

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LIANE VALÈRE

## **Calcul du tenseur de Ricci d'une $K3$ particulière plongée dans $\mathbb{C}P^3$ pour la métrique induite par la métrique canonique**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 2 (1983-1984), exp. n° 9, p. 1-23

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1983-1984\\_\\_2\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A9_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1983-1984

## CALCUL DU TENSEUR DE RICCI D'UNE K3 PARTICULIERE PLONGEE DANS $\mathbb{C}P^3$ POUR LA METRIQUE INDUITE PAR LA METRIQUE CANONIQUE.

par Liane VALERE

### 0 Introduction et résumé

On sait que la classe de Chern d'une K3 est nulle ([A-B] p. 157) et le théorème de Calabi atteste qu'il existe sur toute K3 une métrique de tenseur de Ricci nul, dans chaque classe de Kähler ([AST]).

Dans le but de calculer le tenseur de Ricci de la K3 définie par l'annulation du polynôme homogène

$$F(z) = z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4$$

dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^3$  muni de la métrique de Fubini-Study, j'ai d'abord calculé le tenseur de Ricci riemannien réel  $r$  de la sous variété réelle  $M$  (sous jacente à la sous-variété complexe kählérienne  $\hat{M}$ ) de la variété réelle  $M'$  (sous jacente à la variété complexe kählérienne  $\hat{M}'$ ).

Ce calcul fournit la différence entre les tenseurs de Ricci  $r$  et  $r'$  respectivement de  $M$  et  $M'$  (p. 13 (7-1) et (7-2))  
 $r(X,X) = r'(X,X) - \delta(X,X)$  pour un vecteur  $X$  de  $(T_p M)^{\mathbb{R}}_{2m}$ . L'expression de  $\delta(X,X)$  dans  $(T_p M)_{\mathbb{C}}^m$  muni du produit hermitien canonique adapté à la structure complexe ([LIC] chap. V et (7-3)) est

$$\delta(X,X) = 8 \left( \frac{||\nabla_{\xi} df||^2}{||df||^2} - \frac{||\xi||^2 ||df||^2}{||df||^4} \right)$$

## IX.2

où  $\xi = \frac{1}{2} (X - iJX)$

est le vecteur complexe associé au vecteur réel  $X$ .

Ce dernier résultat adapté au cas où  $M'$  est  $\mathbb{C}P^{m+1}$  et  $M$  est respectivement  $\mathbb{C}P^m$ , et la surface  $K3$  précédente avec  $m = 2$ , permet de retrouver que  $\mathbb{C}P^m$  muni de la métrique induite par la métrique de Fubini-Study est bien d'Einstein (à classe de Chern positive) et que la  $K3$  précédente admet comme tenseur de Ricci d'après (9-7) :

$$r(X, X) = 6 \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \left[ \left( \frac{1}{D} - \frac{12(u_\alpha \bar{u}_\beta)^2}{E} \right) \delta_{\alpha\beta} - \left( \frac{1}{D^2} - \frac{12|u_\alpha \bar{u}_\beta|^4}{E^2} \right) u_\beta \bar{u}_\alpha \right]$$

où  $X$  est un vecteur tangent à  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{R}}$  et

$\xi = \frac{1}{2}(X - iJX)$  dans  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}}$ . Il est alors évident que  $r$  n'est pas

nul.

Première partie

CALCUL EXPLICITE DU TENSEUR DE RICCI D'UNE HYPERSURFACE  
COMPLEXE DEFINIE PAR UNE FONCTION.

### I Préliminaires algébriques, coordonnées locales et notations

#### 1°) Structure complexe

Soit  $E_m^{\mathbb{C}}$  un espace vectoriel complexe de dimension  $m$ , et le même ensemble sous-jacent  $E$ , considéré comme un espace vectoriel réel  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$  muni d'une antiinvolution  $J$  telle que, pour tout élément  $X$  de l'ensemble  $E$  on ait la bijection :

$$\begin{array}{ccc} (a+ib)X & \longleftrightarrow & aX+bJX \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{dans } E_m^{\mathbb{C}} & & \text{dans } E_{2m}^{\mathbb{R}} \end{array}$$

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  une base de  $E_m^{\mathbb{C}}$ , on considère cet ensemble de vecteurs dans  $E$ , ils sont, bien sûr, linéairement indépendants, en tant que vecteurs de  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ , on démontre que la famille  $\{e_1, e_2, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$  constitue une base de  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ , on complexifie  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$  muni de cette base et  $E_m^{\mathbb{C}}$  s'identifie alors avec le sous-espace propre associé à la valeur propre  $i$  de  $J$  prolongé naturellement à  $E_{2m}^{\mathbb{C}}$ .

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient alors, comme base de vecteurs propres pour  $J$  dans  $E_m^{\mathbb{C}}$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha - iJe_\alpha) \quad e_\alpha = \varepsilon_\alpha + \bar{\varepsilon}_\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq m$$

#### IX.4

Soit maintenant  $\zeta$  un vecteur de  $E_m^{\mathbb{C}}$  on aura

$$\zeta = \sum_{\alpha=1}^m \zeta^\alpha \varepsilon_\alpha$$

posons  $\zeta^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$  ( $x^\alpha, y^\alpha \in \mathbb{R}$ )

Si on écrit  $Z = \sum_{\alpha=1}^m (x^\alpha e_\alpha + y^\alpha (Je_\alpha)) \in E_{2m}^{\mathbb{R}}$

on voit immédiatement que

$\zeta = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$  dans  $E_{2m}^{\mathbb{C}}$ ,  $\zeta$  est vecteur propre de  $J$  pour la valeur propre  $i$ , il s'identifie avec un vecteur de  $E_m^{\mathbb{C}}$  et est dit vecteur de type  $(1,0)$ , de façon similaire,

$\bar{\zeta} = \frac{1}{2}(Z + iJZ)$  dans  $E_{2m}^{\mathbb{C}}$ ,  $\bar{\zeta}$  est vecteur propre de  $J$  pour la valeur propre  $-i$ , il est dit vecteur de type  $(0,1)$ .

