

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

JEAN BROSSARD

## Effets de bord pour un tambour à bord fractal

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 3 (1984-1985), exp. n° 10, p. 1-14

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1984-1985\\_\\_3\\_\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A10_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1984-1985

## EFFETS DE BORD POUR UN TAMBOUR A BORD FRACTAL

par Jean BROSSARD

Le tambour de ce titre fait écho à celui de M. Kac ("Can one hear the shape of a drum ?" [8]). La question qu'on va examiner ici est : peut-on entendre la dimension du bord ? (au sens dimension de Hausdorff par exemple). Notre tambour est constitué d'une membrane vibrante (dont la partie libre est un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^{\nu}$ ), solidement fixée au bord  $(\partial\Omega)$  sur le cadre du tambour. Une excellente oreille entendra (toutes !) les fréquences propres du tambour, qui grâce à un choix judicieux d'unités ou de tension de la membrane sont les valeurs propres  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$  de  $-\frac{1}{2}\Delta$  (où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  désigne le laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$ ). Un fameux théorème de Weyl nous dit qu'une excellente oreille peut au moins entendre la surface de la membrane (qu'on notera  $\text{vol}(\Omega)$ ) car

$$\text{vol}(\Omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi)^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right) \frac{n}{\lambda_n^{\nu/2}} .$$

Ce théorème est en général formulé à l'aide de la fonction de comptage :  $N(\lambda)$  = nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$ . Il s'écrit alors :

$$N(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)(2\pi)^{\nu/2}} \text{vol}(\Omega) \lambda^{\nu/2} .$$

Une troisième formulation utilise la fonction de partition :  $Z(t) = \sum e^{-\lambda_n t}$ .

Elle s'écrit :

$$Z(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (2\pi)^{-\nu/2} \text{vol}(\Omega) t^{-\nu/2} .$$

## X.2

Comme  $Z(t)$  est la transformée de Laplace de la mesure  $dN$ , l'équivalence de cette formulation aux deux autres est une conséquence du théorème de Karamata.

Venons-en aux effets de bord : l'ordre de grandeur du deuxième terme du développement de  $N(\lambda)$  est très lié au bord. Plus précisément, Weyl a conjecturé que pour des ouverts "réguliers" :

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)(2\pi)^{\nu/2}} \text{vol}_{\nu}(\Omega)\lambda^{\nu/2} - \frac{1}{8(2\pi)^{(\nu-1)/2}\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \text{vol}_{\nu-1}(\partial\Omega)\lambda^{(\nu-1)/2}.$$

Cette conjecture a fait couler beaucoup d'encre (cf. entre autres [9], [7], [10], [2] ...) et donné lieu à des contre-exemples sur des variétés ([2], [6]). Dernièrement, Petkov [11] a montré que cette conjecture était génériquement juste pour des domaines  $C^{\infty}$ . La principale difficulté est non pas le calcul de la constante, mais l'existence du deuxième terme.

Motivé par des questions de physique auxquelles je ne comprends pas grand chose, Berry [3] et [4] a étendu cette conjecture au cas d'un domaine à bord fractal et a conjecturé que

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)} \text{vol}_{\nu}(\Omega)\lambda^{\nu/2} - c_d \text{vol}_d(\partial\Omega)\lambda^{d/2}$$

où  $\text{vol}_d(\partial\Omega)$  désigne la  $d$ -mesure de Hausdorff de  $\partial\Omega$  et  $c_d$  une constante ne dépendant que de  $d$ .

Cette conjecture, si elle était juste aurait immédiatement comme conséquence :

$$Z(t) \sim \text{vol}_{\nu}(\Omega)(2\pi t)^{-\nu/2} - c'_d \text{vol}_d(\partial\Omega) t^{-d/2}.$$

(Noter qu'on ne peut cependant pas "remonter" du développement de  $Z(t)$  à celui de  $N(\lambda)$ , ce qui donne tout son sel à la conjecture de Weyl).

Le but de cet exposé est d'examiner la conjecture de Berry sous sa forme affaiblie (développement de  $Z(t)$ ). Plus précisément :

- On montrera par des exemples que ce n'est pas la dimension de Hausdorff qui intervient en général dans le deuxième terme du développement de  $Z(t)$  (ou  $N(\lambda)$ ) .

