Séminaire de Théorie
spectrale et géométrie

Gérard Besson

Fibrés vectoriels et principaux : notions de base

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 2 (1983-1984), exp. n° 2, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A2_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie
CHAMBERY-GRENOBLE

1983-1984

FIBRES VECTORIELS ET PRINCIPAUX : notions de base.

par Gérard BESSON

On se propose, dans cet exposé, de mettre en place de manière succincte les notions de base liées aux fibrés vectoriels et connexions, en vue d'étudier les Laplaciens correspondants sur les sections de ces fibrés.

Une application à l'étude de l'opérateur de Schrödinger pour un champ magnétique constant sera donné dans l'exposé suivant.

Pour bien comprendre le rôle joué par ces structures en physique, le lecteur peut se reporter à [HN] et [D-N-F] .

Dans ce qui suit B désignera une variété riemannienne complète et g^* sa métrique. Soit (E, π, B) un fibré vectoriel sur B :

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B \end{array}$$

Nous nous proposons dans ce paragraphe de mettre en place les notions de base nécessaire à l'étude des Laplaciens sur les sections de ce fibré vectoriel. Nos principales références sur ce sujet sont [G-H-V, II] , [D-N-F, II] et [K-N, I] .

I. - CONSTRUCTION DU FIBRE DES REPERES DE $(E, \pi, B) = \xi$.

Soit F la fibre type du fibré vectoriel (F est un espace vectoriel).

1. DEFINITION. On appelle repère de E au-dessus de $b \in B$ un isomorphisme de F sur F_b (fibre au-dessus de b).

Soit $G_b = GL(F_b)$, le travail consiste à construire un fibré dont la fibre au-dessus de b est G_b , si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ est un système de trivialisation de ξ , c'est-à-dire :

$$\begin{tikzcd} E|U_\alpha \arrow[d] & U_\alpha \times F \arrow[l, "\psi_\alpha"', "\sim"] \arrow[dl] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

alors $\psi_{\alpha,b} = \psi_\alpha(b, \cdot)$ est un repère au-dessus de b qui détermine une bijection :

$$\varphi_{\alpha,b} : GL(F) \longrightarrow G_b$$
$$\varphi \longmapsto \psi_{\alpha,b} \circ \varphi$$

cette opération n'est rien d'autre que d'affirmer qu'un changement de repère de F_b peut-être lu sur F via la trivialisation.

Alors si $P = \bigcup_B G_b$ et p désigne la projection naturelle sur B . L'ensemble des bijections φ_α :

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times GL(F) \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$
$$\varphi_\alpha(b, \varphi) = \psi_{\alpha,b} \circ \varphi \quad , \quad b \in B \ , \ \varphi \in GL(F)$$

défini une fibration localement triviale de P sur B . Pour les problèmes de différentiabilité le lecteur peut se reporter à [G-H-V, I sec. 1.1.3] .

On définit enfin une action à droite de GL(F) sur P , en faisant agir ce groupe sur chaque G_b de manière suivante :

$$\varphi_b \in G_b \ , \quad \varphi \in GL(F) \ , \quad \mathcal{R}_\varphi(\varphi_b) = \varphi_b \circ \varphi \ .$$

2. Remarque.

Si $b \in U_\alpha \cap U_b$ le changement de trivialisation du fibré principal est défini par :

$$(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_a)(b, \varphi) = (b, \psi_{\alpha,b}^{-1} \circ \psi_{\beta,b} \circ \varphi) \ , \quad \varphi \in GL(F)$$

donc par multiplication à gauche par $(\psi_{\alpha,b}^{-1} \circ \psi_{\beta,b}) \in GL(F)$. Pour définir une action sur P il suffit de le faire dans chaque trivialisation en sorte qu'elle soit compatible avec le changement de carte, or GL(F) n'étant pas commutatif, la seule façon de faire commuter deux de ses représentations sur un même espace est d'en faire agir une à gauche et l'autre à droite.