Théorème Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur  $\zeta$  de  $E_{2m}^{\mathbb{C}}$  soit de type  $(1,0)$  (resp. de type  $(0,1)$ ) est qu'il existe un vecteur réel  $Z$  de  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$  tel que

$$\zeta = \frac{1}{2}(Z - iJZ) \quad (\text{resp } \zeta = \frac{1}{2}(Z + iJZ))$$

La base  $\{e_1, e_2, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$  de  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$  est dite base adaptée à la structure complexe  $J$ .

#### 2°) Structure métrique

Soit  $h$  une forme hermitienne dans  $E_m^{\mathbb{C}}$ , on peut la prolonger en une forme bilinéaire symétrique sur  $E_{2m}^{\mathbb{C}}$  telle que

$h(J\zeta_1, J\zeta_2) = h(\zeta_1, \zeta_2)$  d'où :

$$h(\zeta, \bar{\zeta}) > 0 \quad \text{si } \zeta \text{ est de type } (1,0)$$

$$h(\zeta, \zeta) = 0 \quad \text{si } \zeta \text{ est de type } (1,0) \text{ ou } (0,1)$$

$$h(\zeta, \bar{\eta}) = h(\eta, \bar{\zeta}) \text{ si } \zeta \text{ et } \eta \text{ sont de type } (1,0)$$

La restriction de  $h$  à  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$  est alors un produit scalaire invariant par  $J$ . Il existe des bases orthonormées adaptées à la structure complexe  $J$ .

Il correspond à  $h$  une 2-forme sur  $E_{2m}^{\mathbb{R}}$ , invariante par  $J$  :

$$\omega(X, Y) = h(X, JY)$$

qui peut être prolongée à  $\Lambda^{1,1}(E_{2m}^{\mathbb{C}})^*$ .

(En effet  $J$  opère aussi sur  $(E_{2m}^{\mathbb{C}})^*$  et induit deux sous-espaces propres pour les valeurs propres  $i$  et  $-i$ , dites des formes de type  $(1,0)$  et  $(0,1)$  respectivement).

### 3°) Le cas des variétés

Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $m$ ,  $(TM)^{\mathbb{C}}$ , le fibré tangent,  $(T_p M)_m^{\mathbb{C}}$  la fibre au-dessus du point  $p$  de  $M$ , espace vectoriel complexe de dimension  $m$ .

On considère un système de coordonnées locales  $\{z^1, \dots, z^m\}$  et la base de  $(T_p M)_m^{\mathbb{C}}$ ,  $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m}\}$ ; soit  $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$ , par analogie avec ce qui précède, il vient dans  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{R}}$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}; \alpha = 1, \dots, m \right\} \text{ est une base,}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = J \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = -J \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

on complexifie  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{R}}$  comme précédemment, il vient

$$(T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}} = (T_p M)_{(1,0)} \oplus (T_p M)_{(0,1)}$$

4°) Une structure métrique ici est donnée par une forme bilinéaire symétrique  $B$  sur  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}}$ , invariante par  $J = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$  et telle que

$$\begin{cases} g_{\alpha\bar{\beta}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\right) & g_{\alpha\bar{\alpha}} > 0 \\ g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \\ g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\bar{\beta}\alpha} \end{cases}$$

## IX.6

Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & G \\ \bar{G} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{G} = {}^t G$

ceci définit une forme hermitienne sur  $(T_p M)_{\mathbb{C}}^m \cong (T_p M)_{(1,0)}$

$$\tilde{g} \left( \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta} \right) = g_{\alpha\bar{\beta}} = \tilde{g}_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{g}_{\beta\alpha} = g_{\beta\bar{\alpha}} = \overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} = \overline{\tilde{g}_{\alpha\beta}}$$

on note  $G = (g_{\alpha\bar{\beta}})$   $1 \leq \alpha \leq m$   
 $1 \leq \beta \leq m$

Ceci définit une forme euclidienne sur  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{R}}$ , invariante par  $J$  de matrice

$$(1-1) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(G+\bar{G}) & -\frac{i}{2}(G-\bar{G}) \\ -\frac{i}{2}(\bar{G}-G) & \frac{1}{2}(G+\bar{G}) \end{pmatrix}$$

ici  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ +I & 0 \end{pmatrix}$ , dans la base  $\{\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial y^\alpha; 1 \leq \alpha \leq m\}$

5°) En coordonnées locales, on identifie  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{R}}$  avec un sous-ensemble de  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}}$ , repéré par

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad 1 \leq \alpha \leq m \right\}$$

ce qui donne les relations :  $dz^\alpha = dx^\alpha + i dy^\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \quad \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = i \left( \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right)$$

$\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$  est bien de type  $\frac{1}{2}(X-iJX)$ , donc  $(1,0)$  avec  $X = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

Si  $\zeta = \sum_{\alpha=1}^m \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$  est un vecteur quelconque de  $(T_p M)_{\mathbb{C}}^m$

on peut poser  $\zeta^\alpha = X^\alpha + iY^\alpha$  il vient alors.

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \left\{ (X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) - i (X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \right\}$$

ce qui donne l'expression de la matrice  $A$ .

