie Helmstetter (cf. [Hr]) : pour f, g dans ΛV , il pose $f * g = \mu(\exp -(\overleftarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial})(f \otimes g))$. On est donc assuré de l'associativité. Si f et g sont dans V , $(\overleftarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial})(f \otimes g) = (f, g) 1 \otimes 1$, donc :

$$f * g = f \wedge g - (f, g)$$

et $\quad f * g + g * f = -2(f, g)$ (relations de $C(V)$).

On voit en particulier :

$$\sigma(a.b) = a \wedge b \mod \Lambda^{|a|+|b|-1}(V) .$$

5. <u>Conséquences</u>.

i) $C(V)$ admet la filtration $\sum_{j \leq m} \theta(\Lambda^j V)$ et la $\mathbb{Z}_2$-graduation $C_i(V) = \sum_{m \equiv i[2]} \theta(\Lambda^m V) \quad i = 0, 1$.

ii) Si $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base orthonormée de V ; $(e_{i_1} \bullet \ldots \bullet e_{i_p})_{\substack{0 \leq p \leq n \\ i_1 < \ldots < i_p}}$ est une base de $C(V)$.

iii) On définit l'anti-automorphisme $\bar{\ }$ sur cette base : $\overline{e_{i_1} \bullet \ldots \bullet e_{i_p}} = (-1)^p e_{i_p} \bullet \ldots \bullet e_{i_1}$.

B - Représentation spinorielle et groupe Spin.

L'algèbre $C(V)$ est représentée dans l'espace des spineurs. On en déduit les représentations irréductibles de $C(V)$; ceci permet aussi de construire un groupe $\mathrm{Spin}(n)$ relèvement à deux feuillets de $SO(n)$.

I. L'exemple de $\mathbb{R}^2$.

(e_1, e_2) est la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$. $C(\mathbb{R}^2)$ est donc engendrée par $1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2$ qui vérifie $e_1^2 = e_2^2 = -1$, $e_1 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_1$. C'est donc $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions.

6. THEOREME. - <u>La complexifiée</u> $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ <u>de</u> $C(\mathbb{R}^2)$ <u>s'identifie à</u> $M_2(\mathbb{C})$.

$C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = C(\mathbb{C}^2, \tilde{Q})$ algèbre de Clifford de $\mathbb{C}^2$ relative à la forme bilinéaire symétrique $\tilde{Q}$ déduite de $-(\ ,\ )$.

Posons :

$$m = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2), \quad p = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \quad \text{et} \quad S = \Lambda(\mathbb{C}m) = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}m .$$

$C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ agit sur S par $\rho : C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathrm{End}(S)$ l'homomorphisme d'algèbre défini par :

$$\rho(m)[m'] = m \wedge m'$$

$$\rho(p)[m'] = 2p \lrcorner m', \quad m' \in S$$

(p est identifié à l'élément de $(\mathbb{C}m)^*$ $\tilde{Q}(p,.)$), alors dans la base $(1, m)$ de S

$$\rho(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(e_1 \cdot e_2) = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

(matrices de Pauli).

ρ peut être restreint à $\mathbb{H}$, Si $q = a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2$, $\rho(q) = \begin{bmatrix} z & -\overline{z'} \\ z' & \overline{z} \end{bmatrix}$ si $z = a - id$ et $z' = b + ic$. Donc, si $\|q\| = 1$, $\rho(q) \in SU(2)$.

ρ est un isomorphisme de groupe de $\{q / \|q\| = 1\}$ sur $SU(2)$.

7. Le groupe Spin(2) .

$SO(2)$ agit sur $\mathbb{H} = C(\mathbb{R}^2)$: si R_θ est la rotation d'angle θ $f_1 = R_\theta(e_1)$ et $f_2 = R_\theta(e_2)$, $f_1 . f_2 = e_1 \cdot e_2$.

On en déduit donc une représentation de $SO(2)$ sur $End(S)$:

$$R_\theta(a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2) = a + (b\cos\theta - c\sin\theta)e_1 + (b\sin\theta + c\cos\theta)e_2 + de_1 \cdot e_2$$

$(a,b,c,d \in \mathbb{C})$.

Peut-on déduire de l'action de R_θ sur $End(S)$ une action de R_θ sur S ? Non, on n'aura qu'une représentation projective. On identifie $P(S)$ aux idéaux minimaux à gauche de $End(S)$ en associant à $u \in P(S)$, $I(u)$ l'idéal des endomorphismes s'annulant sur u (on vérifie que $I(u)$ est minimal et qu'ils sont tous de ce type). R_θ agit alors sur $P(S)$ par $\rho(\theta)$:

$$\begin{tikzcd}
u = \overline{(\alpha,\beta)} \in P(S) \arrow[r] \arrow[d, "\rho(\theta)"'] & I(u) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta v & -\alpha v \\ \beta w & -\alpha w \end{pmatrix} \ v,w \in \mathbb{C} \right\} \arrow[d] \\
\rho(\theta)(u) = \left(e^{-i\frac{\theta}{2}}\alpha , e^{i\frac{\theta}{2}}\beta \right) & R_\theta I(u) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta v & -e^{-i\theta}\alpha v \\ e^{i\theta}\beta w & -\alpha w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\beta e^{-i\frac{\theta}{2}}v & -e^{-i\frac{\theta}{2}}\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}v \\ e^{i\frac{\theta}{2}}\beta e^{i\frac{\theta}{2}}w & -e^{-i\frac{\theta}{2}}\alpha e^{i\frac{\theta}{2}}w \end{pmatrix} \right\} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On voit que $\rho(SO(2)) \subset PU(2)$.

On a donc le shéma :

$$\begin{array}{ccc} & & SU(2) \\ & & \downarrow P \\ SO(2) & \xrightarrow{\rho} & PU(2) \end{array}$$

P étant l'application projective.

8. DEFINITION. -

$\mathrm{Spin}(2) = \rho^*(SU(2)) = \{(R_\theta, M) \in SO(2) \times SU(2) / \rho(R_\theta) = P(M)\}$

$$P(M) = \rho(R_\theta) \Leftrightarrow M = \pm \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(2) & \longrightarrow & SU(2) \\ \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \\ SO(2) & \longrightarrow & PU(2) \end{array} .$$

Spin(2) agit, comme $SU(2)$, sur S par relèvement de ρ. $S = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1$ qui scinde la représentation, d'où :

$\rho^+ : \mathrm{Spin}(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\Lambda^0$ $\quad \rho^+(S_\theta)$ est la multiplication par $e^{-i\frac{\theta}{2}}$

$\rho^- : \mathrm{Spin}(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\Lambda^1$ $\quad \rho^-(S_\theta)$ est la multiplication par $e^{i\frac{\theta}{2}}$

ces deux représentations sont irréductibles et non équivalentes, c'est le cas en toutes dimensions paires.

