Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

PIERRE BÉRARD
GÉRARD BESSON

Théorèmes de Finitude en géométrie riemannienne et structures métriques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. n° 8, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A8_0>

THEOREMES DE FINITUDE EN GEOMETRIE RIEMANNIENNE ET STRUCTURES METRIQUES

par Pierre BERARD et Gérard BESSON

I. INTRODUCTION

La géométrie comporte trois modèles simplement connexes

courbure =	$K = 1$	$K = 0$	$K = -1$
	(S^n, can)	$(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$	$(\mathbb{H}^n, \mathrm{can})$.

Problème 1.

$K = 0$ et $K = -1$ le modèle 1-connexe n'est pas compact.

$K = 1$ S^n le modèle est compact.

L'étude de ce cas, maintenant bien compris, a commencé par le résultat suivant.

THEOREME (Rauch). - Si une variété riemannienne (M,g) 1-connexe à une courbure sectionnelle K comprise entre 0,76 et 1 , $0,76 < K \leq 1$, alors M est homéomorphe à une sphère.

Pour d'autres résultats dans cette direction, voir [C-E] et [SI].

Problème 2.

$K = 1$	il n'y a qu'une structure topologique modèle.
$(K=0$ et$)$ $K = -1$	beaucoup de structures topologiques différentes.

Nouvelle vision des problèmes.

(hypothèses géométriques $\Rightarrow$ # fini de structures différentiables possible) ?

Du point de vue local, on a besoin de la notion importante de pincement de la courbure.

Exemple de résultat obtenu sous des hypothèses de pincement de la courbure.

THEOREME (Cheeger-Weinstein-Peters). - $V > 0$ et $D < +\infty$ étant fixés, il n'y a qu'un nombre fini de variétés différentiables de même dimension qui admettent une métrique riemannienne telle que

$|K| \leq 1 \qquad \mathrm{Vol}(M) \geq V \qquad \mathrm{diam}\, M \leq D$.

(Signalons que Peters donne un majorant de ce nombre) (voir [CR], [PS], [WN]).

Preuve du théorème dans un cas facile : celui des surfaces.

Le théorème de Gauß-Bonnet donne

$$\int_M K = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1-\gamma)$$

γ = genre de la variété, si $K \geq -K_0$ $(K_0 > 0)$, si $\mathrm{Vol}(M) \leq V$; alors $\gamma \leq 1 + \dfrac{K_0 V}{2\pi}$.

Le diamètre n'intervient pas car la dimension 2 est trop pauvre. En dimension supérieure, on ne peut pas se passer du diamètre comme le montre l'exemple ci-dessous, où une infinité de variétés topologiques ont une métrique à courbure $|K| \leq 1$ et $\mathrm{Vol} = 1$.

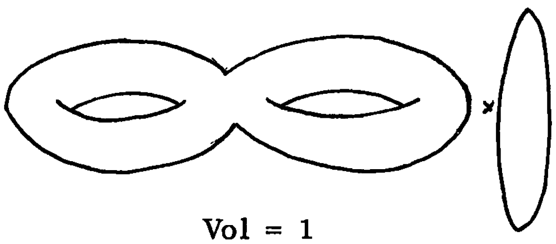
N est de dim 2 à courbure $-1 = K$ (il en existe une infinité)

alors

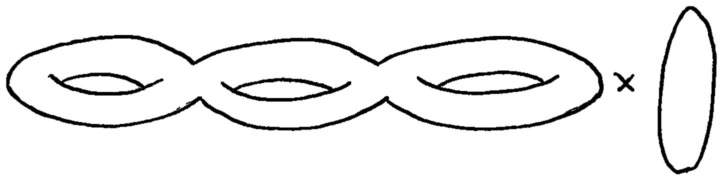
$$\text{Gauß-Bonnet} \Rightarrow \mathrm{Vol}(N) = 4\pi(\gamma-1) = \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

alors

$$(N,h) \times (S^1, \alpha^2.\mathrm{can}) \quad \text{vérifie} \quad \begin{cases} |K| \leq 1 \\ \mathrm{vol}(N) \equiv 1 \ . \end{cases}$$



Vol = 1



Vol = 1
diamètre grand.