- On montrera que ce deuxième terme est de l'ordre de  $t^{-d/2}$  où  $d$  est la dimension de Minkowsky de  $\partial\Omega$  (pour des frontières pas trop ignobles quand même).

Cette approche du problème est le fruit d'un travail commun avec R. Carmona lors de mon séjour à Irvine au printemps 84. Elle est exposée en détail dans [5] .

## I. - QUELQUES EXEMPLES.

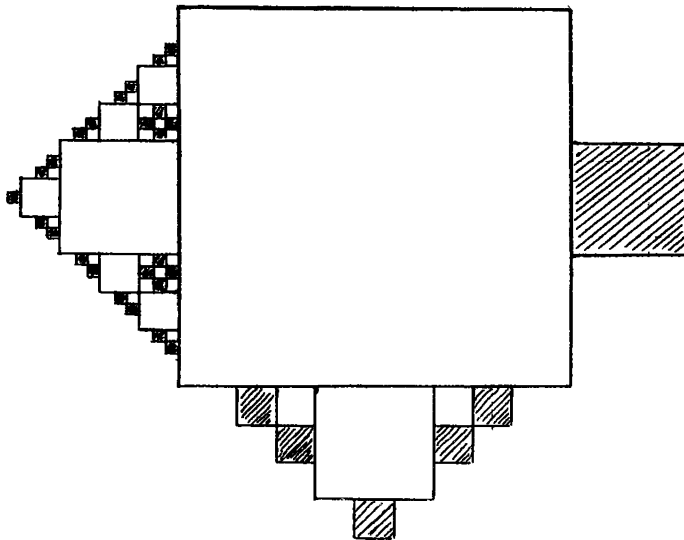
1 - Premier exemple. Si l'on prend pour  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière a une mesure (plane) strictement positive, la conjecture de Berry ne peut pas être juste pour cet ouvert car cela contredirait le théorème de Weyl ! Il faudra donc trouver une façon de mesurer la frontière qui donne toujours à la frontière une dimension inférieure à celle de l'ouvert (contrairement à la mesure de Hausdorff).

### 2 - Un exemple plus sérieux : Fractal régulier.

$\Omega$  est une réunion de carrés ouverts regroupés en plusieurs génération (cf. croquis).

$$\begin{aligned} G_0 &: 1 \text{ grand carré de côté } 1 \\ G_1 &: 4 \text{ carrés de côté } 1/3 \\ &\vdots \\ G_n &: 4 \times 5^{n-1} \text{ carrés de côté } 1/3^n . \end{aligned}$$

X.4



Au nord, seule  $G_0$  est visible.

A l'est, seules  $G_0$  et  $G_1$  sont visibles.

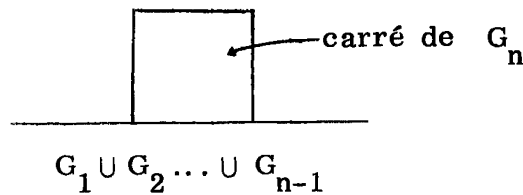
Au sud,  $G_0, G_1, G_2$ .

A l'ouest,  $G_0, G_1, G_2, G_3$ .

Sont hachurés les carrés de :  
de :

- $G_1$  à l'est,
- $G_2$  au sud,
- $G_3$  à l'ouest.

Les carrés de la génération  $G_n$  "poussent" sur les parties libres de la frontière de  $G_0 \cap G_1 \dots \cup G_{n-1}$  comme indiqué sur le dessin ci-dessous :



Le fractal ainsi construit est régulier. Il fera le désespoir des marchands de microscope car quel que soit le grossissement choisi, la frontière aura toujours même allure.

Pour un tel fractal, la dimension de Hausdorff est  $d = \text{Log } 5 / \text{Log } 3$  et l'on peut voir sans trop de peine que  $N(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \text{vol}(\Omega) \cdot \lambda$  est de l'ordre de  $\lambda^{d/2}$ . Cet exemple conforte donc la conjecture de Berry.