II. Représentation spinorielle.

9. En dimension paire : $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$.

$V^{\mathbb{C}}$ est le complexifié de V, $\tilde{C}(V)$ l'algèbre de Clifford de $V^{\mathbb{C}}$ relative à la forme bilinéaire symétrique $\tilde{Q}$ déduite de $-(\ ,\ )$. Soit $(e_j)_{1 \le j \le 2n}$ une base orthonormée de V. Pour k, $1 \le k \le n$, on pose :

$$m_k = \frac{1}{2}(e_{2k-1} + ie_{2k}) \quad \text{et} \quad p_k = \frac{1}{2}(e_{2k-1} - ie_{2k}) ,$$

$$\tilde{Q}(m_k) = \tilde{Q}(p_k) = 0 , \quad \tilde{Q}(m_k, p_k) = -\frac{1}{2} .$$

Soit M l'espace vectoriel engendré par les m_k et P celui engendré par les p_k, $V^{\mathbb{C}} = M \oplus P$ et $\tilde{Q}$ établit une dualité entre P et M qui sont totalement isotropes maximaux.

L'espace des spineurs est $S = \Lambda M$.

V et $V^{\mathbb{C}}$ agissent sur S par ρ :

$a \in S$, $m \in M \Rightarrow \rho(m)(a) = m \wedge a$

$p \in P \Rightarrow \rho(p)(a) = 2p \lrcorner a$ (p est identifié à $\tilde{Q}(p,\cdot)$ dans M^*).

(<u>Remarque</u> : M étant totalement isotrope, le produit de Clifford dans M s'identifie à $\wedge$).

Cette action s'étend à $\tilde{C}(V)$ (on vérifie la propriété universelle) :

Soient $m \in M$ et $p \in P$,

$$\begin{aligned}\rho(m+p)^2(a) &= \rho(m+p)[m \wedge a + 2p \lrcorner a] \\ &= 2(m \wedge (p \lrcorner a) + p \lrcorner (m \wedge a)) \\ &= 2(m \wedge (p \lrcorner a) + (p \lrcorner m)a - m \wedge (p \lrcorner a)) \\ &= 2\tilde{Q}(m,p)a = \tilde{Q}(m+p)a \ .\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall v \in V^{\mathbb{C}} \qquad \rho(V)^2 = \tilde{Q}(v) \ .$$

10. THEOREME. - $\rho : \tilde{C}(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ <u>est un isomorphisme d'algèbre</u>.

<u>Preuves</u>. - C'est un homomorphisme d'algèbre, comme on vient de voir, de plus $\dim \tilde{C}(V) = 2^{2n} = (2^n)^2 = \dim \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$. Il suffit donc de vérifier la surjectivité :

l'endomorphisme qui envoie $m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}$ sur $m_{j_1} \wedge \ldots \wedge m_{j_\ell}$ et envoie les autres vecteurs de base de S sur 0 , est réalisé par :

$\rho(p_{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot p_{\epsilon_{n-\ell}}) \circ \rho(m_1 \cdot \ldots \cdot m_n) \circ \rho(p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k})$

à un scalaire près, si $\{\epsilon_1 \ldots \epsilon_{n-\ell}\} \cup \{j_1 \ldots j_\ell\} = \{1,\ldots,n\}$.

On voit que $\rho_{|V^{\mathbb{C}}}$ agit en modifiant la parité du degré, donc : $\rho_{|\tilde{C}_0(V)}$ laisse stable S^+ et S^- les <u>demi-spineurs</u> de longueur respectivement paire et impaire et $\rho_{|\tilde{C}_0(V)}$ se scinde en deux représentations ρ^+ et ρ^- à image respectivement dans $\mathrm{End}(S^+)$ et $\mathrm{End}(S^-)$.

11. <u>En dimension impaire</u> $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n+1$.

On utilise le lemme :

<u>$C(\mathbb{R}^n)$ et $C_0(\mathbb{R}^{n+1})$ sont des algèbres isomorphes</u> :

si $(e_i)_{1\le i\le n+1}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, soit

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^{n+1})$ homomorphisme linéaire

$$e_i \longmapsto e_i \cdot e_{n+1}$$

$$f(x)^2 = x \cdot e_{n+1} \cdot x \cdot e_{n+1} = -x^2 e_{n+1}^2 = x^2 = -(x,x) \ .$$

La propriété universelle est vérifiée. f se prolonge en un homomorphisme d'algèbre sur $C(\mathbb{R}^n)$ qui est injectif. (De même $\tilde{C}(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$ sont isomorphes).

Ainsi, en fixant un axe e_{2n+1} dans V , on a une représentation de $\tilde{C}_0(V)$ par celle de $\tilde{C}(W)$ si $V = W \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}e_{2n+1}$.

Par exemple : représentation spinorielle de $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^3)$.

e_1, e_2, e_3 est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $C(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H}$. Une base de $\tilde{C}_0(\mathbb{R}^3)$ est 1 , e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 ; l'isomorphisme du lemme :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow C(\mathbb{R}^2) \\ 1 &\longmapsto 1 \\ e_1e_3 &\longmapsto e_1 \\ e_2e_3 &\longmapsto e_2 \\ e_1e_2 &\longmapsto e_1e_2 \end{aligned}$$

$\rho(e_1e_3)\,\rho(e_2e_3)\rho(e_1e_2)$ redonnent les matrices de Pauli. ([L-L] et [D-F-N]).

12. <u>Irréductibilité.</u>

n est quelconque. On définit dans $\tilde{C}(V)$ $\omega = i^{\frac{n(n+1)}{2}} e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$, $(e_j)_{1\le j\le n}$ étant une base orthonormée de V .

On remarque qu'il ne dépend pas de la base et son symbole est au $(i)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ près, la forme volume de V .

$$\omega . e_j = (-1)^{n-1} e_j \cdot \omega \quad \text{et} \quad \omega^2 = 1 .$$

Donc :

• si n est impair, ω est dans le centre de $\tilde{C}(V)$ et $\tilde{C}_1(V) = \omega \tilde{C}_0(V)$, donc $\tilde{C}(V) = \tilde{C}_0(V) \oplus \omega \tilde{C}_0(V)$ isomorphe en tant qu'algèbre à $\tilde{C}_0(V) \otimes (\mathbb{C} \oplus \omega \mathbb{C})$ et toute représentation de $\tilde{C}(V)$ se ramène à une représentation de $\tilde{C}_0(V)$.