<u>But</u> : obtenir des théorèmes de Finitude sur un ensemble de variétés vérifiant des conditions géométriques (bornes sur certains invariants) et préciser les autres invariants (nombres de Betti, genre).

<u>Distances entre variétés riemanniennes</u>.

1) <u>Distance de Lipschitz</u>.

Soient X et Y deux espaces métriques et f un homéomorphisme de X dans Y . On pose :

$$\mathrm{dil}\, f = \sup_{\substack{(x,x')\in X \\ x\neq x'}} \frac{d_Y(f(x),f(x'))}{d_X(x,x')}$$

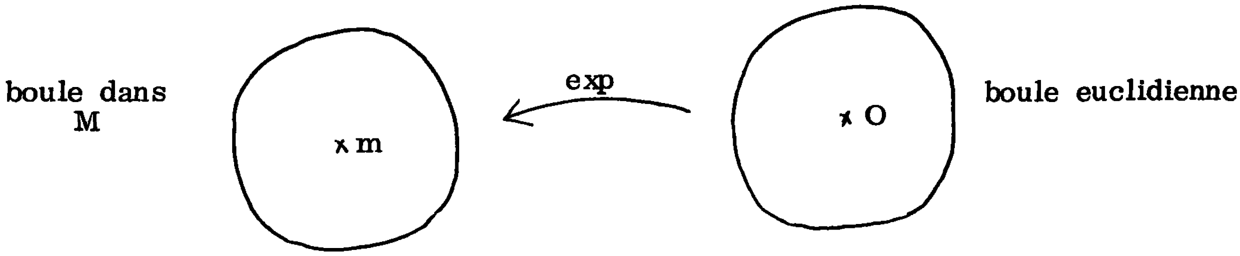
dilatation locale en x

$$\mathrm{dil}_x f = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dil}(f_{|B(x,\varepsilon)})$$

$$d_L(X,Y) = \inf\{\mathrm{Log}|\mathrm{dil}\, f| + \mathrm{Log}|\mathrm{dil}\, f^{-1}| \ ; \ f \text{ homéomorphismes de } X \text{ dans } Y\} \ .$$

<u>Exemple</u>.

La géométrie riemannienne est asymptotiquement euclidienne.



si $|K| \leq 1$ $\qquad d_L(B_m(r), B_0^E(r)) \leq \frac{r^2}{6}$

car exp est un homéomorphisme Lipschitzien de X dans Y dont on sait évaluer la dilatation en fonction de la courbure.

Cette distance est trop restrictive car elle n'est finie que <u>ssi</u> X et Y sont homéomorphes. On introduit donc une notion plus faible.

2) <u>Distance de Hausdorff.</u>

Rappelons que si A et B sont deux parties d'un espace métrique Z

$$d_H^Z(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \quad U_\epsilon(A) \supset B \text{ et } U_\epsilon(B) \supset A\}$$

où $U_\epsilon(A)$ est le ϵ-voisinage de A . Alors d_H^Z est une distance sur les parties compactes de Z .

DEFINITION. - X, Y <u>deux espaces métriques, on note</u> $d_H(X, Y)$ <u>et on appelle distance de Hausdorff de</u> X, Y <u>la quantité</u>

$$d_H(X, Y) = \inf_{Z,f,g} \left\{ d_H^Z(f(X), g(Y)) \; : \; \begin{array}{l} Z \ \underline{\text{espace métrique}} \\ f : X \to Z \ \underline{\text{plongements}} \\ g : Y \to Z \ \underline{\text{isométriques}} \end{array} \right\}$$

<u>Remarque</u> :

i) plongements privilégiés

$$Z = X \coprod Y \qquad \begin{array}{ll} d_z(a,b) = d_x(a,b) & a, b \in X \\ d_z(a,b) = d_y(a,b) & a, b \in Y \\ d_z(a,b) = \operatorname{Sup}(\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y) & a \in X \text{ et } b \in Y \ ; \end{array}$$

alors $d_H(X, Y) \leq \operatorname{Sup}(\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y)$.