3 - Fractal irrégulier. Rajoutons de la frontière dans l'exemple précédent en divisant chaque carré de  $G_n$  en  $[a^n]^2$  (partie entière de  $a^n = [a^n]$ ) carrés égaux ( $a > 1$ ). Monsieur Hausdorff n'y verra que du feu (cf. [5]) et nous proposera toujours  $d : \text{Log } 5 / \text{Log } 3$  comme dimension. Le fabricant de microscope par contre sera content car plus le grossissement est important, plus la frontière paraît noire. Quant à nous, nous serons aussi satisfaits car en calculant un peu, on trouve que

$N(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \text{vol}(\Omega)\lambda$  est de l'ordre de  $\lambda^{\delta/2}$  avec  $\delta = \text{Log } 5a^2 / \text{Log } 3a$ .

Ceci fournit donc une famille d'exemples  $\Omega_a$  pour lesquels :

- La dimension de Hausdorff de  $\partial\Omega_a$  est toujours  $d : \text{Log } 5 / \text{Log } 3$ .
- La dimension donnée par l'ordre de grandeur du deuxième terme de  $N(\lambda)$  est suivant la valeur  $a$  n'importe quel nombre entre  $d$  et  $2$ .

## II. - DIMENSION DE MINKOWSKY, ET DEUXIEME TERME DU DEVELOPPEMENT DE $Z(t)$ .

1 - Dimension de Minkowsky. La façon de mesurer la frontière la plus adaptée à notre problème est de regarder l'équivalent quand  $\epsilon$  tend vers  $0$  de la couronne  $\{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$ . Plus précisément, si  $d \in ]\nu-1, \nu[$ , on note

$$d-m_*(\partial D) = \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\nu+d} m\{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$$

et

$$d-m^*(\partial D) = \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\nu+d} m\{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$$

(dans les membres de droite,  $m$  désigne la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^\nu$ ).

Si  $d-m_*(\partial D) > 0$  et  $d-m^*(\partial D) < +\infty$ , on dira que  $\partial D$  a pour dimension de Minkowsky  $d$ . Le but de cet exposé est de montrer que c'est cette dimension qui intervient dans l'exposant du deuxième terme du développement de  $Z(t)$ .

2 - Les résultats. Soit  $d$  fixé dans  $]\nu-1, \nu[$ .

**THEOREME 1.** Il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^\nu$ , et tout  $t$  assez grand

$$Z(t) \geq (2\pi t)^{-\nu/2} \text{vol}(\Omega) - c d-m^*(\partial D)t^{-d/2}.$$

**THEOREME 2.** Si la frontière de  $\Omega$  est à densité capacitaire minorée (voir déf. ci-dessous), il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $t$  assez grand

$$Z(t) \leq (2\pi t)^{-\nu/2} \text{vol}(\Omega) - C d\text{-m}_*(\partial D) t^{-d/2} .$$

Le fait que ce théorème nécessite une hypothèse n'est pas étonnant : si l'on prive un ouvert d'une suite de points s'accumulant au bord, on ne change pas le problème vu du côté laplacien. Par contre, la dimension de Minkowsky peut changer du tout au tout. On dira que la frontière a une densité capacitaire minorée, si pour tout  $\vartheta \in \partial D$  et toute boule  $B$  centrée en  $\vartheta$  de rayon inférieur à 1,  $\text{cap}(B \cap \partial \Omega) / \text{cap}(B) \geq c_0$  où  $c_0$  est une constante et  $\text{cap}(\cdot)$  désigne la capacité Newtonienne (ou logarithmique si  $\nu = 2$ ). Cette hypothèse est très générale et se vérifie facilement sur des exemples particuliers.

On peut aussi se demander à la vue des théorèmes 1 et 2 si les constantes  $c$  et  $C$  peuvent être prises arbitrairement proches l'une de l'autre. Je ne sais pas répondre à cette question sauf dans le cas probablement bien connu où  $\partial \Omega$  est de classe  $C^1$ , qui peut se déduire d'estimations "browniennes" tout à fait dans l'esprit de celles qu'on va utiliser pour les Théorèmes 1 et 2. Citons donc pour mémoire :

**THEOREME 3.** Si  $\partial \Omega$  est de classe  $C_1$ ,

$$Z(t) = (2\pi t)^{-\nu/2} \text{vol}(\Omega) - \frac{1}{8} (2\pi t)^{-(\nu-1)/2} \text{vol}(\partial \Omega) + \mathcal{O}(t^{-(\nu-1)/2}) .$$