$\tilde{C}_0(V)$ est une algèbre de matrice, donc :

$\rho_{|\tilde{C}_0(V)}$ <u>est irréductible</u>.

• Si n est pair, ω est dans le centre de $\tilde{C}_0(V)$. On vérifie de plus $\rho^+(\omega) = \mathrm{Id}_{|S^+}$ et $\rho^-(\omega) = -\mathrm{Id}_{|S^-}$.

Posons :

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(1+\omega) , \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(1-\omega) , \quad (\omega_1 \cdot \omega_2 = 0) .$$

$\tilde{C}_0(V) = \omega_1 \tilde{C}_0(V) \oplus \omega_2 \tilde{C}_0(V)$ est donc la somme de deux idéaux bilatères qui sont des algèbres de matrices.

$\rho^+(\omega_1) = \mathrm{Id}_{S^+}$, $\rho^-(\omega_1) = \rho^+(\omega_2) = 0$, $\rho^-(\omega_2) = \mathrm{Id}_{S^-}$ et de plus, ρ^+ et ρ^- sont surjectives sur $\tilde{C}_0(V)$. Pour des raisons de dimension ρ^+ est donc un isomorphisme de $\omega_1 \tilde{C}_0(V)$ sur $\mathrm{End}(S^+)$ et de même ρ^- de $\omega_2 \tilde{C}_0(V)$ sur $\mathrm{End}(S^-)$.

<u>Les représentations</u> ρ^+ <u>et</u> ρ^- <u>sont donc irréductibles</u>.

<u>De plus, elles sont non-équivalentes</u> (sinon $\rho^+(\omega_2) = 0 \Rightarrow \rho^-(\omega_2) = 0$!)

III. Spin(V).

Supposons d'abord $n = 2m = \dim V$. $\tilde{C}(V)$ est une algèbre de matrice, tous ses automorphismes sont intérieurs. $a \in SO(V)$ agit sur $\tilde{C}(V)$. Il existe donc $\Psi(a)$ dans $\tilde{C}(V)$ tel que $\forall v \in \tilde{C}(V)$, $a[v] = \Psi(a).v.\Psi(a)^{-1} = \mathrm{Ad}(\Psi(a))[v]$. $\Psi(a)$ est défini à un scalaire près ; on cherche donc Ψ par linéarisation.

L'action de $SO(V)$ sur $\tilde{C}(V)$ induit une injection de l'algèbre de Lie $\underline{so}(V)$ dans les dérivations de $\tilde{C}(V)$.

Soit $A \in \underline{so}(V)$, on cherche donc $\psi^*(A)$ dans $\tilde{C}(V)$ tel que $\forall v \in \tilde{C}(V)$, $A[v] = ad(\psi^*(A))[v]$ en exigeant que la composante scalaire de $\psi^*(A)$ soit nulle.

Il y a alors unicité de la solution, on vérifie par le calcul que c'est :

$$\psi^* : \underline{so}(V) \longrightarrow \tilde{C}(V)$$
$$A \longmapsto \frac{1}{2}\sum_{i<j} a_{ij} e_i \cdot e_j \quad \text{si } A = [a_{ij}] \text{ antisymétrique dans la base } e_j \,|\, 1 \leq j \leq n \; .$$

Notons $C^{(2)}(V)$ l'espace vectoriel engendré par les $(e_i \cdot e_j)_{i<j}$ dans $C(V)$. ψ^* est un isomorphisme de $\underline{so}(V)$ dans $C^{(2)}(V)$. (ψ^* est réelle).

ψ^* peut se définir par la même formule en dimension impaire.
n <u>est maintenant quelconque</u> $(n \geq 2)$.

13. <u>Par Définition</u> :

Spin(V) est le groupe multiplicatif de C(V) d'algèbre de Lie $C^{(2)}(V)$, $Spin(n) = Spin(\mathbb{R}^n)$. On voit :

$$Spin(V) = \{a \in C_0(V) \,|\, aVa^{-1} \subset V \text{ et } a\bar{a} = 1\} ,$$

et $a \in Spin(V) \Rightarrow Ad(a)$ définit une rotation sur V .
On a donc une représentation de Spin (V) dans V :

$$p : Spin(V) \longrightarrow SO(V)$$
$$a \longmapsto [x \to a.x.a^{-1}] \quad ;$$

p est un homomorphisme de groupe surjectif $Ker p = \{\pm 1\}$.
Donc, Spin(V) est compact.

Enfin, grâce à ψ^* , on peut trouver un chemin qui va de 1 à -1 : $e_1 \dots e_n$ est une base orthonormée de V

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$A_\theta = \exp \theta B$ et $\psi^* B = -\frac{1}{2} e_1 \cdot e_2$.

Alors, $a(\theta) = \exp(-\frac{\theta}{2} e_1 \cdot e_2) = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} e_1 \cdot e_2$ est un chemin continu de $\mathrm{Spin}(V)$, $a(0) = 1$ et $a(2\pi) = -1$.

Donc, si $n \geq 3$, comme $\Pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, $p : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ est le revêtement universel de $SO(n)$ et $\mathrm{Spin}(n)$ est simplement connexe.

C - Variétés spinorielles.

X est une variété riemannienne connexe orientée, de dimension $n \geq 2$. Soit R son fibré des repères orthonormés directs (fibré principal de groupe structural $SO(n)$).

Une structure spinorielle sur X est un revêtement à deux feuillets $\hat{R}$ de R dont la restriction à la fibre F soit $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$.

Donc, les classes d'isomorphismes de structures spinorielles sont identifiables aux éléments de $H^1(R, \mathbb{Z}_2)$ qui ont une restriction non nulle à $H^1(F, \mathbb{Z}_2)$.

De la suite naturelle $F \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} X$ on déduit la suite exacte de cohomologie

$$\ldots\ H^1(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(R, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(F, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H^2(X, \mathbb{Z}_2)\ \ldots$$

X admet une structure spinorielle si et seulement si l'image de i^* est non nulle, donc si et seulement si ∂ est nulle, car $H^1(F, \mathbb{Z}_2)$

est monogène pour $n \geq 2$; l'image de son générateur par ∂ est, par définition, la 2e classe de Stiefel-Whitney de X. Donc, X admet une structure spinorielle si et seulement si $\omega_2(X) = 0$ et alors ses structures spinorielles sont classées, à isomorphisme de fibré près, par $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$.

Ainsi, les sphères admettent des structures spinorielles car leur classe de S. W. totale est 1.

Pour les projectifs réels $\omega(\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1}$ a étant un générateur de $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$ et $a^{n+1} = 0$.

Donc $\mathbb{P}^n$ admet une structure spinorielle si et seulement si $(n+1) \equiv 0[4]$ (pour plus de détails, voir [M-S]).