En particulier, X et Y compacts $\Rightarrow d_H(X,Y) < \infty$.

ii) Deux espaces métriques de diamètre fini peuvent être à distance nulle sans être isométriques. Ex.

$X = \mathbb{Q} \cap [0,1] \qquad Y = [0,1]$.

iii) X, Y compacts $d_H(X,Y) = 0 \Rightarrow$ isométriques.

iv) Le plongement qui réalise d_H n'est pas nécessairement euclidien $A = \{a,b,c\}$, triangle équilatéral de côté 1

$$\left.\begin{array}{l} A = \{a,b,c\} \text{ , triangle équilatéral de côté } 1 \\ B = \{d\} \end{array}\right) \text{ alors } d_H(A,B) = \frac{1}{2} \; .$$

<u>Des exemples et continuité des invariants</u>.

Des quatre invariants qui nous intéressent, à savoir :

diamètre, dimension, nombres de Betti, valeurs propres,

seul le diamètre est continu, car c'est le seul invariant métrique.

<u>Continuité du diamètre</u>.

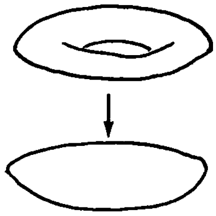
C'est clair

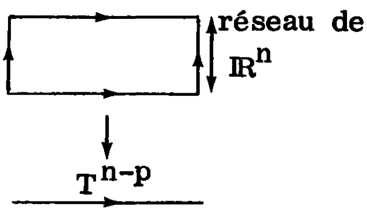
$Y \subset U_\varepsilon(X) \Rightarrow \operatorname{diam} Y \le \operatorname{diam} X + 2\varepsilon$.

<u>La dimension</u>.

1) Elle peut diminuer

$$\begin{array}{l} \mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n-p} \times \mathbb{T}^p \\ \downarrow \\ \mathbb{T}^{n-p} \end{array}$$





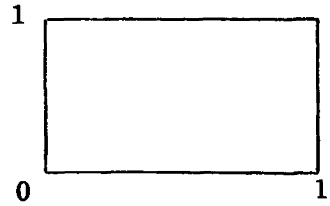
On plonge $\mathbb{T}^{n-p}$ dim $\mathbb{T}^n$.

On met la métrique :

$\mathrm{can}_{\mathbb{T}^{n-p}} \oplus \varepsilon \, \mathrm{can}_{\mathbb{T}^p} = M_\varepsilon$

$M_\varepsilon \xrightarrow{cv} \mathbb{T}^p$.

2) Elle peut augmenter (c'est très important, voir la suite)



$R_n = \{(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n})\ 0 \leq k, \ell \leq n\}$

C = carré de côté 1 (plein) ;

alors clairement :

$d_H(C, R_n) \leq \frac{1}{n}$;

d'où $R_n \xrightarrow[H]{} C$.

<u>La topologie</u> (b_i = nombre de Betti).

1) Elle peut devenir plus simple (exemple des Tores) ;

2) elle peut devenir plus compliquée.

Soit la fibration de Hopf :

$\mathbb{C}^n \supset S^{2n+1} \longrightarrow P^n(\mathbb{C})$ en fibres S^1

(Z, Z') $|Z| + |Z'| = 1$

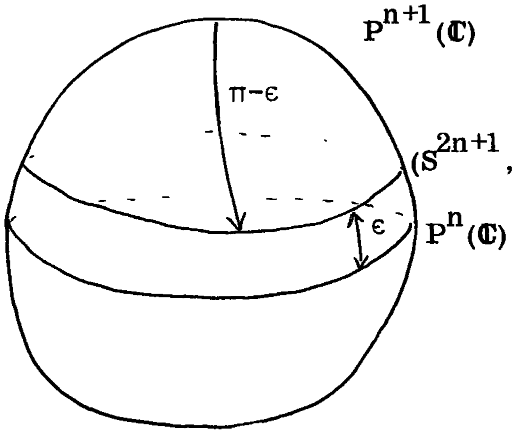
$\wr$

$(e^{i\theta}Z, e^{i\theta}Z')$,

c'est une fibration riemannienne à fibres totalement géodésiques. L'écrasement des fibres par un ϵ donne une famille de métriques telles que

$$(S^{2n+1}, g_\epsilon) \longrightarrow (P^n(\mathbb{C}), \mathrm{can}) .$$

On peut "réaliser" la distance en plongeant toute la situation dans $P^{n+1}(\mathbb{C})$