Si  $\zeta = \sum_{\alpha=1}^m \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ , on lui fait correspondre ses normes

$$\begin{aligned} ||\zeta||_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} &= (g_{\alpha\bar{\beta}} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta)^{1/2} = [{}^t \zeta G \bar{\zeta}]^{1/2} \\ &= ||\zeta||_{2m}^{\mathbb{R}} = ||X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} || = [(X \ Y) \ A \ (\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix})]^{1/2} \quad (*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ||\zeta + \bar{\zeta}||_{2m}^{\mathbb{C}} = [{}^t \zeta B \bar{\zeta}]^{1/2} \text{ dans } (T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

## II Vecteurs normaux à une hypersurface complexe

Si  $\tilde{M}'$  est une variété complexe et  $\tilde{M}$  une hypersurface complexe de  $\tilde{M}'$  définie par  $f(z_1, \dots, z_m) = 0$ . La variété sous-jacente  $M$  réelle est de codimension 2 dans  $M'$ , définie par  $\text{Re } f(z_1, \dots, z_m) = 0$  et  $\text{Im } f(z_1, \dots, z_m) = 0$

$$\text{i.e.} \begin{cases} \frac{1}{2}(f(z_1, \dots, z_m) + \bar{f}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)) = 0 = F_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_m) \\ \frac{1}{2i}(f(z_1, \dots, z_m) - \bar{f}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)) = 0 = F_2(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_m) \end{cases}$$

Ces deux équations réelles définissent deux vecteurs réels normaux à  $M$  en  $p$  linéairement indépendants  $N_1$  et  $N_2$  dont les formes associées s'écrivent

$$N_1 \flat : \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^\alpha} \right), \frac{\partial F_1}{\partial y^\alpha} = \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} - \frac{i}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^\alpha} \right\}$$

$$N_2 \flat : \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x^\alpha} = -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^\alpha} \right), \frac{\partial F_2}{\partial y^\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^\alpha} \right) \right\}$$

à  $N_1$  correspond le vecteur  $v_1$  dans  $(T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}}$  tel que

$$v_1 = \frac{1}{2}(N_1 - iJN_1)$$

(\*) A partir de maintenant, on utilise la convention de sommation d'Einstein.



## IX.8

$$\text{Il vient } N_1^b = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^\alpha} \right) \frac{dz^\alpha + d\bar{z}^\alpha}{2} + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}^\alpha} \right) \frac{dz^\alpha - d\bar{z}^\alpha}{2i}$$

$$\text{Soit } N_1^b = (\operatorname{Re} \partial_\alpha f) dx^\alpha - \operatorname{Im}(\partial_\alpha f) dy^\alpha$$

Donc :

$$\boxed{df = \partial_\alpha f dz^\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{N_1^b = \frac{1}{2}(df + d\bar{f})}$$

Or c'est le champ de vecteurs normaux que nous voulons.

$$\text{Soit en coordonnées locales pour } N_1 = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(g_{\alpha\bar{\beta}} + g_{\beta\bar{\alpha}}) X^\beta - \frac{i}{2}(g_{\alpha\bar{\beta}} - g_{\beta\bar{\alpha}}) Y^\beta = \operatorname{Re} \partial_\alpha f \\ \frac{i}{2}(g_{\alpha\bar{\beta}} - g_{\beta\bar{\alpha}}) X^\beta + \frac{1}{2}(g_{\alpha\bar{\beta}} + g_{\beta\bar{\alpha}}) Y^\beta = -\operatorname{Im} \partial_\alpha f \end{cases} \quad (\text{Voir (1-1)})$$

$$\text{On note maintenant } \partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \operatorname{Re} g_{\alpha\bar{\beta}} X^\beta + \operatorname{Im} g_{\alpha\bar{\beta}} Y^\beta = \operatorname{Re}(\partial_\alpha f) \\ -\operatorname{Im} g_{\alpha\bar{\beta}} X^\beta + \operatorname{Re} g_{\alpha\bar{\beta}} Y^\beta = -\operatorname{Im}(\partial_\alpha f) \end{cases}$$

Si on multiplie la deuxième équation par  $(-i)$ , il vient

$$\begin{aligned} g_{\alpha\bar{\beta}} X^\beta - i g_{\alpha\bar{\beta}} Y^\beta &= \partial_\alpha f \\ \text{soit } g_{\alpha\bar{\beta}} \bar{v}_1^\beta &= \partial_\alpha f \quad \text{dans } (T_p M')_{2m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{v}_1^\beta = g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\alpha f}$$

$$\text{Pour } N_2 = JN_1 \text{ on obtient } v_2 = i v_1 = i g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\beta f \partial_\alpha$$

$$\begin{aligned} N_2^b &= -\frac{i}{2}(\partial_\alpha f - \partial_{\bar{\alpha}} \bar{f}) \frac{dz^\alpha + d\bar{z}^\alpha}{2} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha f + \partial_{\bar{\alpha}} \bar{f}) \frac{dz^\alpha - d\bar{z}^\alpha}{2i} \\ &= -\frac{i}{2} \partial_\alpha f dz^\alpha + \frac{i}{2} \partial_{\bar{\alpha}} \bar{f} d\bar{z}^\alpha = -\frac{i}{2}(df - d\bar{f}) = \operatorname{Im} df. \end{aligned}$$

$$\boxed{N_2^b = -\frac{i}{2}(df - d\bar{f})}$$

Il vient :

$$\bar{v}_2^\beta = -i g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\alpha \bar{f}$$

$$\begin{aligned} v_2^\alpha &= i g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{f} \\ v_1^\alpha &= g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{f} \end{aligned}$$

en tant que vecteurs complexes de type  $(1,0)$ , on a  $v_2 = Jv_1 = iv_1$ ,  
on a aussi

$$\begin{aligned} (2-1) \quad ||v_1||_m^{\mathbb{C}} &= ||N_1||_{2m}^{\mathbb{R}} = ||v_1||_{2m}^{\mathbb{C}} \\ &= ||N_2||_{2m}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

on notera dans la suite  $F = ||N_1||^2 = ||N_2||^2 = g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\alpha f \partial_{\bar{\beta}} \bar{f} = ||v_1||^2$   
En conclusion

$$(2-2) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}(N_1 - iJN_1) & N_1 = \frac{1}{2}(df + d\bar{f}) \neq \\ v_2 = \frac{1}{2}(N_2 - iJN_2) & N_2 = -\frac{1}{2}(df - d\bar{f}) \neq = JN_1 \end{cases}$$

III Forme de Ricci d'une variété complexe kählerienne  $\hat{M}_m$   
plongée dans une autre  $\hat{M}'_{m+p}$

La référence pour les techniques utilisées ici est [KN].