3 - Mouvement brownien et laplacien. L'utilisation du mouvement brownien pour ce genre de problèmes est commode car la formule de Feynman-Kac fournit une expression "explicite" du noyau de  $e^{t\Delta}$  (on la trouvera d'autant plus explicite qu'on est plus familiarisé avec le mouvement brownien et pour cela on pourra lire quelques passages de [13] . On notera

- $X_t$  la position du mouvement brownien à l'instant  $t$ .  
(si  $\omega \in C(\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^V)$ ,  $X_t(\omega) = \omega(t)$ ).
- $P^X$  désignera la probabilité du mouvement brownien issu de  $X$ .
- $P^{X, Y, t}$  désignera la probabilité du mouvement brownien issu de  $X$ , conditionné par sa position en  $Y$  à l'instant  $t$ .  
("P<sup>X, Y, t</sup>[.] = P<sup>X</sup>[. | X<sub>t</sub> = Y] = P<sup>X</sup>[. et X<sub>t</sub> ∈ d<sub>Y</sub>] / P<sup>X</sup>[X<sub>t</sub> ∈ d<sub>Y</sub>] ")

A titre d'exercice, on vérifiera que si  $F$  est une v.a. ne dépendant que du passé de  $t/2$ ,

$$P^{X, Y, t}[F] = P^X \left[ F \cdot e^{-|X_{t/2} - Y|^2/t} / (\pi t)^{V/2} \right] / \frac{e^{-|X-Y|^2/2t}}{(2\pi t)^{V/2}}.$$

En particulier si  $X = Y$  :

$$P^{X, X, t}[F] = 2^{V/2} P^X \left[ F \cdot e^{-|X_{t/2} - X|^2/t} \right].$$

La formule fondamentale liant la laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$  et le mouvement brownien est (cf. [13]) :

$$(F.K.) \quad e^{\frac{1}{2}t\Delta}(X, Y) = \frac{e^{-|X-Y|^2/2t}}{(2\pi t)^{V/2}} P^{X, Y, t} [\text{rester dans } \Omega].$$

({rester dans  $\Omega$ } désigne l'événement  $\{\forall s \leq t, X_s \in \Omega\}$ ; ce n'est pas plus vite écrit, mais c'est plus parlant).

Le deuxième terme du développement de  $Z(t)$  est donc au signe près :

$$W(t) = (2\pi t)^{-V/2} \int_{\Omega} P^{X, Y, t} [\text{sortir de } \Omega].$$

#### 4 - Les estimations browniennes et la démonstration des théorèmes.

Moyennant ce qu'on vient de voir, les théorèmes 1, 2, 3 seront les conséquences des trois estimations browniennes suivantes qui seront montrées dans la partie III.



X.8

ESTIMATION 1 (facile).

Pour tout  $\alpha < 2$ , il existe  $c_\alpha$  telle que pour tout  $t$

$$P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega] \leq c_\alpha e^{-\alpha d(X)^2/t}$$

où  $d(X) = d(X, \partial\Omega)$ .

ESTIMATION 2 (Théorème).

Si  $\partial\Omega$  est à densité capacitaire minorée, il existe  $C$ ,  $C > 0$  telles que

$$P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega] \geq C \text{ dès que } Ct \geq d(X)^2.$$

ESTIMATION 3.

Si  $\partial\Omega$  est  $C^1$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta$  tel que, pour tout  $X$  vérifiant  $d(X) \leq \eta$ :

$$(1-\epsilon) \exp[-2(1+\epsilon)^2 d(X)^2/t] \leq P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega] \leq (1+\epsilon) \exp[-2(1-\epsilon)^2 d(X)^2/t]$$

Démonstration des théorèmes 1 et 3 à partir des estimations

1 et 3 : D'après l'estimation 1

$$\begin{aligned} (2\pi t)^{\nu/2} W(t) &\leq C_\alpha \int_\Omega e^{-\alpha d(X)^2/t} dX \\ &= C_\alpha \int_0^\infty e^{-u} m\{X \in \Omega \mid d(X) \leq \sqrt{\frac{ut}{\alpha}}\} du \\ &= C_\alpha \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{(\nu-d)/2} \int_0^\infty u^{(\nu-d)/2} e^{-u} \sqrt{\frac{ut}{\alpha}}^{-(\nu+d)} \\ &\quad m\{X \in \Omega \mid d(X) \leq \sqrt{\frac{ut}{\alpha}}\} du. \end{aligned}$$

On conclut facilement au théorème 1 en utilisant le lemme de Fatou (dominé, pour prendre les  $\overline{\lim}$ ).