$d_H(P^n(\mathbb{C}), S^{2n+1}) \leq \epsilon$

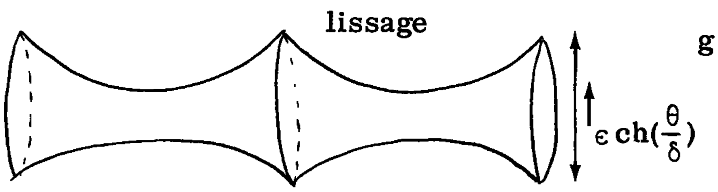
$b_k(S^{2n+1}) = 0$ si $k \neq 0$ et $k \neq 2n+1$

$b_{2p}(P^n(\mathbb{C})) \neq 0$ $(0 < p < n)$

fibration de Hopf = proj. sur le cut. par géod. $\perp$

Le λ_1 .

Il n'est pas continu : soit $S^1 \times S^1$ muni de la métrique telle que



$$g = d\theta^2 + \varepsilon^2 ch^2(\frac{\theta}{\delta}) d\sigma^2$$

Par le mini-max, on montre qu'un bon choix de ε et δ conduit à

$$M_{\varepsilon,\delta} \xrightarrow{d_H} S^1$$

$$\lambda_1(M_{\varepsilon,\delta}) \longrightarrow 0 \neq \lambda_1(S^1) = 1$$

$$\lambda_1(M_{\varepsilon,\delta}) \mathrm{Vol}(M_{\varepsilon,\delta}) \longrightarrow 0 .$$

Un travail analogue peut être fait pour les autres valeurs propres.

II. HAUSDORFF VERSUS LIPSCHITZ

1. On vient de voir deux distances entre espaces métriques

$d_H(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : f(X) \subset U^Z_\varepsilon(g(Y))$ et $g(Y) \subset U^Z_\varepsilon(f(X))$; pour tous les plongements isométriques de $X \xrightarrow{f} Z$, $Y \xrightarrow{g} Z$ pour tous les Z e.m possibles ; U^Z_ε ε-Z-voisinage$\}$

$d_L(X,Y) = \inf\{ |\mathrm{Log}\,\mathrm{dil}(f)| + |\mathrm{Log}\,\mathrm{dil}(f^{-1})|$; pour tous les homéomorphismes Lipschitziens possibles entre X et Y ; si $\emptyset$, $d_L(X,Y) = +\infty\}$.

Comme on l'a vu dans la première partie, d_L est une distance trop rigide (dire qu'elle est finie revient déjà à dire que les deux espaces sont homéomorphes ce qui n'est pas bon pour les théorèmes de finitude) ; quant à d_H elle est un peu trop floue puisqu'elle ne garantit presque aucune continuité des invariants classiques $(b_i, \lambda_i, \dim, \ldots)$ sauf le diamètre.

Certaines hypothèses géométriques vont pourtant nous permettre de comparer ces deux distances. L'idée clé est la suivante.

2. Idée clé : distances v.s espaces finis.

(a) distance de Hausdorff : un recouvrement fini d'un espace métrique X par des ε-boules permet de contrôler X à ε près au sens de d_H : en effet

$$X = \bigcup_{i=1}^{\ell} B(x_i, \varepsilon) \Rightarrow d_H(X, \{x_1, \ldots, x_\ell\}) \le \varepsilon$$

où l'on met sur $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ la distance induite par celle de X .

