Yves Colin de Verdière

Opérateur de Schrödinger pour un champ magnétique constant sur l'espace euclidien à deux dimensions

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. n° 3, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A3_0>

OPERATEUR DE SCHRODINGER POUR UN CHAMP MAGNETIQUE CONSTANT SUR L'ESPACE EUCLIDIEN A DEUX DIMENSIONS

Exposé de Yves COLIN DE VERDIERE

Cet exposé fait suite à celui de G. BESSON sur les fibrés vectoriels et leurs laplaciens. On étudie le cas d'un fibré hermitien en droites complexes sur $(\mathbb{R}^2, dx^2+dy^2)$ muni d'une connexion à courbure constante. Le laplacien naturel d'un tel fibré est l'opérateur de Schrödinger pour un champ magnétique constant. Le laplacien total sur le fibré unitaire associé s'identifie au laplacien sur un quotient $\mathbb{Z}\backslash G$ du groupe de Heisenberg muni d'une métrique invariante à gauche. Dans un exposé ultérieur, nous décrirons la théorie spectrale des nilvariétés compactes $\Gamma\backslash G$.

1. OPERATEUR DE SCHRODINGER DANS UN CHAMP MAGNETIQUE CONSTANT.

Soit $L \to \mathbb{C}$ le fibré en droites complexes trivial sur $\mathbb{C}$ muni de la structure hermitienne $(z_1, z_2) = z_1\overline{z_2}$ et de la connection $\nabla = \nabla_0 + i\alpha$, $\alpha = \frac{B_0}{2}(xdy - ydx)$; $\omega = d\alpha = B_0 dx \wedge dy$ c'est-à-dire :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{B_0}{2}y \quad ; \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y} + i\frac{B_0}{2}x \quad ;$$

$$\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\right] = iB_0 = i\omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) .$$

$H_{B_0} = -\left(\nabla^2_{\frac{\partial}{\partial x}} + \nabla^2_{\frac{\partial}{\partial y}}\right)$ est le laplacien naturel sur les sections de L, c'est aussi l'opérateur de Schrödinger dans le champ magnétique B_0.

Une expression développée de H_{B_0} est :

$$H_{B_0} = -\Delta + i B_0 \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{B_0^2}{4}(x^2+y^2) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} .$$

On peut calculer aisément le spectre de H_{B_0} en utilisant les opérateurs $A = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B_0}{4}\bar{z}$; $A^* = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{B_0}{4} z$ et les relations $AA^* = \frac{1}{4} H_{B_0} + \frac{B_0}{4}$, $A^*A = \frac{1}{4} H_{B_0} - \frac{B_0}{4}$ et donc $[A, A^*] = \frac{B_0}{2}$, ainsi que le lemme algébrique classique permettant de calculer le spectre de l'oscillateur harmonique (voir exposé suivant : spectre des nilvariétés compactes) : le spectre est formé des $(2k+1)|B_0|$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ si $B_0 \neq 0$. Les différents espaces propres étant de dimension infinie, on remarque dans tous les cas que $H_{B_0} \geq |B_0|$.

<u>ESPACES PROPRES</u> $(B_0 > 0)$.

$$E_{B_0} = \left\{ e^{-\frac{B_0}{4}|z|^2} f(z) \,\Big|\, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \right\} \cap L^2(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} A$$

$$E_{3B_0} = A^*(E_{B_0}) \quad , \text{ etc...}$$

2. GROUPE DE HEISENBERG.

Soit G le groupe des automorphismes de L avec connexion qui se projettent sur des translations de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$; ils sont de la forme :

$$F(z,t) = \left(z+c\ ,\ e^{i(\theta_0 - \frac{B_0}{2}(c_1 y - c_2 x))}\, t\right)$$

avec $c = c_1 + i c_2$.