La fibration $P \xrightarrow{p} B$ est appelée fibré des repères de ξ . C'est un fibré principal car muni d'une action libre à droite de GL(F) . GL(F) est appelé groupe structural du fibré vectoriel ξ .

II. - REDUCTION DU GROUPE STRUCTURAL.

Considérons la construction suivante (fondamentale dans la suite) :

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\text{1ère projection}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

où la projection q est le passage au quotient par l'action à droite de

$GL(F)$ sur $P \times F$:

$$\begin{aligned} GL(F) \times P \times F &\longrightarrow P \times F \\ (\varphi, x, f) &\longmapsto (x \cdot \varphi, \varphi^{-1} \cdot f) \ . \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que l'espace quotient est isomorphe à E par un isomorphisme fort de fibré vectoriel au-dessus de B (en utilisant les trivialisations par exemple). Le fibré ξ est alors appelé fibre associé à (P, p, B) de groupe structural $GL(F)$ et de fibre F .

Les problèmes de réduction du groupe structural de ξ à des groupes plus petit peuvent être très complexes. Nous ne mentionnerons ici que leurs aspects les plus élémentaires. Plus précisément, on peut énoncer le

3. <u>PRINCIPE</u>. Réduire le groupe structural de ξ est équivalent à munir celui-ci d'une structure supplémentaire.

(Tous les groupes considérés seront des Groupes de Lie).

Par exemple, si F est $\mathbb{R}^n$, réduire le groupe structural de ξ à $O(n)$ revient à le munir d'une structure euclidienne, le fibré principal auquel il est associé est alors le fibré des repères orthonormés. La construction peut être faite en coordonnées locales très facilement. Il en va de même pour $SO(n)$ (repères directs, structure euclidienne + orientation), $U(n)$ (fibré complexe + structure hermitienne), etc...

Un cas important est celui de la réduction au groupe d'holonomie d'une connexion.

III. - CONNEXIONS, COURBURE ET HOLONOMIE.

Rappelons la définition d'une connexion principale ([K-N] I, p. 63).

4. DEFINITION. Une connexion principale sur le fibré (P,p,B) est la donnée en chaque point x de P d'un supplémentaire H_x de l'espace tangent V_x en x à la fibre de p tel que :

a) $H_{xg} = (R_g)_*(H_x)$ pour $g \in G$ groupe structural.

b) H_x dépend différentiablement de $x \in P$.

Cette notion est équivalente (cf. [K-N] , I, p. 64) à la donnée d'une 1-forme ω sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G vérifiant

a') $\omega(A^*) = A$ pour $A \in \mathfrak{g}$

b') $(R_g)^*(\omega) = ad(g^{-1})\omega$ où ad désigne la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}$.

A^* étant construit de la manière suivante : l'action de G sur P induit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des champs de vecteurs sur P , A^* est l'image de A par cet homomorphisme ; ou plus simplement

$$A^*_x = \frac{d}{dt}(x \cdot \exp(tA))_{|t=0} .$$

L'espace H_x est alors

$$H_x = \{h \in T_xP / \omega_x(h) = 0\} ;$$

il s'appelle sous-espace horizontal en x et V_x , sous-espace vertical. La connexion est donc une distribution (horizontale) dans TP supplémentaire à la distribution des espaces tangents des fibres.

La notion de relèvement horizontal d'un champ de vecteurs X^* de B en un champ de vecteurs horizontal X sur P est claire :

X est l'unique champ de vecteurs horizontal sur P tel que $p_*(X) = X^*$.

5. <u>TRANSPORT PARALLELE</u>. Soit τ^* une courbe C^1 (par morceaux) sur B partant d'un point b_0 et $x_0 \in P$ un point de la fibre de b_0 l'unique courbe horizontale τ se projetant sur τ^* et partant de x_0 dans P permet de définir le transport parallèle horizontal sur P comme bijection entre la fibre de b_0 et la fibre de $b_1 = \tau^*(1)$.