(b) distance de Lipschitz : un homéomorphisme entre deux espaces (discrets) finis n'est qu'une simple bijection. Dire que deux espaces finis F_1 et F_2 sont d_L proches, c'est dire que l'on a une bijection de F_1 sur F_2 qui respecte presque les distances mutuelles.

Pour comparer deux espaces métriques X et Y au sens de Hausdorff, on est amené à comparer deux ensembles finis F_X et F_Y au sens de Lipschitz. De manière plus précise, on a les notations suivantes qui sont fondamentales dans le travail de Gromov.

3. ε-réseaux et taux de remplissage.

• ε-réseaux : un ε-réseau d'un espace métrique X est une partie R de X telle que $X \subset U_\varepsilon^X(R) = \bigcup_{x \in R} B^X(x, \varepsilon)$.

Exemple fondamental. Soit $\varepsilon > 0$ et par exemple X compact. Soit R une famille maximale de points de X telle que $\forall x, y \in R$, $x \neq y$ $B(x, \varepsilon/2) \cap B(y, \varepsilon/2) = \emptyset$ [on dit un $\frac{\varepsilon}{2}$-remplissage maximal de X] alors, R est un ε-réseau de X .

• taux de remplissage : soit X un espace métrique localement compact.

On appelle taux de remplissage de R-boules par des ε-boules le nombre maximal noté $N(\varepsilon, R, X)$ de ε-boules deux à deux disjointes contenues dans une boule de rayon R (i.e. le nombre maximal de points des ε-remplissages maximaux des boules de rayon R de X).

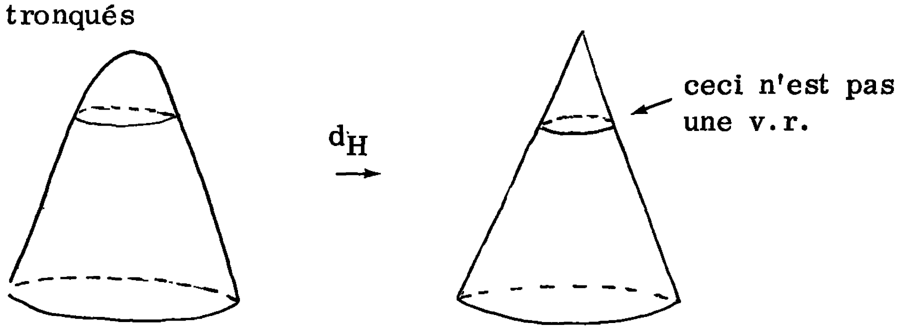
4. Les théorèmes fondamentaux.

THEOREME DE PRECOMPACITE ([G-P-L] p. 65). -
Les variétés riemanniennes (sans bord/compactes/pointées) de dimension n , satisfaisant à l'inégalité $\mathrm{Ricci}(M,g) \geq -(n-1)rg$, $r \in \mathbb{R}$, est une partie précompacte pour la distance de Hausdorff (pointée).

Remarque. L'ensemble en question est relativement compact dans l'ensemble des espaces de longueur (voir [G-P-L] pour la définition), mais les limites posent des problèmes comme le montrent les deux exemples suivants :

(i) $\{e_1, e_2\}$ base orthonormée de $\mathbb{R}^2$; $\Gamma_\varepsilon = \mathbb{Z}e_1 \oplus \varepsilon\mathbb{Z}e_2$
$T_\varepsilon = \mathbb{R}^2/\Gamma_\varepsilon$ (tore plat). Alors Ricci $(T_\varepsilon) \equiv 0$ mais
$T_\varepsilon \xrightarrow{d_H} \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1$: perte de dimension ;

(ii) dans $\mathbb{R}^3$ avec la structure de longueur induite, cônes tronqués



(iii) variété tendant vers un espace de longueur $\neq$ variété de nature différente (Ricci ≥ 0 , diam $\leq D$)

(iv) variété tendant vers un espace de longueur $\neq$ variété

THEOREME DE COMPACITE ([G-P-L] p. 125). -
Sur l'ensemble des variétés riemanniennes sans bord à courbure sectionnelle pincée $|K| \leq \Lambda^2$, de diamètre borné diam $\leq D$ et de rayon d'injectivité minoré inj $\geq \varepsilon$, les structures uniformes de la d_H-convergence et de la d_L-convergence coïncident. En particulier, pour de telles variétés, si $V_i \xrightarrow{d_H} V$, alors pour i assez grand V_i est homéomorphe à V .