La loi de composition est :

$$[c_1, \theta_1]\,[c_2, \theta_2] = [c_1+c_2\ ,\ \theta_1 + \theta_2 + \tfrac{1}{2}\omega(c_1, c_2)]\ ,$$

G est donc naturellement isomorphe au groupe $\mathbb{Z}\backslash H_3$, quotient du groupe de Heisenberg par un sous-groupe central cyclique.

La preuve de ce résultat ne présente pas de difficultés. On peut identifier G au fibré unitaire de L par

$$[c, \theta] \longmapsto [c, \theta]\,(0, 1) = (c, e^{i\theta})\ .$$

La métrique riemannienne utilisée par G. Besson sur le fibré principal dans l'exposé précédent est ici $dx^2 + dy^2 + (d\theta + \alpha)^2$ et est invariante à gauche sur $\mathbb{Z}\backslash G$.

Posant :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B_0 y}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\ ,\quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{B_0 x}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\quad \text{et}\quad Z = \frac{\partial}{\partial\theta}$$

on a les laplaciens :

$\square = -(X^2+Y^2)$ qui est le laplacien de Kohn (horizontal)

et

$\Delta = \square - Z^2$ qui est le laplacien total.

$$\Box = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{B_0}{2}\, y \frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{B_0}{2}\, x \frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 \quad ;$$

donc sur $\mathcal{H}_{-1} = \{f(z)\, e^{-i\theta}\}$, $\Box$ coihcide avec H_{B_0} , de même sur $\mathcal{H}_n = \{f(z)\, e^{in\theta}\}$, $\Box$ coihcide avec H_{-nB_0} .

3. FORMULES EXPLICITES POUR LES DIFFUSIONS.

Rappelons la formule de Mehler qui donne le noyau de $e^{-t\Omega}$ où Ω est l'oscillateur harmonique à une dimension :

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2\right) .$$

On a (Simon 1 ou 2) :

$$[e^{-t\Omega}]\ (x,y) = (\omega/2\pi \operatorname{sh} \omega t)^{\frac{1}{2}}\ e^{-(\omega/2\operatorname{sh}\omega t)[\operatorname{ch}\omega t(x^2+y^2)-2xy]} .$$

On veut calculer le noyau $K(t,z,z')$ de $e^{-tH_{B_0}}$. On procède en 2 étapes :

1) Calcul de $K(t,z,0)$

2) Utilisation de l'invariance par G du noyau $\mathcal{K}$ de $e^{-t\Box}$.

Il est aisé de montrer que $K(t,z,0)$ est invariant par rotation dans $\mathbb{R}^2$ et a même noyau que $\exp(-t(\Delta_0 + \frac{B_0^2}{4}(x^2+y^2)))$ que l'on calcule par Mehler.

Ensuite, $\mathcal{K}(t,z,z',\theta,\theta') = \sum \frac{1}{2\pi} K_n(t,z,z')\, e^{in(\theta-\theta')}$ avec $K = K_{-1}$. D'où :

$$K_{-1}(t,z,z') = K_{-1}(t,z-z',0)\cdot e^{i\omega(z,z')/2} .$$

On en déduit la formule :

$$K(t,z,z') = (B_0/4\pi \text{ sh } B_0 t) \exp\left[-(B_0/\text{th } B_0 t)\,|z-z'|^2 + \frac{i}{2} B_0(xy'-yx')\right] .$$

D'où en particulier le noyau sur la diagonale

$$K(t,z,z') = \frac{B_0}{4\pi \text{sh } B_0 t} .$$

BIBLIOGRAPHIE

B. GAVEAU - Acta Mathematica 139 (1977), pp. 96-153.

F. MICHAU - Thèse de 3ème cycle. Institut Fourier de Grenoble (1982).

B. SIMON (1) - Functional integration and quantum physics. Academic press (n° 86).

B. SIMON (2) - J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON . Duke Math. J. 45 (1978), pp. 847-883.

R. HERMAN - Young Mills, Kaluza Klein and the Einstein program. Interdisciplinary Mathematics, volume 19, Math. Sci. Press.

et voir la Bibliographie de l'exposé précédent.