Soit  $M_{2m}$  la variété réelle sous-jacente à  $\hat{M}_m$  et  $M'_{2(m+p)}$  la variété réelle sous-jacente à  $\hat{M}'_{m+p}$ .

Notons  $g, g', R, R', r, r'$  respectivement les tenseurs riemanniens métriques, de courbure, de Ricci, respectivement de  $M_{2m}$  et  $M'_{2(m+p)}$ .  $g$  étant la métrique induite par  $g'$ .

Soit  $\{V_1, V_2, \dots, V_{m+p}, JV_1, \dots, JV_{m+p}\}$  une base orthonormale de  $T_p M'_{2(m+p)}$ , telle que  $\{V_1, V_2, \dots, V_m, JV_1, \dots, JV_m\}$  soit une base orthonormale de  $T_p M_{2m}$ .

Il vient alors, pour un champ  $X$  de  $(TM)_{2m}^{\mathbb{R}}$

$$(3-1) \quad r(X, X) = \sum_{i=1}^{m+p} (R'(V_i, X, V_i, X) + R'(JV_i, X, JV_i, X)) - 2 \sum_{i=1}^m g'(\alpha(V_i, X), \alpha(V_i, X))$$

([KN] p 177)

$\alpha$  est la deuxième forme fondamentale du plongement, soit

$$\alpha(X, Y) = \sum_{i=m+1}^{m+p} g'(\nabla_X Y, V_i) V_i + \sum_{i=m+1}^{m+p} g'(\nabla_X Y, JV_i) JV_i$$

La simplification introduite dans (3-1) est due à la propriété kählerienne :

$$\alpha(JX, Y) = \alpha(X, JY) (=J\alpha(X, Y))$$

d'où

$$\alpha(JX, JY) = -\alpha(X, Y)$$

ainsi les termes  $g'(\alpha(V_i, V_i), \alpha(X, X))$  et  $g'(\alpha(JV_i, JV_i), \alpha(X, X))$  se détruisent.

Dans le cas d'une variété ambiante  $M'$  à courbure sectionnelle holomorphe constante  $c$  (le cas de  $\mathbb{C}P^{m+p}$  que l'on va examiner par la suite), on a en coordonnées locales :

$$R'_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2} c (g'_{\alpha\beta} g'_{\gamma\delta} + g'_{\alpha\delta} g'_{\beta\gamma})$$

Donc si  $N \in (T_p M)^\perp$  et  $X \in T_p M$ , il vient

$$R'(N, X, N, X) = R'(JN, X, JN, X) = \frac{c}{2} \|X\|^2 \|N\|^2$$

Dans ce cas  $r' = \frac{1}{2}(m+p+1)cg'$  ([KN] p. 167 et 168)

$$(3-2) \quad r(X, X) = r'(X, X) - \frac{pc}{2} g'(X, X) - 2 \sum_{i=1}^m g'(\alpha(V_i, X), \alpha(V_i, X))$$

$$(3-3) \quad \text{soit } r(X, X) = \frac{1}{2}(m+1)cg(X, X) - \delta(X, X)$$

Il reste donc à calculer le terme correctif  $\delta$  qui mesure le défaut de  $M$  à être une variété d'Einstein à courbure holomorphe sectionnelle constante  $c$ .

#### IV Introduction d'une 2ème forme généralisée $\beta$

##### 1°) Définition de $\beta$

Soit  $X \in (T_p M)_{2m}^R$  plongée

$Y \in (T_p M')_{2(m+p)}^R$  ambiante

on a  $\nabla_Y^i X = (\nabla_Y^i X)^T + (\nabla_Y^i X)^N$  en  $p$ .

(décomposition en partie tangente à  $M$  et partie normale à  $M$ ).

Prolongeons localement tout champ  $V$  de  $NM$ , le fibré normal de  $M$ , par un champ  $\hat{V}$  de  $TM'$  tangent au flot normal dans un voisinage tubulaire de  $M$  et prolongeons un champ  $X$  tangent à  $M$  par un champ  $\hat{X}$  orthogonal au flot normal (le prolongement est radial autour de  $p$ ).

On pose  $\beta(X, Y) = (\nabla'_Y X)^N$ ,  $\beta_p \in T_p M^* \otimes T_p M'^* \otimes N_p M^*$

La restriction de  $\beta$  à  $TM^* \otimes TM^*$  est bien  $\alpha$ .

Il vient

$$\beta(X, Y) = \sum_{i=m+1}^{m+p+1} g'(\nabla'_Y X, V_i) V_i + \sum_{i=m+1}^{n+p+1} g'(\nabla'_Y X, JV_i) JV_i$$

où les  $V_i, JV_i$  constituent une base orthonormale de la fibre de  $NM$  en  $p$  adaptée à la structure complexe.

Comme on a supposé  $g'(\tilde{X}, \tilde{V}_i) = 0$  et  $g'(\tilde{X}, \tilde{J}V_i) = 0$

$$\beta(X, Y) = - \sum_i g'(X, \nabla'_Y V_i) V_i - \sum_i g'(X, \nabla'_Y JV_i) JV_i$$

Donc le résultat ne dépend que des valeurs de  $X$  et  $Y$  en  $p$ .