Dans la suite de cet exposé, nous donnons une idée de la preuve du théorème de précompacité. Le théorème de compacité, ainsi que le résultat de Peters, feront l'objet d'un exposé ultérieur.

5. Idée de la preuve du théorème de précompacité.

(i) On utilise la notion de taux de remplissage. Si on se limite à des variétés de diamètre uniformément borné pour simplifier, on remarque que pour une famille quelconque $(X_i)_{i\in I}$ de telles variétés $(\mathrm{diam}(X_i) \leq M < +\infty)$ on a $N(\varepsilon, X_i)$ uniformément borné en i : c'est le théorème de Bishop.

THEOREME DE BISHOP. - (M,g) v.r. telle que $\mathrm{Ricci}(M,g) \geq -(n-1)rg$, alors :

$$\frac{\mathrm{vol}\, B^M(x,R)}{\mathrm{vol}\, B^M(x,R')} \geq \frac{\int_0^R (\mathrm{sh}\sqrt{r}\, t)^{n-1} dt}{\int_0^{R'} (\mathrm{sh}\sqrt{r}\, t)^{n-1} dt} \qquad R \leq R' .$$

En particulier, si $(x_i)_{i=1,\dots,\ell}$ est un ε-remplissage maximal de M

$$\underbrace{N(\varepsilon,M)}_{\ell} \inf \mathrm{vol}\, B(x_i,\varepsilon) \leq \mathrm{Vol}\, M = \mathrm{Vol}\, B(x_j , \mathrm{diam}(M))$$

d'où

$$N(\varepsilon,M) \leq \frac{\int_0^D (\mathrm{sh}\sqrt{r}\, t)^{n-1} dt}{\int_0^{\varepsilon} (\mathrm{sh}\sqrt{r}\, t)^{n-1} dt}$$

si $\mathrm{diam}(M) \leq D$.

(ii) Le deuxième pas est alors le théorème suivant ([G-P-L] p.63).

PROPOSITION. - Une famille $(B^{X_i}(x_i,R))_{i\in I}$ de boules de rayon R de variétés riemanniennes est précompacte pour la distance de Hausdorff ssi $X_i \to N(\varepsilon, Y_i)$ avec $Y_i = B^{X_i}(x_i,R)$, est borné sur $(X_i)_{i\in I}$.

Preuve $\Rightarrow$ il suffit de montrer que $d_H(Y_1,Y_2)$ permet de contrôler les $N(\varepsilon,Y_i)$ $i=1,2$. Posons $d_H(Y_1,Y_2) \lneq \delta \ll 1$ et soit $\varepsilon > 0$ donné. Posons $N(\varepsilon,Y_1) = N$. On a alors un ε-remplissage maximal de Y_1 , R_1 avec N boules centrées en $x_1,\dots,x_N$ et donc $d^{Y_1}(x_i,x_j) \geq 2\varepsilon$ $i\neq j$. R_1 est donc un 4ε-réseau de Y_1 . Comme, avec abus de langage, $Y_1 \subset U_\varepsilon(Y_2)$, $\forall x_i \in R_1$, $\exists y_i \in Y_2$ t.q. $d(x_i,y_i) \le \delta$, d'où

$$d(y_i,y_j) \ge 2(\varepsilon-\delta) \qquad N = N(\varepsilon,Y_1) \le N(\varepsilon-\delta\,,\,Y_2)$$

$$\boxed{d_H(Y_1,Y_2) < \delta \;\Rightarrow\; N(\varepsilon,Y_1) \le N(\varepsilon-\delta\,,\,Y_2)}$$

si la famille $(Y_i)_{i\in I}$ est précompacte, étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $i_1,\dots,i_e \ni$: $B^{d_H}(Y_{ij}\,,\,\varepsilon/2)$ recouvre $(Y_i)_{i\in I}$

$\Rightarrow \forall Y \in (Y_i)_{i\in I}$ $N(\varepsilon,Y) \le N(\varepsilon/2\,,\,Y_{i_k})$ pour un certain k ...