Le théorème 3 se démontre de la même façon à partir des estimations 3.

Démonstration du théorème 2 à partir de l'estimation 2 :

$$\begin{aligned} W(t) &\geq (2\pi t)^{-\nu/2} \int_{\{X | d(X) \leq \sqrt{Ct}\}} P^{X, X, t} [\text{sortir de } \Omega] dX \\ &= (2\pi t)^{-\nu/2} C m\{X | d(X) \leq \sqrt{Ct}\} . \end{aligned}$$

D'où le résultat.

### III. - DEMONSTRATIONS DES ESTIMATIONS BROWNIENNES.

1 - Estimations 1 et 3 . L'estimation 1 est très facile :  $P^{X, X, t}$  [ sortir de  $\Omega$  ] est majoré par la probabilité de sortir de la boule de centre  $X$  et de rayon  $d(X)$  . Par un argument de changement d'échelle

$$P^{X, X, t} [\text{sortir de } B_{X, d(X)}] = P^{0, 0, t/d(X)^2} [\text{sortir de } B_{0, 1}] .$$

Le résultat est alors une conséquence d'un théorème style "grandes déviations" (cf. [1] p.61) qui dit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log P^{0, 0, t} [\text{sortir de } B_{0, 1}] = -2$$

(on peut donner des arguments bien plus élémentaires en incluant dans  $B_{0, 1}$  une intersection de demi-espaces contenant  $B_{0, 1-\epsilon}$ ) .

Les estimations 3 sont un peu moins faciles et je n'en donnerai pas ici de démonstrations complètes mais seulement quelques indications :

• Majoration de  $P^{X, X, t}$  [sortir de  $\Omega$ ] : Soit  $C$  une constante très grande (fixée plus tard) et  $T(X)$  un cube contenant  $X$  limité par des hyperplans  $P_1, P_2, \dots, P_{2\nu}$  situés à distance  $(1-\epsilon)d(X), Cd(X), \dots, Cd(X)$  de  $X$  . Si  $X$  est assez près du bord, comme  $\partial\Omega$  est  $C^1$  , on pourra toujours inclure un tel cube dans  $\Omega$  . La probabilité de sortir de  $\Omega$  est majorée par la somme des probabilités de rencontrer les  $P_i$  . La

X.10

probabilité de rencontrer  $P_i$  est connue et vaut  $e^{-2d(X, P_i)^2/t}$  (Principe de symétrie d'André, ou formule (F.K.) II-3) . D'où :

$$P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega] \leq e^{-2(1-\epsilon)^2 d(X)^2/t} + (2\nu-1)e^{-2C^2 d(X)^2/t} .$$

On en déduit le résultat en choisissant correctement  $C$  et en remarquant que l'inégalité à démontrer est triviale quand  $d^2(X)/t$  n'est pas assez grand.

• Minoration de  $P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega]$  : Soit  $X$  fixé et  $Y$  tel que  $|X-Y| = d(X, \partial\Omega)$  . Supposons pour fixer les idées que  $Y = (0, \dots, 0)$  et  $X = (d(X), 0, \dots, 0)$  . Comme  $\partial\Omega$  est  $C^1$  , si  $X$  est assez près du bord, le "carré"  $J_{X, C} = \{-\epsilon d(X)\} \times [-C d(X), C d(X)]^{\nu-1}$  est entièrement inclus dans  $\Omega^C$  . La probabilité de sortir de  $\Omega$  est donc minorée par celle de rencontrer  $J_X$  . La minoration est donc une conséquence du lemme non démontré ici (cf. [5]).

LEMME. Si  $C$  est assez grand, pour tout  $t$  , la probabilité de rencontrer  $J_{X, C}$  si l'on rencontre l'hyperplan  $J_{X, \infty}$  est supérieure à  $1-\epsilon$  .