## 2°) Cas d'une hypersurface complexe

dans le cas d'une hypersurface si on pose

$$F = ||N_1||^2 = ||JN_1||^2 \quad (\text{voir (2-1)})$$

$$F \beta(X, Y) = g'(\nabla'_Y X, N_1) N_1 + g'(\nabla'_Y X, JN_1) JN_1$$

Etudions la représentation de  $\beta$  dans  $(TM')_{2(m+p)}^{\mathbb{C}}$ , soit  $A$

$$(4-1) \quad \left\{ \begin{aligned} FA &= \frac{1}{2} F \{ \beta(X, Y) - iJ\beta(X, Y) \} = \frac{1}{2} g'(\nabla'_Y X, N_1 + iJN_1) (N_1 - iJN_1) \\ &= \frac{1}{2} g'(\nabla'_Y X - iJ\nabla'_Y X, N_1 + iJN_1) \frac{1}{2} (N_1 - iJN_1) \\ &= 2 g'(\nabla'_Y \xi, \bar{v}) v \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé :  $\xi = \frac{1}{2} (X - iJX) \in (T_p M)_{2m}^{\mathbb{C}}$

$$v = \frac{1}{2} (N_1 - iJN_1) \in (T_p M')_{2(m+p)}^{\mathbb{C}}$$

et où  $g'$  est le produit bilinéaire symétrique dans  $(T_p M')_{2(m+p)}^{\mathbb{C}}$ .

La formule finale, devient donc, en tenant compte que dans

$$(T_p M')_{2(m+p)}^{\mathbb{C}} \quad Y = \eta + \bar{\eta} \quad \text{et} \quad \nabla'_Y \xi = \nabla'_\eta \xi$$

(4-2)

$$||\beta(X, Y)||^2 = ||A||^2 = \frac{4}{F} |g'(\nabla'_\eta \xi, \bar{v})|^2$$

V Calcul d'une trace sur  $TM'$

Les formules (3-2) et (3-3) nous montrent que le terme  $\delta(X, X)$  du tenseur de Ricci pour la métrique induite et un champ  $X$ , est égal à la trace de la forme quadratique

$$||\alpha(\cdot, X)||^2$$

sur  $(T_p(M))_{2m}^{\mathbb{R}}$

Pour calculer cette trace nous allons utiliser la 2° forme fondamentale généralisée  $\beta$  et écrire que

$$(5-1) \quad \text{Tr} ||\alpha(\cdot, X)||^2 = \text{Tr tot} ||\beta(X, \cdot)||^2 - \text{Trn} ||\beta(X, \cdot)||^2$$

où  $\text{Tr tot}$  désigne la trace de  $||\beta(X, \cdot)||^2$  sur

$$(T_p M')_{2(m+p)}^{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \text{Trn} ||\beta(X, \cdot)||^2 \text{ désigne la trace de}$$

$||\beta(X, \cdot)||^2$  restreinte au fibré normal au-dessus du point  $p$ .

J'écris la trace totale

$$\text{Tr tot} = \sum_{i=1}^{m+p} (||\beta(X, v_i)||^2 + ||\beta(X, Jv_i)||^2)$$

(5-2)

$$\text{Tr tot} = \frac{8}{F} g^{\lambda\mu} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta (\nabla_\lambda^\alpha f) (\nabla_\mu^\beta \bar{f})$$

Remarque : On a utilisé les relations suivantes :

$$\sum_{\alpha=1}^{m+p} \xi^\alpha \partial_\alpha f = 0 = \sum_{\beta=1}^{m+p} \bar{\xi}^\beta \partial_{\bar{\beta}} \bar{f}$$

(car  $X$  est tangent à  $M$ )

$$\nabla_\alpha (F) = g^{\lambda\mu} (\nabla_\alpha \partial_\lambda f) \partial_{\bar{\mu}} \bar{f} = g^{\lambda\mu} (\nabla_\lambda \partial_\alpha f) \partial_{\bar{\mu}} \bar{f}$$

$$\Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^\lambda = 0 = \Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\mu}}$$

$$\nabla_{\bar{\beta}} \xi^\alpha = 0 = \nabla_\alpha \bar{\xi}^\beta$$

VI Trace restreinte au fibré normal (en codimension 1 complexe)

Pour la deuxième forme généralisée on a donc en notant Trn la trace restreinte au fibré normal

$$\text{Trn} = ||\beta(X, \dot{N}_1)||^2 + ||\beta(X, \dot{JN}_1)||^2$$

$$\text{où } \dot{N}_1 = \frac{N_1}{\sqrt{F}} \quad \dot{JN}_1 = J \frac{N_1}{\sqrt{F}}$$

$$F = ||N_1||^2 \quad (= g^{\alpha\bar{\beta}} (\partial_\alpha f) (\partial_{\bar{\beta}} \bar{f}))$$

$$\text{Trn} = \frac{4}{F} |\langle \nabla'_{N_1/F} \xi, \bar{v} \rangle|^2 + \frac{4}{F} |\langle \nabla'_{JN_1/F} \xi, \bar{v} \rangle|^2$$

d'après les formules (4-1) et (4-2) p. 10, le produit  $\langle, \rangle$  étant le produit bilinéaire symétrique invariant par J dans  $(T_p^M)_{2m}^{\mathbb{C}}$

$$\text{or } N_1 = v + \bar{v} \\ JN_1 = i(v - \bar{v})$$

et sachant que  $\nabla'_v \xi = 0 = \nabla'_v \bar{\xi}$ , il vient

$$\text{Trn} = \frac{4}{F^2} |\langle \nabla'_v \xi, \bar{v} \rangle|^2 + \frac{4}{F^2} |\langle \nabla'_{iv} \xi, \bar{v} \rangle|^2 \\ = \frac{8}{F^2} |\langle \nabla'_v \xi, \bar{v} \rangle|^2$$

en coordonnées locales  $\langle \nabla'_v \xi, \bar{v} \rangle = g^{\lambda\bar{\beta}} (\partial_{\bar{\beta}} \bar{f}) (\nabla'_\lambda \xi^\alpha) \partial_\alpha f$

$$= - g^{\lambda\bar{\beta}} (\partial_{\bar{\beta}} \bar{f}) (\nabla'_\lambda \partial_\alpha f) \xi^\alpha$$

$$(6-1) \quad \text{D'où } \boxed{\text{Trn} = \frac{8}{F^2} \xi^\alpha \xi^{\bar{\beta}} g^{\lambda\bar{\sigma}} (\partial_{\bar{\sigma}} \bar{f}) (g^{\bar{\mu}\rho} \partial_\rho f) (\nabla'_\lambda \partial_\alpha f) (\nabla'_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{f})}$$