Cette notion très importante admet une généralisation qui est le transport parallèle stochastique d'Ito ([BT]) beaucoup plus difficile à définir faisant intervenir la diffusion horizontale sur P .

6. <u>HOLONOMIE</u>. Pour tout $b \in B$ désignons par $\Gamma(b)$ l'espace des lacets en b dans B . Si τ^* est dans $\Gamma(b)$ le relevé horizontal τ définit un isomorphisme de la fibre au-dessus de b dans P . La collection de ces isomorphismes est munie d'une structure de groupe et est appelée le groupe d'holonomie de la connexion avec point base b . On définit alors le groupe d'holonomie restreint en utilisant les lacets homotopes à 0 . Les notations seront les suivantes :

$\mathrm{Hol}(b)$ = holonomie à point base b
$\mathrm{Hol}^o(b)$ = holonomie restreinte à point base b .

De nombreux théorèmes ont été démontrés concernant ces deux objets, nous ne retiendrons que le suivant :

7. THEOREME. - Si B est paracompacte et connexe, pour tout b dans B

a) $\mathrm{Hol}^{o}(b)$ est un sous-groupe de Lie connexe de G,

b) $\mathrm{Hol}^{o}(b)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Hol}(b)$ et $\mathrm{Hol}(b)/\mathrm{Hol}^{o}(b)$ est dénombrable.

8. COURBURE. La courbure (de la connexion de forme ω) est la version infinitésimale de l'holonomie. Donnons-en une définition qui est en fait un théorème dans les références utilisées. La courbure est la 2-forme Ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe structural donnée par l'équation de structure :

(9) $d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X),\omega(Y)] + \Omega(X,Y)$ ([K-N], I, p.77)

pour X et Y champs de vecteurs sur P.

Le lien avec l'holonomie est explicité par le théorème suivant :

10. THEOREME (Ambrose-Singer). Si B est paracompacte et connexe alors l'algèbre de Lie de $\mathrm{Hol}^{o}(b)$ est le sous-espace de $\mathcal{G}$ engendré par les éléments de la forme $\Omega_y(X,Y)$ où y parcourt l'ensemble des points de P pouvant être liés horizontalement à un point $x_0 \in P$ fixé et X et Y des champs de vecteurs horizontaux en y.

11. DERIVATION COVARIANTE. Soit $\mathcal{S}(E)$ l'espace des sections C^{∞} du fibré vectoriel ξ. Rappelons la définition :

12. DEFINITION. On appelle dérivation covariante sur $\mathcal{S}(E)$ une application ∇ $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$)-bilinéaire de $\mathcal{S}(TB) \times \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$ ($\mathcal{S}(TB) = \{$champs de vecteurs C^{∞} sur $B)$, vérifiant de plus

1) ∇s est $C^{\infty}(B)$ linéaire pour tout s dans $\mathcal{S}(E)$;

2) si X est dans $\mathcal{S}(TB)$, s dans $\mathcal{S}(E)$ et f une fonction C^{∞} sur B

$\nabla_X(fs) = (X\cdot f)s + f\,\nabla_X s$ (∇_X est une dérivation).

La notion de dérivation covariante sur les sections d'un fibré est équivalente à celle de connexion ou distribution horizontale sur E . La description du passage d'une des notions à l'autre est classique et peut être consultée dans [K-N] I par exemple.

Donnons maintenant la justification de la construction précédente. On suppose donc l'espace des sections de E muni d'une dérivation covariante correspondant à une connexion (distribution horizontale sur P ou E).

13 PROPOSITION. - Il existe une correspondance biunivoque entre les sections s de ξ et les fonctions φ sur P à valeurs dans F qui vérifient :

$\varphi(p.g) = g^{-1}.\varphi(p)$.

De plus, si X^* est un champ de vecteurs sur B et X son relevé horizontal sur P , alors $\nabla_{X^*}s$ correspond à $X\cdot\varphi$ (qui vérifie la condition d'équivariance car X est invariant).