D - Quelques exemples élémentaires.

I. Existence et nombres de structures spinorielles.

Soit X une variété riemannienne compacte connexe. Choisissons sur X un recouvrement par des ouverts U_i.

On supposera par la suite que les U_i sont adaptés au fibré considéré, c'est-à-dire que la restriction de celui-ci au-dessus de chaque U_i est trivial et que les intersections deux à deux et trois à trois des U_i sont contractiles.

Soit R le fibré des repères orthonormés directs (X orientable)

$$R \longrightarrow X$$

une structure spinorielle est un revêtement $\hat{R} \longrightarrow R$ à deux feuillets en sorte que

$$\hat{R} \longrightarrow X$$

soit une fibration principale de groupe structural $Spin(n)$ $(n = \dim X)$ et que

$$\hat{R} \xrightarrow{p} R \longrightarrow X$$

la restriction aux fibres (au-dessus des points de X) de p soit la projection canonique

$$\mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{q} SO(n) \ .$$

Alors, R peut être défini par recollement, c'est-à-dire :

i) sur chaque U_k on considère le fibré trivial

$$\begin{array}{c} U_k \times SO(n) \\ \downarrow \\ U_k \end{array}$$

ii) sur $U_k \cap U_\ell$ $(k \neq \ell)$ le changement de carte est une application

$$U_k \cap U_\ell \xrightarrow[f_{k\ell}]{} SO(n) \qquad (f_{k\ell} \text{ est } C^\infty),$$

telle que

$$\begin{cases} \text{sur } U_k \cap U_\ell & f_{k\ell} = (f_{\ell k})^{-1} \quad \text{(relations de cocycle)} \\ \text{sur } U_k \cap U_\ell \cap U_m & f_{k\ell} f_{\ell m} f_{mk} = 1 \end{cases}$$

iii) R est alors le quotient de la somme disjointe $\coprod_k (U_k \times SO(n))$ par la relation d'équivalence

$$x \in U_k \cap U_\ell \qquad g_1, g_2 \in SO(n)$$
$$(x, g_1) \sim (x, g_2) \Leftrightarrow g_2 = f_{k\ell}(x) \cdot g_1 \ .$$

Alors, $U_k \cap U_\ell$ $(k \neq \ell)$ étant contractile

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "q"] \\ U_k \cap U_\ell \arrow[ur, "g_{k\ell}"] \arrow[r, "f_{k\ell}"'] & SO(n) \end{tikzcd}$$

On peut relever $f_{k\ell}$ à travers le revêtement q en $g_{k\ell}$. On prend soin de choisir ces relèvements en sorte que

$$g_{k\ell} = (g_{\ell k})^{-1} \ .$$

Posons :

$$\epsilon_{k\ell m} = g_{k\ell} g_{\ell m} g_{mk} \quad \text{sur } U_k \cap U_\ell \cap U_m \ .$$

Alors, $q(\varepsilon_{k\ell m}) = 1$, d'où :

1) $\varepsilon_{k\ell m}$ est constant sur $U_k \cap U_\ell \cap U_m$ pour des raisons de continuité ;

2) $\varepsilon_{k\ell m} = \pm 1$ (ou $0,1$ en notation additive).

$\varepsilon = (\varepsilon_{k\ell m})$ est donc une 2-cochaine. On vérifie aisément que c'est un cocycle. Il est à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$.

La structure spinorielle existe donc ssi $\varepsilon \equiv 0$. L'obstruction à l'existence d'une telle structure vit donc dans :

$$H^2(X, \mathbb{Z}_2)$$

c'est la seconde classe de Stiefel-Whitney de X .

Supposons alors qu'il existe une structure spinorielle (g_{ij}) , toute autre (g'_{ij}) s'écrit :

$$g'_{ij} = \varepsilon_{ij} g_{ij}$$

où ε_{ij} est une application constante de $U_i \cap U_j$ dans $\mathbb{Z}_2$. De plus,

$$\begin{cases} g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1 \\ g'_{ij} g'_{jk} g'_{ki} = 1 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} = 1$$

car ε_{ij} est dans le centre de Spin(n) . De même,

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ji})^{-1} .$$

C'est donc un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$ (un élément de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$).

On vient d'expliciter l'action de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ sur $H^1(X, \mathrm{Spin}(n))$

$$((\varepsilon_{ij}), (g_{ij})) \longrightarrow (\varepsilon_{ij} g_{ij}) .$$

On vérifie aisément que $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ agit librement sur $H^1(X, \mathrm{Spin}(n))$ et que le quotient est en bijection avec $H^1(X, SO(n))$. Le nombre de structures spinorielles est donc égal à $\# H^1(X, \mathbb{Z}_2)$.

En résumé, on a explicité la suite exacte de cohomologie

$$H^1(X, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow H^1(X, \mathrm{Spin}(n)) \xrightarrow{q} H^1(X, SO(n)) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_2)$$

déduite de

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1 .$$

14. Cas particulier.

Si $n = 2$, l'application q

$$q : \mathrm{Spin}(2) = S^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(2) = S^1$$

est l'élévation au carré.

Les structures spinorielles sont donc les racines carrées du fibré des repères orthonormés directs.

II. Les cas particuliers.

15. Si $\mathbb{H}$ est le plan hyperbolique (demi-plan de Poincaré) nous allons considérer des variétés de type $X = \mathbb{H}/\Gamma$ où Γ est tel que X soit une surface de Riemann compacte (Γ agit par isométries directes).

Choisissons une trivialisation globale du fibré des repères orthonormés directs, c'est-à-dire une identification de l'espace tangent à $\mathbb{H}$ en un point à $\mathbb{R}^2$. On a donc

$$R = \mathbb{H} \times S^1 .$$

Tout élément $\gamma \in \Gamma$ opère sur R par :

$$(x,\xi) \longmapsto (\gamma(x), \gamma'(x)\cdot\xi) .$$

Cette opération est isométrique et donc $\gamma'(x) \in S^1$. Le fibré des repères orthonormés directs de X , soit $R(X)$, est donc le quotient de $\mathbb{H} \times S^1$ par cette action ρ_1 de Γ :

$$R(X) = \mathbb{H} \times S^1/\rho_1 .$$

Le fibré des repères spinoriels sur $\mathbb{H}$ est donc trivialisable également.

$$\hat{R} = \mathbb{H} \times S^1 \longrightarrow \mathbb{H} \times S^1 = R$$

$$(x,u) \longrightarrow (x,u^2) .$$

Nous allons construire la structure spinorielle $\hat{R}(X)$ sur la variété X de la manière suivante :

$$\hat{R}(X) = \mathbb{H} \times S^1 / \rho_2$$

où ρ_2 est une action de Γ sur $\mathbb{H} \times S^1$.