VII Forme de Ricci de la variété plongée

D'après les formules (3-2) et (3-3) p. 9 et (5-1) p. 11 le terme correctif, pour une variété kählérienne plongée dans une variété kählérienne est donc, en coordonnées locales

$$(7-1) \quad \text{Tr} ||\alpha(X, \cdot)||^2 = \frac{8}{F^2} \xi^\alpha \xi^\beta (\nabla_\lambda^\dagger \partial_\alpha f) (\nabla_\mu^\dagger \partial_{\bar{\beta}} \bar{f}) [Fg^{\lambda\bar{\mu}} - (g^{\lambda\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} \bar{f}) (g^{\bar{\mu}\rho} \partial_\rho f)]$$

soit en fonction de la Hessienne de  $f$  :

$$(7-2) \quad \text{Tr} ||\alpha(X, \cdot)||^2 = \frac{8}{||v||^4} \{ ||v||^2 ||\text{Hess}f(X, \cdot)||^2 - ||\text{Hess}.f(X, v)||^2 \}$$

où  $v = g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{f} \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$  localement ou encore

$$(7-3) \quad \delta(X, X) = 8 \left( \frac{||\nabla_\xi df||^2}{||df||^2} - \frac{||\xi||^2 ||df||^2}{||df||^4} \right)$$





## Deuxième partie

CALCUL DE LA FORME DE RICCI DES HYPERSURFACES COMPLEXES DE  $\mathbb{C}P^m$   
 DEFINIES PAR L'ANNULATION D'UN POLYNOME HOMOGENE  
 (cas particulier d'une K3)

VIII Rappels sur  $\mathbb{C}P^3$ 

$\mathbb{C}P^3$  munie de la métrique de FUBINI-STUDY est une variété Kählerienne de courbure sectionnelle holomorphe constante  $c$  (Kählerienne  $\Leftrightarrow$  complexe et  $d\omega = 0$ ).

1°) Ouvert de coordonnées sur  $\mathbb{C}P^3$ 

Soit dans  $\mathbb{C}^4 = \{(z_0, z_1, z_2, z_3)\}$  un ouvert de coordonnées défini autour de la classe  $\{(z_0, 0, 0, 0) ; z_0 \in \mathbb{C}\}$  de  $\mathbb{C}^4$  qui définit un point de  $\mathbb{C}P^3$  centre d'un ouvert de coordonnées locales  $\{(1, u_1, u_2, u_3) ; (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3\}$  tel que,  $u_\alpha = z_\alpha / z_0$ . Il y a

ainsi 4 ouverts de coordonnées locales.

La métrique de Fubini-Study dans un tel ouvert est donnée par

$$(8-1) \quad g'_{\alpha\bar{\beta}} = 4 \frac{\delta_{\alpha\bar{\beta}} - u^\beta \bar{u}^\alpha}{cD^2}$$

$$(8-2) \quad g'^{\alpha\bar{\beta}} = c \frac{D}{4} (\delta^{\alpha\bar{\beta}} + u^\alpha \bar{u}^\beta)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$$D = 1 + \sum_{\alpha=1}^3 u^\alpha \bar{u}^\alpha$$

On peut déduire de la métrique les coefficients de connexion kählerienne.

$$r'_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\rho} = 0 = r'_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\bar{\sigma}} = 0 = r'_{\alpha\rho}{}^{\bar{\beta}} = r'_{\beta\bar{\sigma}}{}^{\alpha}$$

$$\forall \alpha, \beta, \rho, \sigma = 1, 2, 3$$

$$r'_{\lambda\rho}{}^{\alpha} = g'{}^{\rho\bar{\sigma}} \partial_{\lambda} g'_{\alpha\bar{\sigma}} = g'{}^{\rho\bar{\sigma}} \partial_{\alpha} g'_{\lambda\bar{\sigma}}$$

(8-3)

$$r'_{\lambda\alpha}{}^{\rho} = -\frac{1}{D}(\delta_{\rho\alpha} \bar{u}_{\lambda} + \delta_{\rho\lambda} \bar{u}_{\alpha})$$

$\mathbb{C}P^3$  est une variété à courbure sectionnelle constante, donc, on sait (K.N. p. 168)

(8-4)

$$r' = \frac{1}{2} (m+2)cg' = 2cg'$$

On a aussi  $u' = (m+1)(m+2)c$  et  $r' = \frac{u'}{2m+2} g'$ , où  $u'$  est la courbure scalaire.