Cette proposition est fondamentale car elle permet de travailler sur les sections d'un fibré vectoriel comme sur des fonctions.

14. STRUCTURE METRIQUE SUR E . Dans tout ce qui suit nous supposerons que le fibré ξ est euclidien (resp. hermitien etc...) c'est-à-dire muni d'un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) dans chaque fibre et dépendant de manière C^{∞} de la base. Cette structure supplémentaire correspond à la réduction du groupe structural à $O(n)$ (resp. $U(n)$) . Une connexion sera dite métrique si et seulement si elle est dé-

finie sur le fibré principal correspondant. Pour la dérivation covariante associée, ∇ , ceci est équivalent à

$$\nabla_X\langle s, s'\rangle = \langle \nabla_X s, s'\rangle + \langle s, \nabla_X s'\rangle$$

où s et s' sont deux sections de ξ , X un champ de vecteurs sur B et $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la structure euclidienne (resp. hermitienne).

Le groupe d'holonomie devient alors un sous-groupe du groupe des isométries de la fibre type.

15. COURBURE ASSOCIEE A LA DERIVATION COVARIANTE.

La définition de ∇ permet d'introduire la courbure de la manière suivante : si X et Y sont des champs de vecteurs sur B

(16) $$R(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \,.$$

On vérifie aisément que cette notion est tensorielle en X et Y . $R(X, Y)_{|b}$ est alors un endomorphisme de la fibre E_b . R est donc une 2-forme sur B à valeurs dans les endomorphismes de ξ .

17. METRIQUE SUR P . Il existe un choix de métrique sur l'espace total P du fibré principal particulièrement intéressant dans la situation présente. L'application p étant une submersion, p réalise un isomorphisme entre H_x pour $x \in P$ et T_bB pour $b = p(x)$. Il suffit alors de définir la métrique sur H_x de sorte que $p_*|_{H_x}$ soit une isométrie sur T_bB . Enfin, l'espace V_x s'identifiant à l'espace tangent à l'élément neutre de G, on définit la métrique sur V_x de sorte que cette identification soit une isométrie, G étant muni d'une métrique biinvariante (le volume de G étant fixé à 1 par exemple). La métrique ainsi obtenue sur P est telle que l'application p devient une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques (c'est-à-dire telle que la deuxième forme fondamentale de la fibre plongée dans P soit identiquement nulle). Ce dernier point étant équivalent au fait que

le transport parallèle horizontal soit une isométrie (cf. [BE] chapitre "Riemanian Submersions").

Dans une telle situation O'Neil à introduit [cf. OL] un tenseur (2.1) sur P, dont la valeur sur deux champs de vecteurs X et Y est donnée par :

(18) $$A_X Y = h(D_{h(X)} v(Y)) + v(D_{h(X)} h(Y))$$

où D est la dérivation covariante sur P associée à la métrique précédemment définie et $h(\cdot)$ et $v(\cdot)$ désigne les projections sur les sous-fibrés horizontaux et verticaux du fibré tangent à D. Les propriétés élémentaires de A sont les suivantes :

on désigne par U, V, W (resp. X, Y, Z) des champs de vecteurs verticaux (resp. horizontaux) :

$$A_U X = A_U V = 0$$
$$A_X U = h(D_X U) \quad \text{et} \quad A_X Y = v(D_X Y)$$
$$A_X Y = -A_Y X \quad \text{d'où} \quad A_X Y = \tfrac{1}{2} v([X, Y]) \ .$$

Cette dernière formule faisant apparaître A comme l'obstruction à l'intégrabilité de la distribution horizontale, au même titre que la courbure Ω de la connexion et la courbure R^{∇} provenant de la dérivation covariante associée. Il est donc naturel d'espérer des relations entre ces objets. Elles sont résumées dans la

19. PROPOSITION. - Si X, Y désigne les relevés horizontaux sur P des champs de vecteurs X^* et Y^* sur B, on a les relations suivantes

$$\Omega(X, Y) = -\omega(A_X Y) \quad \text{et} \quad A_X Y = \tfrac{1}{2} R^{\nabla}(X^*, Y^*) \ .$$

Preuve.