La représentation ρ_2 doit être une "racine carrée de ρ_1 ". Rappelons que le groupe Γ peut se présenter sous la forme

$$\Gamma = \left\{ \gamma_1, \dots, \gamma_{2g} \; ; \; \prod_{i=1}^{g} [\gamma_{2i-1}, \gamma_{2i}] = 1 \right\} .$$

L'espace topologique $\mathbb{H}$ est contractile, on peut donc relever l'application $\gamma_k'(x)$ à travers l'exponentielle,

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{H} \arrow[ur, "\theta_{\gamma_k}(x)"] \arrow[r, "\gamma_k'(x)"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

en une application $\theta_{\gamma_k}(x)$ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$, et ceci pour chaque k . Il suffit de définir :

$$\theta_{\gamma_k^{-1}}(x) = - \theta_{\gamma_k}(x) \qquad k = 1, 2, \dots, 2g-1$$

$$\theta_{\gamma_{2g}^{-1}}(x) = - \theta_{\gamma_{2g}}(x) + 2\epsilon\pi \qquad \epsilon = 0 \text{ ou } 1 \; .$$

La relation définissant Γ se traduit par une relation sur les θ du type :

$$\sum_{k=1}^{2g} \theta_{\gamma_k}(x) - \sum_{k=1}^{2g} \theta_{\gamma_k}(x) - 2\epsilon\pi = 2n\pi \; .$$

On peut donc choisir ϵ en sorte que n soit pair. On étend alors la définition de θ_γ pour un élément γ quelconque de Γ en utilisant la structure de groupe (écrire γ comme un mot en les γ_{k^i}).

Les structures spinorielles sont donc définies par :

$$\rho_2(\gamma_k)(x,\xi) = \left(\gamma_k(x), \epsilon_k e^{\frac{i}{2}\theta_{\gamma_k}(x)}.\xi\right) \qquad \epsilon_k = \pm 1$$

$$\rho_2(\gamma_k^{-1})(x,\xi) = \left(\gamma_k^{-1}(x), \epsilon_k e^{\frac{i}{2}\theta_{\gamma_k^{-1}}(x)}.\xi\right)$$

(et étendue au groupe comme précédemment).

Toutes les surfaces X considérées admettent donc 2^{2g} structures spinorielles (chacune d'entre elles est déterminée par une suite (ϵ_k) $k=1,\dots,2g$ et $\epsilon_k = \pm 1$).

16. Le cas des tores est particulièrement simple et se traite de manière analogue.

17. Enfin, pour $X = S^2$, il suffit d'utiliser la carte stréréographique sur chacun des deux ouverts complémentaires d'un pôle et de faire le travail du §I.

E - Opérateur de Dirac.

$S^\pm \hat{R}$ sont les fibrés associés à la représentation de Spin(n) dans les demi-spineurs, i.e. on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\hat{R} \times S^\pm \arrow[r] \arrow[d] & S^\pm \hat{R} \arrow[d] \\
\hat{R} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Il y a une équivalence entre les représentations $p \otimes \rho^\pm$ et $\rho^\mp$ de Spin(n) ou si $g \in$ Spin(n) le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \otimes S^\pm \arrow[r, "c"] \arrow[d, "p\otimes\rho^\pm(g)"'] & S^\mp \arrow[d, "\rho^\mp(g)"] \\
\mathbb{R}^n \otimes S^\pm \arrow[r, "c"] & S^\mp
\end{tikzcd}$$

est commutatif si $c(v \otimes s) = \rho(v)[s]$.

En effet :

$$c(p\otimes\rho(g))(u\otimes s) = \rho(gug^{-1})[\rho(g)(s)] = \rho(gu)(s)$$
$$= \rho(g)(\rho(u)(s)) = \rho(g)[c(u\otimes s)] \ .$$

On peut donc définir des homomorphismes de fibré

$$\mu^{\pm} \quad TX\otimes S^{\pm}(\hat{R}) \longrightarrow S^{\mp}(\hat{R}) \ .$$

Alors, les opérateurs de Dirac $\partial^{\pm}$ sont définis par :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(S^{\pm}\hat{R}) & \xrightarrow{\partial^{\pm}} & \Gamma(S^{\mp}\hat{R}) \\ \nabla\big\downarrow & & \big\uparrow\mu^{\pm} \\ \Gamma(T^{*}X\otimes S^{\pm}\hat{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & \Gamma(TX\otimes S^{\pm}\hat{R}) \end{array}$$

où $\Gamma(P)$ représente les sections du fibré P au-dessus de X.
∇ est la dérivée covariante dont héritent $S^{\pm}\hat{R}$ de la connexion canonique de R.

Si $e_i\,|\,1\le i\le n$ est un repère mobile orthonormé

$$\partial^{\pm}(s) = \sum_{i=1}^{2m} \rho(e_i)[\nabla_{e_i}s] \ .$$

LE ROLE DU CALCUL SYMBOLIQUE

A - Pourquoi utilise-t-on le calcul symbolique ?

Soit X une variété spinorielle compacte et $S\to X$ le fibré des spineurs sur X

$$\begin{array}{c} S \\ \big\downarrow \\ X \ . \end{array}$$

L'opérateur de Dirac, $\partial\!\!\!/$, opère sur les sections de S.

Rappelons que le fibré ci-dessus est somme directe des spineurs positifs et spineurs négatifs

$$\begin{array}{l} S = S^+ \oplus S^- \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

L'opérateur $\mathcal{D}$ échange S^+ et S^-, c'est-à-dire, si s est une section de S^+ (resp. S^-) dans le domaine de $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}s$ est une section de S^- (resp. S^+) ce qui définit

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}|_{C^\infty(X;S^+)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_- = \mathcal{D}|_{C^\infty(X;S^-)} .$$

L'index de $\mathcal{D}_+$ est par définition l'entier,

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}_+) = \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{D}_+) - \dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{D}_+^*))$$

où $\mathcal{D}_+^*$ est l'adjoint de $\mathcal{D}_+$.

Comme $\rho(e_i)^* = -\rho(e_i)$ et que $\rho(e_i)$ commute avec ∇_{e_i}, on a :

$$(\mathcal{D}_+)^* = \mathcal{D}_-$$

d'où

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}_+) = \dim(\ker \mathcal{D}_+) - \dim(\ker \mathcal{D}_-) .$$

L'opérateur $\mathcal{D}^2 = (\mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-)^2$ conserve S^+ et S^-. Il est auto-adjoint, elliptique et à résolvante compacte. Si λ est une valeur propre de $\mathcal{D}_+^2 = \mathcal{D}_-\mathcal{D}_+$, non nulle, alors c'est aussi une valeur propre de $\mathcal{D}_-^2 = \mathcal{D}_+\mathcal{D}_-$ avec la même multiplicité ; en effet :

$$\mathcal{D}_+^2 \psi = \lambda\psi \Rightarrow \mathcal{D}_-^2(\mathcal{D}_+\psi) = \lambda(\mathcal{D}_+\psi)$$

et $\quad \mathcal{D}_+\psi \neq 0 \quad (\text{si } \lambda \neq 0)$.