Soit ici  $u' = 12c$  et  $r' = (u'/6)g'$

IX Calcul des traces cherchées sur  $\mathbb{C}P^m$  (resp. sur  $M = K3$ ) comme hypersurfaces complexes de  $\mathbb{C}P^{m+1}$  (resp.  $\mathbb{C}P^3$ )

1°) Cas de  $M = \mathbb{C}P^m$  on prend  $c = 1$

$\mathbb{C}P^m$  peut être considéré comme une variété plongée dans  $\mathbb{C}P^{m+1}$  définie comme noyau du polynôme homogène

(9-1)

$$F(z) = z_{m+1} = 0$$

ou en coordonnées locales non homogènes par

(9-2)

$$f(u) = u_{m+1} = 0$$

Il vient alors pour la deuxième forme fondamentale

$$\alpha(X, Y) = 2 \langle \nabla_{\bar{\eta}} \xi, \bar{v} \rangle v = -2 \langle \xi, \nabla_{\bar{\eta}} v \rangle v$$

$$\begin{aligned} \text{où } v &= g^{\alpha\bar{\beta}} \partial_{\bar{\beta}} f \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \frac{D}{4} (\delta^{\alpha\beta} + u^{\alpha} \bar{u}^{\beta}) \delta_{\beta, m+1} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \\ &= \frac{D}{4} \left( \frac{\partial}{\partial z^{m+1}} + \bar{u}_{m+1} u^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

mais sur  $\mathcal{C}P^m$ ,  $u_{m+1} = 0 = \bar{u}_{m+1}$  donc

$$v = \frac{D}{4} \frac{\partial}{\partial z^{m+1}} \quad D = 1 + \sum u_\lambda \bar{u}_\lambda, \lambda = 1, \dots, m+1$$

Calculons  $\nabla'_\eta v$  sur  $M$ ,  $\eta = \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial z^\lambda}$

$$\begin{aligned} \nabla'_\eta v &= \frac{1}{4} \eta^\lambda \bar{u}_\lambda \frac{\partial}{\partial z^{m+1}} + \frac{D}{4} \eta^\lambda \left(-\frac{1}{D}\right) (\delta_{\lambda\alpha} \bar{u}_{m+1} + \delta_{m+1,\alpha} \bar{u}_\lambda) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{4} \eta^\lambda \bar{u}_\lambda - \frac{1}{4} \eta^\lambda \bar{u}_\lambda\right) \frac{\partial}{\partial z^{m+1}} \quad (\bar{u}_{m+1} = 0 \text{ sur } M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la deuxième forme fondamentale est nulle et

(9-3)

$$r(X, X) = r'(X, X) - \frac{c}{2} g'(X, X) = \frac{u}{2m} g(X, X)$$

Donc

$$u = \frac{m}{m+2} u'$$

Vérifions que notre formule générale donne bien le même résultat.

Car ici

$$F = g^{',m+1,\overline{m+1}} = \frac{D}{4} \quad \text{sur } M$$

$$\begin{aligned} \text{en effet } F &= g^{',\alpha\bar{\beta}} \delta_{\alpha,m+1} \delta_{\beta,m+1} = g^{',m+1,\overline{m+1}} = \frac{D}{4} (1 + u_{m+1} \bar{u}_{m+1}) \\ &= D/4 \text{ sur } M \end{aligned}$$

$$\text{et } \nabla'_\lambda \partial_\alpha f = \partial_\lambda \partial_\alpha f - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\sigma} \partial_\sigma f$$

$$\begin{aligned} \nabla'_\lambda \partial_\alpha f &= + \frac{1}{D} (\partial_\lambda f \bar{u}_\alpha + \partial_\alpha f \bar{u}_\lambda) \\ &= \frac{1}{D} (\delta_{\lambda,m+1} \bar{u}_\alpha + \delta_{\alpha,m+1} \bar{u}_\lambda) \end{aligned}$$

$$\nabla'_\mu \partial_\beta f = \frac{1}{D} (\delta_{\mu,m+1} u_\beta + \delta_{\beta,m+1} u_\mu)$$

D'où comme  $\xi$  est tangent à  $M$ ,  $\xi^{m+1} = 0 = \bar{\xi}^{m+1}$

$$\delta(X, X) = \frac{8 \times 16}{D^2} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \frac{1}{D^2} \left[ \frac{D}{4} (g^{m+1, \overline{m+1}} \bar{u}_\alpha u_\beta) - (g^{m+1, \overline{m+1}})^2 \bar{u}_\alpha u_\beta \right] = 0$$

Ce qui signifie que la trace totale de  $||\beta(X, X)||^2$  est égale à sa trace normale

$$\boxed{\frac{32}{D^2} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \bar{u}_\alpha u_\beta}$$

2°) Cas de  $M =$  une  $K3$  dans  $\mathbb{C}P^3$

On a choisi ici comme  $K3$  celle définie par le noyau d'un polynôme homogène de degré 4.

$$F(z) = z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0$$

ou en coordonnées locales

$$f(u_1, u_2, u_3) = u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 + 1 = 0$$

et ceci dans chacun des 4 ouverts de coordonnées.

Il vient alors ici

$$\begin{aligned} \partial_\alpha f &= 4u_\alpha^3 & \partial_\lambda \partial_\alpha f &= \delta_{\lambda\alpha} 12u_\alpha^2 \\ \sum_\alpha \xi^\alpha \partial_\alpha f &= 0 &= 4 \sum_\alpha u_\alpha^3 \xi^\alpha \end{aligned}$$

$$F = g^{\lambda\bar{\mu}} (\partial_\lambda f) (\partial_{\bar{\mu}} \bar{f}) = \frac{D}{4} (\delta^{\lambda\mu} + u^\lambda \bar{u}^\mu) 4u_\lambda^3 \bar{u}_\mu^3$$