(Autrement dit :

$$\begin{aligned} P^{X, X, t}[\text{rencontrer } J_{X, C}] &\geq (1-\epsilon) P^{X, X, t}[\text{rencontrer } J_{X, \infty}] \\ &= (1-\epsilon)e^{-2(1+\epsilon)^2 d(X)^2/t} . \end{aligned}$$

2 - Mouvement brownien et capacité : rappels (cf. [12]) . Pour plus de simplicité on se borne ici au cas  $\nu \geq 3$  (le cas  $\nu = 2$  est traité dans [5]) . Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^\nu$  , la fonction  $x \rightarrow P^x[\text{rencontrer } K]$  est le potentiel capacitaire de  $K$  . C'est le potentiel de la mesure d'équilibre de  $K$  ,  $\mu_K$  et s'écrit donc :

$$P^X[\text{rencontrer } K] = \int \frac{C_\nu}{|X-Y|^{\nu-2}} \mu_K(dY)$$

$\mu_K$  est portée par  $K$  et sa masse totale est la capacité de  $K$  . L'hypo-

thèse de densité capacitaire minorée implique l'existence d'une constante  $C_0$  telle que pour tout  $X$ ,

$$(H') \quad P^X[\text{rencontrer } (\partial D) \cap B_{X, 2d(X)}] \geq C_0$$

(noter qu'il s'agit de  $\underline{P}^X$  et non  $\underline{P}^{X, X, t}$ ). En effet :

$$\begin{aligned} P^X[\text{rencontrer } \partial D \cap B_{X, 2d(X)}] &= \int \frac{C_\nu}{|X-Y|^{\nu-2}} \mu_{\partial D \cap B_{X, 2d(X)}}(dY) \\ &\geq \frac{C_\nu}{[2d(X)]^{\nu-2}} \text{cap}(\partial D \cap B_{X, 2d(X)}) . \end{aligned}$$

D'où facilement  $H'$ . La difficulté consiste maintenant à passer de  $P^X$  à  $\underline{P}^{X, X, t}$  (chose qu'on ne peut espérer pouvoir faire que si  $t$  est assez grand, de telle sorte que le conditionnement n'agisse pas beaucoup).

3 - Démonstration de l'estimation 2. On va la faire en deux étapes :

LEMME étape 1. Il existe deux constantes  $c_1$  et  $C$  telles que

$$P^X[\text{rencontrer } \partial D \cap B_{X, 2d(X)} \text{ avant l'instant } \frac{t}{2}] \geq c_1$$

pour tous  $X$  et  $t$  tels que  $\sqrt{t} \geq C d(X)$ .

Démonstration. Notons  $A_X = \partial D \cap B_{X, 2d(X)}$

• Soit  $\tau$  le temps de sortie de  $B_{X, 6d(X)}$ . Montrons d'abord que  $P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \tau] \geq \frac{1}{2} C_0$  :

$$\begin{aligned} &P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \tau] \\ &\geq P^X[\text{rencontrer } A_X] - P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ après } \tau] \\ &\geq P^X[\text{rencontrer } A_X] - P^X[P^{X, \tau}[\text{rencontrer } A_X]] \quad (\text{Markov}). \end{aligned}$$

Mais si l'on remarque que pour  $Y (= X_\tau) \in \partial B_{X, 6d(X)}$  :

$$\begin{aligned}
P^Y[\text{rencontrer } A_X] &= \int \frac{C_\nu}{|Y-Z|^{\nu-2}} \mu_{A_X}(dZ) \\
&\leq \frac{1}{2} \int \frac{C_\nu}{|X-Z|^{\nu-2}} \mu_{A_X}(dZ) \\
&= \frac{1}{2} P^X[\text{rencontrer } A_X] .
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \tau] &\geq \frac{1}{2} P^X[\text{rencontrer } A_X] \\
&\geq \frac{1}{2} C_0 \text{ (d'après H')} .
\end{aligned}$$

• Choisissons maintenant  $C$  tel que

$$P^X[\tau \geq \frac{t}{2}] \leq \frac{1}{4} C_0 \text{ dès que } \sqrt{t} \geq C d(X)$$

( $C$  ne dépend pas de  $X$  par un argument de "changement d'échelle").