En fait $\mathcal{D}_+$ (resp. $\mathcal{D}_-$) réalise un isomorphisme entre les espaces propres de $\mathcal{D}_+^2$ et $\mathcal{D}_-^2$ relatif aux valeurs propres non nulles.

Donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(\mathcal{D}_+) &= \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{D}_+) - \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{D}_-) = \operatorname{tr}\left(e^{-t\mathcal{D}_+^2}\right) - \operatorname{tr}\left(e^{-t\mathcal{D}_-^2}\right) \\ &= \text{super}\operatorname{tr}\left(e^{-t\mathcal{D}^2}\right) = \operatorname{str}\left(e^{-t\mathcal{D}^2}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\operatorname{str}\left(e^{-t\mathcal{D}^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Le calcul symbolique doit permettre d'obtenir le comportement asymptotique de $\mathrm{str}\left(e^{-t\mathcal{D}^2}\right)$ lorsque t tend vers 0.

Rappelons à titre d'exemple la détermination du développement asymptotique de $e^{-t\Delta}$ où Δ est le Laplacien standard sur une variété riemannienne compacte X [GY].

Posons $Z(t) = \mathrm{tr}(e^{-t\Delta})$.

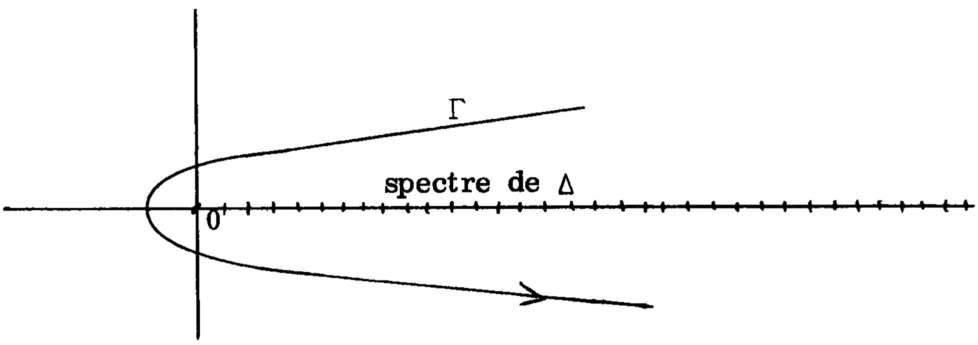
La fonction Z admet un développement asymptotique au voisinage de 0 en puissance de t,

$$Z(t) \underset{t>0^+}{=} (4\pi t)^{-n/2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i .$$

On se propose de décrire le calcul de a_0. Rappelons que :

$$e^{-t\Delta} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{-t\lambda} (\Delta - \lambda)^{-1} d\lambda \quad \text{(voir [SY])},$$

où Γ est le contour de $\mathbb{C}$ décrit comme suit :



Supposons alors fixé une <u>quantification</u>, c'est-à-dire une application de l'espace des symboles dans celui des opérateurs,

$$\mathcal{O}_p : S \longrightarrow \text{Opérateurs}.$$

Rappelons que :

$S^m = \{p$ fonctions sur T^*X vérifiant

$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-\beta}$

pour tout multi-indices α, β où $C_{\alpha\beta}$ est une constante $> 0\}$.

Dans le cadre classique,

$$(\Delta-\lambda)^{-1} = \mathcal{O}_p[(|\xi|^2-\lambda)^{-1}] + \text{opérateur d'ordre } -3$$

alors

$$e^{-t\Delta} = \int e^{-t\lambda}\,\mathcal{O}_p[(|\xi|^2-\lambda)^{-1}]\,d\lambda + \text{reste}$$

$$e^{-t\Delta} = \mathcal{O}_p\Big[\int_\Gamma e^{-\lambda t}(|\xi|^2-\lambda)^{-1}d\lambda\Big] + \text{reste}$$

d'où :

$$e^{-t\Delta} = \mathcal{O}_p\left(e^{-t|\xi|^2}\right) + \text{reste}$$

et $\quad \operatorname{tr}(e^{-t\Delta}) = \operatorname{tr}\left(\mathcal{O}_p\left(e^{-t|\xi|^2}\right)\right) + \text{reste}$

lorsque $e^{-t\Delta}$ est un opérateur à trace, ce qui est le cas sur une variété riemannienne compacte (mais pas dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, par exemple).

On peut, par exemple, comme dans [GR], prendre

$$[(\mathcal{O}_p(P))f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T_xX\times T_x^*X} e^{-i\langle v,\xi\rangle}\,p(x,\xi)f_x(v)\,dv\,d\xi$$

où $f_x(v) = f(\exp_x v)$, f est une fonction sur X (compacte).

Le noyau de l'opérateur $\mathcal{O}_p(P)$, lorsque ceci à un sens est

$$[\mathcal{O}_p(P)](x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T_x^*X} e^{-i\langle v_y,\xi\rangle}P(x,\xi)\,d\xi$$

où $v_y = \exp_x^{-1}(y)$ pour y proche de x . Alors :

$$\operatorname{tr}(\mathcal{O}_p(P)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_X\int_{T_x^*X} p(x,\xi)\,d\xi\,dx \quad \text{(lorsqu'elle existe)}$$

d'où,

$$\operatorname{tr}(e^{-t\Delta}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_X\int_{T_x^*X} e^{-t|\xi|^2}\,d\xi\,dx + \text{reste}.$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_X\int_{T_x^*X} e^{-t|\xi|^2}\,d\xi\,dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\operatorname{Vol}(X) .$$

On a donc déterminer a_0 .

Remarque.

Le calcul a été décrit de manière heuristique. Un élément important a été omis, il s'agit de l'estimation du reste qui justifie l'équivalent asymptotique. Ce travail plus fin donne son sens au calcul symbolique. Le lecteur peut se reporter aux ouvrages classiques [GY], [TR], [SY].

B - Le calcul symbolique utilisé par E. Getzler.

Dans la situation précise de l'opérateur de Dirac sur une variété spinorielle, un choix judicieux de l'opération "symbole" (mieux adapté aux structures géométriques) permet de mettre en place un calcul symbolique plus efficace.