$$F = 4 D \left( \sum_\lambda u_\lambda^3 \bar{u}_\lambda^3 + 1 \right) = 4DE$$

$$\text{en posant } E = 1 + \sum_{\lambda=1}^3 u_\lambda^3 \bar{u}_\lambda^3$$

$$D = 1 + \sum_{\lambda=1}^3 u_\lambda \bar{u}_\lambda$$

$$\begin{aligned} \nabla'_\lambda \partial_\alpha f &= \partial_\lambda \partial_\alpha f + \Gamma_{\lambda\alpha}^\tau \partial_\tau f \\ &= 12 \delta_{\lambda\alpha} u_\alpha^2 - \left(-\frac{1}{D}\right) (\delta_\alpha^\tau \bar{u}_\lambda + \delta_\lambda^\tau \bar{u}_\alpha) 4u_\tau^3 \\ &= 12 \delta_{\lambda\alpha} u_\alpha^2 + \frac{4}{D} (\bar{u}_\lambda u_\alpha^3 + \bar{u}_\alpha u_\lambda^3) \end{aligned}$$

$$Fg'^{\lambda\bar{\mu}} = 4DE \cdot \frac{D}{4} (\delta^{\lambda\mu} + u_\lambda \bar{u}_\mu)$$

$$\begin{aligned} (g'^{\lambda\bar{\rho}} \partial_\rho \bar{f}) (g'^{\bar{\mu}\sigma} \partial_\sigma f) &= \frac{D}{4} \sum_{\rho\sigma} (\delta^{\lambda\rho} + u_\lambda \bar{u}_\rho) 4\bar{u}_\rho^3 \cdot D(\delta^{\mu\sigma} \cdot \bar{u}_\mu u_\sigma) u_\sigma^3 \\ &= D^2 (\bar{u}_\lambda^3 - u_\lambda) (u_\mu^3 - \bar{u}_\mu) \end{aligned}$$

Dans  $\nabla'_\lambda \partial_\alpha f$  le terme en  $u_\alpha^3$  donne 0 ( $\sum_\alpha \xi^\alpha u_\alpha^3 = 0$ )  
Il reste donc pour la trace totale sur  $\mathbb{CP}^3$

$$\begin{aligned} \text{Trtot} &= D^2 E (\delta_{\lambda\mu} + u_\lambda \bar{u}_\mu) (12\delta_{\lambda\alpha} u_\alpha^2 + \frac{4}{D} \bar{u}_\alpha u_\lambda^3) \\ &\quad (12\delta_{\mu\beta} \bar{u}_\beta^2 + \frac{4}{D} u_\beta \bar{u}_\mu^3) \frac{8 \xi^\alpha \xi^\beta}{16D^2 E^2} \end{aligned}$$

$$\text{Trtot} = \text{Tr} \|\beta(X, \cdot)\|^2 \quad \text{dans TM'}$$

(9-4)

$$\text{Trtot} = \frac{8 \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta}{D^2 E^2} \{9D^2 \delta_{\alpha\beta} u_\alpha^2 \bar{u}_\beta^2 E + 3DE (|u_\alpha \bar{u}_\alpha|^2 + |u_\beta \bar{u}_\beta|^2) \bar{u}_\alpha u_\beta + E^2 \bar{u}_\alpha u_\beta\}$$

Trace normale (p. 10)

$$\text{Trn} = \frac{8}{E^2} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta [g'^{\lambda\bar{\sigma}} (\nabla'_\lambda \partial_\alpha f) (\partial_{\bar{\sigma}} \bar{f})] [(\nabla'_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{f}) g'^{\bar{\mu}\rho} (\partial_\rho f)]$$

$$\text{Trn.} = \frac{8 \times 16}{16D^2 E^2} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta [3Du_\alpha^2 \bar{u}_\alpha^3 + E\bar{u}_\alpha] [3D\bar{u}_\beta^2 u_\beta^3 + Eu_\beta]$$

(9-5)

$$\text{Trn} = \frac{8}{D^2 E^2} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta [9D^2 |u_\alpha|^4 |u_\beta|^4 + 3DE (|u_\alpha|^4 + |u_\beta|^4 + E^2) \bar{u}_\alpha u_\beta]$$

$$\text{Trace cherchée} = \text{Trtot} - \text{Trn}$$

$$\delta(X, X) = \frac{8 \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta}{D^2 E^2} \left[ 9D^2 (u_\alpha \bar{u}_\beta)^2 [\delta_{\alpha\beta} E - (\bar{u}_\alpha u_\beta)^2] \right]$$

(9-6)

$$\delta(X, X) = 72 \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta (u_\alpha \bar{u}_\beta)^2 \frac{\delta_{\alpha\beta} E - (\bar{u}_\alpha u_\beta)^3}{E^2}$$

D'où

$$r(X, X) = \frac{1}{2} (m+1) cg'(X, X) - \delta(X, X)$$

(9-7)

$$r(X, X) = 6\xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \left[ \left( \frac{1}{D} - \frac{12(u_\alpha \bar{u}_\beta)^2}{E} \right) \delta_{\alpha\beta} - \left( \frac{1}{D^2} - \frac{12|u_\alpha u_\beta|^4}{E^2} \right) u_\beta \bar{u}_\alpha \right]$$

$$\text{où } D = 1 + \sum_{\lambda=1}^3 u_\lambda \bar{u}_\lambda$$

$$E = 1 + \sum_{\lambda=1}^3 (u_\lambda \bar{u}_\lambda)^3$$

or sur une K3 si la métrique était d'Einstein dans la classe de Kähler de la métrique induite on aurait  $r_{\alpha\bar{\beta}} = 0$ , car la classe de Chern d'une K3 est nulle.

Ce n'est clairement pas le cas ici.

BIBLIOGRAPHIE

Chaque livre cité renvoie à la bibliographie originale.

- [ A-B] Géométrie Riemannienne en dimension 4. Séminaire Arthur Besse - Cédic/Fernand Nathan (1981).
  
- [ AST] Astérisque 58 - Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de CALABI. Séminaire PALAISEAU (1978).
  
- [ K-N] Kobayashi-Nomizu "Foundations of differential geometry" Interscience publishers (1969)
  
- [LIC] Lichnérowicz 'Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie" Dunod (1955).