α) $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y])$ ([K-N] I, p.78) et par définition de ω, $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y]) = -\frac{1}{2}\omega(v([X, Y]))$ d'où la formule. Remarquons que $v([X,Y])$ est un vecteur tangent à la fibre donc comme tel, il est naturellement associé à un élément de l'algèbre de Lie de G, et cette correspondance est donnée par la forme de connexion ω.

β) Soit s une section de ξ et φ la fonction sur P équivariante qui lui est associée.

$$R^{\nabla}(X^*, Y^*)s = \nabla_{X^*}\nabla_{Y^*}s - \nabla_{Y^*}\nabla_{X^*}s - \nabla_{[X^*, Y^*]}s$$

qui correspond à

$$[X,Y]\cdot\varphi - \widetilde{[X^*,Y^*]}\cdot\varphi$$

où $\widetilde{[X^*,Y^*]}$ est le relevé horizontal de $[X^*,Y^*]$ (crochet sur B) qui est également la partie horizontale de $[X,Y]$ (crochet sur P). (cf. [BE] et [OL])

$$R^{\nabla}(X^*, Y^*)s \simeq v([X,Y])\varphi = 2(A_X Y)\varphi \ .$$

$A_X Y$ est identifié à l'élément de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ auquel il correspond par ω et donc considéré comme un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^n$. ∎

Le coefficient $\frac{1}{2}$ n'apparait que dans la dernière formule car on a utilisé les conventions de [K-N] pour la différentielle et l'antisymétrisée $A\omega$ d'une 2-forme :

$$(A\omega)(X,Y) = \left(\tfrac{1}{2}\right)\{\omega(X,Y) - \omega(Y,X)\}$$
$$d\omega(X,Y) = \left(\tfrac{1}{2}\right)\{X\cdot\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\} \ .$$

20. <u>QUELQUES FORMULES D'O'NEILL.</u> La situation de submersion riemannienne à fibre totalement géodésique a été étudiée par O'Neill [OL], en particulier les formules reliant les différentes courbures de la base, de l'espace total et de la fibre ont été établies. Quelques unes d'entre elles nous seront utiles. Nous utiliserons les conventions suivantes :

... $U, V, W, \ldots$ champs de vecteurs verticaux

... $X, Y, Z, \ldots$ champs de vecteurs horizontaux

... S^* objet S sur la base

... $\hat{S}$ objet S sur la fibre

... S objet S sur l'espace total P .

K courbure sectionnelle, Ric courbure de Ricci, u courbure scalaire.

$$(21) \quad \begin{cases} K(U,V) = \hat{K}(U,V) \\ K(X,U) = |A_X U|^2 \\ K(X,Y) = K^*(X^*,Y^*) - 3\,|A_X Y|^2 \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \mathrm{Ric}(U,V) = \widehat{\mathrm{Ric}}(U,V) + (AU, AV) \\ \mathrm{Ric}(X,U) = -((\delta^* A)X, U) \\ \mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}^*(X^*,Y^*) - 2(A_X, A_Y) \\ \delta^* A = -\sum_i (D_{X_i} A)_{X_i} \quad \text{(pour } (X_i) \text{ base orthonormale locale de } H_x) \end{cases}$$

$$u = u^* + \hat{u} - |A|^2 \quad .$$

Ces formules sont un outil dans la construction de métriques à courbure (scalaire par exemple) strictement positive.

Si $\mathcal{H}$ vérifie $\delta^* A = 0$ on dit qu'il satisfait la condition de Yang-Mills

$$(A_X, A_Y) = \sum_i (A_X X_i, A_Y X_i) = \sum_j (A_X U_j, A_Y U_j)$$

$$(AU, AV) = \sum_i (A_{X_i} U, A_{X_i} V)$$

De nombreuses autres formules et applications peuvent être consultées dans [BE] .