On vient de voir (§ A) que le calcul classique donne rapidement le premier terme du développement asymptotique de l'expression $\mathrm{tr}(e^{-t\Delta})$. Or, l'égalité :

$$\mathrm{ind}(\not{D}_+) = \mathrm{str}\left(e^{-t\not{D}^2}\right) = \mathrm{tr}\left(e^{-t\not{D}_+^2}\right) - \mathrm{tr}\left(e^{-t\not{D}_-^2}\right)$$

montre que le terme significatif dans le développement de $\mathrm{tr}\left(e^{-t\not{D}_+^2}\right)$ est le terme constant (tous les autres s'éliminant), c'est-à-dire le $n/2$-ième terme (rappelons que n est pair).

Il s'agit donc de faire apparaître ce terme comme le premier d'un développement.

I. L'idée.

Un symbole $p(x,\xi)$ est, pour chaque valeur de $(x,\xi) \in T^*X$, un endomorphisme de la fibre en x, c'est-à-dire un élément de l'algèbre de Clifford $C(T_xX)$.

Son degré au sens classique, s'il est homogène par exemple, est le degré de $p(x,\xi)$ en ξ (c'est un polynôme homogène). D'une certaine manière, ce degré ne tient compte que de la base X .

Or, dans les généralités, nous avons montré que $C(V)$ (reprenant les notations de ce chapitre) est une algèbre dont l'algèbre tangente est $\Lambda(V)$. Plus précisément, il existe une application σ (que nous avons appelée symbole !), qui est un isomorphisme d'espace vectoriel de $C(V)$ sur $\Lambda(V)$.

La construction de $C(V)$ nécessite une structure euclidienne sur V , il est alors clair que si on multiplie le produit scalaire par ε et si on fait tendre ε vers 0 , σ tend à être un isomorphisme d'algèbre. De plus, de la graduation de $\Lambda(V)$, $C(V)$ hérite par σ d'une filtration. Pour un endomorphisme de $S(V)$, donc un élément de $C(V)$, il existe une notion de degré liée à cette filtration.

L'idée de E. Getzler est d'utiliser celle-ci et de définir le degré d'un symbole $p(x,\xi)$ comme étant la somme de son degré polynomiale en ξ et de son degré comme endomorphisme de $S(T_x V)$. Il introduit ainsi la géométrie du fibré des spineurs dans le calcul symbolique.

II. Les conséquences.

On définit donc le symbole principal comme étant le terme de plus haut degré. Rappelons les formules de quantification θ et de symbole σ .

1) Si p est un symbole, on définit l'opérateur

$$(\theta p)(u)[x] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_x X \times T_x^* X} e^{-i\langle v,\xi\rangle} p(x,\xi) u_x(v)\, dv\, d\xi$$

où u est une section d'un fibré sur X , $x \in X$, et u_x est la section définie par

$$u_x(v) = \tau(\exp_x(v), x)[u(\exp_x(v))]$$

où $\tau(z,t)$ est le transport parallèle de z à t le long de la géodésique $\exp_y(sv)$, avec $z = \exp_x(v)$.

2) Si P est un opérateur

$$[\sigma P(x,\xi)](u) = P_y\left[e^{i\langle \exp_x^{-1}(y),\xi\rangle}\tau(x,y)(u)\right]_{|y=x}$$

(remarquons que l'expression de droite n'a besoin d'être définie que pour y proche de x).

Donnons quelques exemples simples de symbole. Dans la suite, le fibré considéré sera $F = S(TX)\otimes E$ où E est un fibré auxiliaire (hermitien, connecté).

1) Si Y est un champ de vecteurs sur X et ∇ la dérivation covariante sur F , alors :

$$\sigma(\nabla_Y)(x,\xi) = (i Y_x \lrcorner \xi)\mathrm{id}_{F_x}$$

(où $\lrcorner$ est le produit intérieur).

2) De même

$$\sigma(\nabla_Y\circ\nabla_Z)(x,\xi) = -[(Y_x \lrcorner \xi)(Z_x \lrcorner \xi)]\mathrm{id}_{F_x} + \frac{1}{4}R_x(Y,Z)$$
$$+ \dots + (i\nabla_{Y_x} Z \lrcorner \xi)\mathrm{id}_{F_x} + \frac{1}{2}B_x(Y,Z) ,$$

où R est le tenseur de courbure de X vu comme endomorphisme de $\Lambda^2(X) \hookrightarrow C(T_xX) \simeq \mathrm{End}(S(TX))$ et B est la courbure de la connexion de E ; ($B_x(Y,Z)$ est un endomorphisme de E_x).

3) Supposons pour simplifier que $X = \mathbb{R}^2$, alors l'équation de Dirac $D\!\!\!/$ est simplement

$$D\!\!\!/ = e_1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}$$ (x_1,x_2) coordonnées dans $\mathbb{R}^2$,

alors :

$$\sigma(D\!\!\!/)(x,\xi) = \underbrace{\xi_1}_{\text{degré } 1}\otimes \underbrace{dx_1}_{\text{degré } 1} + \xi_2\otimes dx_2$$

d'où $\text{degré}[\sigma(D\!\!\!/)] = 2$. Par ailleurs,

$$D\!\!\!/^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$$

et donc :

$\sigma(\not{D}^2)(x,\xi) = -|\xi|^2$ est de degré 2 .

L'opérateur de Dirac est donc un opérateur d'ordre 2 dont le carré est également d'ordre 2 !

4) Dans le cas général, un calcul élémentaire conduit à

$$\sigma(\not{D}^2) = \underbrace{-|\xi|^2 + \frac{1}{2}B}_{\substack{\text{symbole principal}\\ \text{ordre } 2}} + \underset{\substack{\text{courbure scalaire de } X\\ \text{ordre } 0}}{\underset{\downarrow}{\frac{s}{4}}}$$

III. La formule du produit.

L'originalité de ce calcul symbolique se manifeste dans la formule du symbole du produit de deux opérateurs. En définissant :

$p \circ q = \sigma(\theta_p \circ \theta_q)$ (où p et q sont des symboles homogènes de degré k et ℓ)

$a_0(p,q)$ = terme de plus haut degré de $p \circ q$,

on a la formule

$$a_0(p,q) = e^{-\frac{1}{4}R(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta})}[p(x,\xi)\wedge q(x,\eta)]\,|_{\xi=\eta}$$

$p(x,\xi)$ (resp. $q(x,\xi)$) est un polynôme en ξ à coefficients forme différentielle et à valeurs dans les endomorphismes de E .

$p(x,\xi)\wedge q(x,\eta)$ est le produit extérieur.