Comme bien évidemment :

$$P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \frac{t}{2}] \geq P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \tau] - P^X[\tau \geq \frac{t}{2}]$$

l'inégalité du lemme découle de l'estimation du premier point et du choix de  $C$ , si l'on prend  $c_1 = \frac{1}{4} c_0$ .

Etape 2. Il s'agit maintenant de passer à  $P^{X, X, t}$ ,  $t$  ayant été fixé assez grand. D'après la formule liant  $P^{X, X, t}$  et  $P^X$  rappelée en II-3, le conditionnement n'agira "pas trop" si  $X_{t/2}$  n'est pas trop loin de  $X$ . Introduisons donc  $R > 0$ ; alors (en notant toujours  $A_X = \partial D \cap B_{X, 2d(X)}$ )

$$\begin{aligned}
P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega] &\geq P^{X, X, t}[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \frac{t}{2}; |X - X_{\frac{t}{2}}| \leq R] \\
&\quad - P^{X, X, t}[\tau \geq \frac{t}{2}; |X - X_{\frac{t}{2}}| \leq R] \\
&= 2^{\nu/2} P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \frac{t}{2}; |X - X_{\frac{t}{2}}| \leq R; e^{-\frac{|X - X_{\frac{t}{2}}|^2}{2t}}]
\end{aligned}$$

(Formule rappelée en II-3).

$$\geq 2^{\nu/2} e^{-R^2/t} P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \frac{t}{2}; |X - X_{\frac{t}{2}}| \leq R] .$$

Choisissons maintenant  $R = \alpha\sqrt{t}$  tel que

$$P^X[|X - X_{\frac{t}{2}}| \geq \alpha\sqrt{t}] = P^0[|X_{\frac{1}{2}}| \geq \alpha] \leq \frac{c_1}{2}$$

(où  $c_1$  est la constante du lemme étape 1). Alors

$$\begin{aligned} P^{X, X, t}[\text{sortir de } \Omega] &\geq 2^{\nu/2} e^{-\alpha^2} (P^X[\text{rencontrer } A_X \text{ avant } \frac{t}{2}] \\ &\quad - P^X[|X - X_{\frac{t}{2}}| \leq R]) \\ &\geq 2^{\nu/2} e^{-\alpha^2} \frac{c_1}{2} . \end{aligned}$$

Ceci est le résultat cherché et achève donc la démonstration.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AZENCOTT R. "Grandes déviations et applications". Ecole d'été de Probabilités de Saint Flour VIII (1978). Lecture note in Mathematics 774. Springer-Verlag.
- [2] BERARD P. (1983), Remarques sur la conjecture de Weyl. Compos. Math. 48, 35-53.
- [3] BERRY M. (1979), "Distribution of modes in fractal resonators". Structural stability in Physics. Ed. W. Güttinger and H. Eikemeier. Springer Verlag, 51-53.
- [4] BERRY M. (1980), "Some geometrical aspects of wave motion : wavefront, dislocations, diffraction catastrophes, diffractals". Geometry of the Laplace Operator. Proc. Symp. Pure Math. vol. 36, 13-38, Amer. Math. Soc. Providence.
- [5] BROSSARD J., CARMONA R. (1985), "Can one hear the dimension of a fractal ?" Preprint.
- [6] GROMES D. (1966), "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte des Laplace Operators für Gebiete auf der Kugeloberfläche". Math. Z. 94, 110-121.
- [7] IVRII V. (1980), "Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary". Funct. Anal. Appl. 14, 98-106.
- [8] KAC M. (1966), "Can one hear the shape of a drum ?". Amer. Math. Monthly 73, 1-23.

- [9] KUZNETSOV (1966), "Asymptotic distribution of the eigenfrequencies of a plane membrane in the case when the variables can be separated". *Diff. Equat.* 2, 715-723.
- [10] MELROSE R. (1980), "Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary". *Geometry of the Laplace Operator, Proc. Symp. Pure Math.* vol.36, 254-274, Amer. Math. Soc. Providence.
- [11] PETKOV V. (1985), "Propriétés génériques des rayons réfléchissants et applications aux problèmes spectraux". Exposé XII (26.2.85). Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer. Ecole Polytechnique.
- [12] PORT S. and STONE C. (1978), "Brownien motion and classical potential theory". Academic Press, New-York.
- [13] SIMON B. (1979), *Functional integration and quantum Physics.* Academic Press, New York.