$\Leftarrow$ On a donc

$N(\varepsilon,Y_i) \le N$. On peut se limiter aux $n(\le N)$-sous-familles t.q. $N(\varepsilon,Y_i) = k$ $k \le N$.

Soit $R_i \subset Y_i$ un ε-remplissage maximal avec exactement k points. Alors R_i est aussi un 2ε-réseau. Soit $f_i : \{1,\dots,k\}$ R_i des bijections (choisies une fois pour toutes). Alors elles induisent des distances d_i sur $\{1,\dots,k\}$ i.e. des parties d_i de $[2\varepsilon,2R]^{\frac{k(k-1)}{2}}$ (on regarde les $d_i(\ell,m)$, $1\le\ell<m\le k$) d'où par précompacité de cet espace un ensemble fini d'indices tels que

$$\forall i \in I \quad \exists j \in \{1,\dots,\ell\}$$

avec $\sup\limits_{1\le m<p\le k} |d_i(m,p) - d_{i_j}(m,p)| < \varepsilon^2$

d'où $d_L(R_i,R_{i_j}) < \mathrm{Log}(1+\frac{\varepsilon}{2})^2 < \mathrm{Log}(1+3\varepsilon)$

$$\boxed{d_L(R_i,R_{i_j}) < \mathrm{Log}(1+3\varepsilon)}$$

Pour contrôler $d_H(X_i,Y_{i_j})$ on va construire un espace métrique Z ad hoc et des plongements isométriques de Y_i et Y_{i_j} dans Z .

LEMME. - <u>Soient</u> X,Y <u>deux e.m.</u> $\mathrm{diam}(X),\mathrm{diam}(Y) \le D$. <u>Soient</u> $R = (x_p)_{p\in P}$ <u>et</u> $(y_p)_{p\in P} = S$ <u>des</u> ε-<u>réseaux de</u> X,Y

respectivement. Alors :

$$d_L(R,S) \le \mathrm{Log}(1+\alpha) \Rightarrow d_H(X,Y) \le 2\varepsilon + D\alpha .$$

Preuve du lemme. - Soit $Z = X \coprod Y$ avec

$$d^Z(x,y) = \begin{cases} d^X(x,y) & \text{si } x,y \in X \\ d^Y(x,y) & \text{si } x,y \in Y \\ \inf\limits_p (d^X(x,x_p) + d^Y(y,y_p)) + \varepsilon_1 & \text{si } x \in X,\ y \in Y \end{cases} \quad \varepsilon_1 \text{ à choisir}$$

Seule chose non triviale à vérifier, inégalité du triangle pour, par exemple, $x, x' \in X$, $y \in Y$:

$$d^X(x,x') = d(x,x') = d(x,x_p) + d(x_p,x_q) + d(x_q,x')$$

mais $d(x_p,x_q) \le (1+\alpha)d(y_p,y_q)$ (à une renumérotation près !).
Alors

$$\begin{aligned} d^X(x,x') &\le d(x,x_p) + (1+\alpha)d(y_p,y) + (1+\alpha)d(y,y_q) + d(x_q,x') \\ &\le d(x,x_p) + d(y,y_p) + \alpha D + d(x',x_q) + d(y,y_q) + \alpha D \\ &\le d^Z(x,y) + d^Z(y,x') \quad \text{dès que } \alpha D \le \varepsilon_1 . \end{aligned}$$