R est une 2-forme à valeurs dans les 2-formes différentielles, en substituant aux champs de vecteurs les dérivations $\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}$, $R(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta})$ devient un opérateur différentiel à coefficients 2-formes. L'exponentielle est au sens des opérateurs à coefficients <u>2-formes différentielles</u> (en particulier, elle est de longueur finie), on l'applique alors à $p(x,\xi)\wedge q(x,\eta)$ et le résultat est calculé en $\xi=\eta$.

Il apparaît alors que cette formule est <u>non-commutative.</u>

Cette formule est établie pour des symboles polynomiaux, c'est-à-dire des opérateurs différentiels. Pour le calcul de $\operatorname{str}\left(e^{-t\mathcal{D}_+^2}\right)$ nous avons besoin de l'étendue aux opérateurs pseudo-différentiels (en particulier pour $(\mathcal{D}_+^2 - \lambda)^{-1}$). L'extension se fait par la technique développée dans Widom [WM]. Elle consiste à introduire un paramètre de dilatation du symbole τ , si

$$P = \sum_{j=0}^{n} P_j \otimes \omega_j \quad , \quad P_j \text{ symbole homogène d'ordre } m-j$$

et ω_j j-forme différentielle (P est de degré total m).

On définit :

$$P_x(x,\xi) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x,\tau\xi) \otimes \tau^j \omega_j = \sum_{j=0}^{n} \tau^j P_j(x,\tau\xi) \otimes \omega_j \ .$$

On traite alors les symboles non homogènes comme des séries formelles en τ .

C - La fin de la démonstration.

Comme dans le § A, on va être amené à exprimer la supertrace de $e^{-t\mathcal{D}_+^2}$ comme une intégrale du symbole de cet opérateur. On va en fait utiliser la formule

$$(*) \qquad \operatorname{str}\left(e^{-t\mathcal{D}_+^2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^*M} \operatorname{str}\left(\sigma\left(e^{-t\mathcal{D}_+^2}\right)_\tau(x,\xi)\right) dx\,d\xi$$

pour tout $\tau > 0$.

La supertrace intervenant dans l'intégration est celle d'un endomorphisme de l'espace des spineurs.

Pour la suite, on choisira $\tau = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Il reste donc à calculer : $\sigma\left(e^{-t\mathcal{D}_+^2}\right)(x,\xi)$.

La formule du produit de deux symboles p et q appliquée au cas $p = -|\xi|^2 + \frac{1}{2}B$ devient :

$$(p\circ q)(x,\xi) = \left(-|\xi|^2 + \frac{1}{2}R\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{16}(R\wedge R)\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \ldots + \frac{1}{2}B\right)q(x,\xi)$$

le terme entre parenthèses devant être considéré comme un opérateur appliqué à la fonction $q(x,\xi)$.

Par un calcul algébrique standard, on en déduit le symbole de la résolvante de $\mathcal{D}_+^2$, $\Omega_\lambda(\tau)$

$$\Omega_\lambda(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\left(\sigma R_{\lambda/\tau^2}\right)_{1/\tau}$$

$$R_\mu = (\mathcal{D}^2+\mu)^{-1}$$

et ensuite celui de $e^{-t\mathcal{D}_+^2}$ par la formule

$$\sigma\left(e^{-\tau^2\mathcal{D}^2}\right)_{\frac{1}{\tau}} = (-1)^n n! \int_\Gamma e^{-\lambda}\Omega_\lambda(\tau)^{n+1}d\lambda$$

soit :

$$\sigma\left(e^{-t\mathcal{D}^2}\right)_{\frac{1}{\sqrt{t}}} = e^{-|\xi|^2+\frac{1}{2}R\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{16}R\wedge R\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+B} + O(\sqrt{t}) \ .$$

Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}\mathcal{D}_+ &= \lim_{t\to 0} \operatorname{str}\left(e^{-t\mathcal{D}_+^2}\right)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^*M}\operatorname{str}\left(e^{-|\xi|^2+\frac{1}{2}R\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{16}R\wedge R\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+B}\right)dx\,d\xi \ .\end{aligned}$$

On peut considérer le terme dans l'exponentielle comme le symbole d'un oscillateur harmonique en dimension n et appliquer alors la formule de Mehler [G-J] pour le calcul de ce terme. On trouve alors la formule classique de l'index

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}_+) = \int_M ch(B)\hat{A}(R)$$

$\hat{A}$ étant le $\hat{A}$-genre et ch le caractère de Chern de E exprimé en terme de la courbure B de ce fibre

$$\hat{A}(R) = \det\left[\frac{R/2\pi}{sh(R/2\pi)}\right]$$

$$Ch(B) = tr\left(e^{-\frac{B}{2i\pi}}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[AH] M. ATIYAH, Cours CIME, Differential Operators on Manifolds (1975) Edizioni Cremonese.

[A-B-S] M. ATIYAH, R. BOTT, A. SHAPIRO, Clifford Modules, Topology, Vol. 3, Suppl. 1, pp. 3-38 (1964).

[BE] A. BESSE, La géométrie en dimension 4. Cedic/Fernand Nathan.

[BI] N. BOURBAKI, Séminaire. Exposé n° 617.

[BT] J.M. BISMUT, The Atiyah-Singer Theorems. A Probabilistic approach.
Journal of Functional Analysic, 57, pp. 56-99 (1984).

[BV] N. BERLINE, M. VERGNE, Un calcul de l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac par la méthode de la chaleur.
A paraître.

[D-F-N] DOUBROVINE, FOMENKO, NOVIKOV, Géométrie contemporaine I et II, Editions MIR.

[F-U] D. FREED, K. UHLENBECK, Instantons and Four-Manifold. M.S.R.I. Publication n° 1, Springer.

[G-J] J. GLIMM, A. JAFFE, Quantum physics. New-York/Springer (1981).

[GR] E. GETZLER, Pseudo-differential operators on Super-Manifolds and the Atiyah-Singer Index Theorem.
Commun. Math. Phys. 92, pp. 179-194 (1983).

[GY] P. GILKEY, The Index Theorem and the Heat Equation.
Mathematics Lecture Series n°4, Publish or Perish, Inc. (1974).

[HR] J. HELMSTETTER, Algèbres de Clifford et Algèbres de Weyl.
Cahiers Mathématiques, Montpellier n° 25 (1982).

[L. L.] LANDAU, LIFSCHITZ, Mécanique quantique. Editions MIR.

[SY] SEELEY, Cours CIME. Pseudo-differential Operators. (1968) Edizioni Cremonese.

[TR] M. TAYLOR, Pseudo Differential Operators, Lecture Notes in Mathematics, n°416, Springer.

[WM] H. WIDOM, A complete symbolic calculus for pseudo-differential operators. Bull. Soc. Math. 104, pp. 19-63 (1980).