On prend $\alpha D = \varepsilon_1$.
On a donc bien une distance sur Z et $X \mapsto Z$ $x \mapsto x$, $Y \mapsto Z$ $y \mapsto y$

sont par construction même des plongements isométriques. Dans Z , on a, pour $x \in X$ et $y \in Y$,

$$d^Z(x,y) \le 2\varepsilon + \varepsilon_1 = 2\varepsilon + \alpha D$$

d'où $X \subset \mathcal{U}^Z_{2\varepsilon+\alpha D}(Y)$ et $Y \subset \mathcal{U}^Z_{2\varepsilon+\alpha D}(X)$

d'où encore

$$d_H(X,Y) \le 2\varepsilon + \alpha D . \blacksquare$$

De l'inégalité $d_L(R_i, R_{i_j}) < \mathrm{Log}(1+3\varepsilon)$ on déduit que

$$d_H(Y_i, Y_{i_j}) \le 4\varepsilon + 2R \times 3\varepsilon = 2\varepsilon(2\varepsilon+3R) .$$

Q. E. D.

Remarque. En fait, on montre ainsi que $(Y_i)_{i\in I}$ est relativement compact dans l'ensemble des espaces de longueur localement compacts.

Application du théorème de compacité.

$\exists \epsilon(n,\delta,D)$ $\forall M$ variété de dim n , $\exists g$ métrique sur M t.q
Diam $\leq D$ Inj $\geq \delta$ et $\alpha - \epsilon(n,\delta,D) \leq K \leq \alpha + \epsilon(n,\delta,D)$
$\Rightarrow M$ admet une métrique à courbure constante α .

Preuve. - Supposons $|\alpha| \leq 1$ et soit $\tilde{\mathcal{K}}_{2,D,\delta} = \{M : \exists g : \text{Diam} \leq D \ , \ \text{Inj} \geq \delta \ , \ |K| \leq 2\}$. Pour $M \in \tilde{\mathcal{K}}_{2,D,\delta}$ soit :

$$\epsilon(M) = \inf\{\eta \ni : \exists g \text{ sur } M \text{ avec } \text{Diam} \leq D \ , \ \text{Inj} \geq \delta \text{ et } |K-\alpha| < \eta\} \ .$$

D'après le théorème de Weinstein-Cheeger $\tilde{\mathcal{K}}_{2,D,\delta}$ est fini (on ne regarde pas les métriques mais seulement les structures différentiables). On peut donc considérer $0 < 2\epsilon = \inf\{\epsilon(M) > 0 : M \in \tilde{\mathcal{K}}_{2,D,\delta}\}$ (inf sur un nombre fini de nb > 0).

Si (M,g) vérifie Diam $\leq D$, Inj $\geq \delta$ et $|K-\alpha| \leq \epsilon$, alors $\epsilon(M) = 0$ donc il existe une suite (M,g_i) telle que Diam$(g_i) \leq D$, Inj$(g_i) \geq \delta$ et $|K_{g_i} - \alpha|$ 0 uniformément sur M . Le théorème de compacité dit qu'il existe une sous-suite (M,g_i) qui soit d_H-convergente vers "une v.r. (M,g^*) dont la courbure est α ".

Deux problèmes techniques pour conclure :

$$\begin{cases} g^* \text{ seulement } C^{1,1} \text{ a priori} \\ K(g_i) \to \alpha \Rightarrow K(g^*) = \alpha \text{ pas trivial.} \end{cases}$$ ∎

BIBLIOGRAPHIE

[C-E] J. CHEEGER, D. EBIN, Comparison theorem in riemannian geometry.
American Elsevier N.Y. 1975.

[CR] J. CHEEGER, Finiteness theorems for riemannian manifolds.
American Journal of Math. 92 (1970), 61-74.

[G-L-P] M. GROMOV, J. LAFONTAINE, P. PANSU, Structures métriques pour les variétés riemanniennes.
Cedic Nathan, 1980.

[PS] S. PETERS, Cheeger's Finiteness theorem for diffeomorphism classes of riemannian manifolds;
Journal für die reine und angewandte Math., 349 (1984), 77-82.

[ST] T. SAKAI, Comparison and Finiteness theorems in riemannian geometry.
Advanced Studies in Pure Math. 3 (1984).
Geometry of geodesics and related topics (pp.125-181).

[WN] A. WEINSTEIN, On homotopy type of positively pinched manifold.
Arch. for Math. 18 (1967) pp. 523-524.