IV. - ENFIN DES LAPLACIENS !

Rappelons que la connexion ∇ est supposée compatible avec la structure euclidienne des fibres. On supposera de plus le fibré orienté et la fibre $F = \mathbb{R}^n$ (pour des raisons de simplicité uniquement).

Alors, ∇ permet de définir de manière naturelle un opérateur auto-adjoint opérant sur $S(E)$, appelé Laplacien brut et noté $\bar{\Delta}$. Plus précisément : soit $(Y_i = X_i^*)$ un repère (local) orthonormé mobile sur B, s et s' deux sections C^∞ à supports compacts dans l'ouvert correspondant. L'opérateur $\bar{\Delta}$ est associé à la forme quadratique suivante :

$$q(s) = \int_B |\nabla s|^2 d\mu$$

où $|\nabla s|$ est la norme de la 1-forme à valeurs dans $S(E)$

$$X \to \nabla_X s$$

donc

$$|\nabla s|^2 = \sum_i |\nabla_{Y_i} s|^2 .$$

Alors

$$\int_B \langle \nabla s, \nabla s' \rangle d\mu = \int_B \sum_i \langle \nabla_{Y_i} s, \nabla_{Y_i} s' \rangle d\mu$$

$$= \sum_i \int_B \left(Y_i \langle \nabla_{Y_i} s, s' \rangle - \langle \nabla_{Y_i} (\nabla_{Y_i} s), s' \rangle \right) d\mu .$$

On utilise ici la compatibilité de ∇ avec la métrique. Or

$$\int_B Y_i \langle \nabla_{Y_i} s, s' \rangle d\mu = \int_B \langle \nabla_{Y_i} s, s' \rangle \operatorname{div}(Y_i) d\mu$$

où div est la divergence ([B-G-M] p. 125). L'expression locale de $\operatorname{div} Y_i$ est :

$$\operatorname{div} Y_i = -\sum_j (Y_j \langle Y_i, Y_j \rangle - \langle Y_i, D_{Y_j} Y_j \rangle)$$

$$= \sum_j \langle Y_i, D_{Y_j} Y_j \rangle$$

(voir aussi [GT]).

Alors

$$\sum_i \int_B Y_i \langle \nabla_{Y_i} s, s' \rangle d\mu = \sum_{i,j} \int_B \langle \nabla_{Y_i} s, s' \rangle \langle Y_i, D_{Y_j} Y_j \rangle$$
$$= \sum_j \int_B \langle \nabla_{D_{Y_j} Y_j} s, s' \rangle d\mu$$

d'où

$$\int_B \langle \nabla s, \nabla s' \rangle = -\sum_i \int_B \Big(\langle \nabla_{Y_i} (\nabla_{Y_i} s), s' \rangle - \langle \nabla_{D_{Y_j} Y_j} s, s' \rangle \Big) d\mu$$

on en déduit l'expression du Laplacien

$$\bar{\Delta} s = -\sum_i \Big(\nabla_{X_i^*} (\nabla_{X_i^*} s) - \nabla_{D_{X_i^*} X_i^*} (s) \Big)$$

par la correspondance utilisée précédemment (et avec les mêmes notations), $\bar{\Delta} s$ est associée à la fonction sur P (à valeurs dans F) suivante :

$$\Delta_h \varphi = -\sum (X_i \circ X_i - D_{X_i} X_i) \varphi \ .$$

En effet si X_i est le champ basique associé à X_i^*, $D_{X_i} X_i$ est basique et associé à $D_{X_i^*} X_i^*$, (cf. [OL]).

L'opérateur Δ_h est le Laplacien horizontal, défini par la submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques $P \xrightarrow{p} B$, apparaissant dans [B-B].

Rappelons que dans cette situation le Laplacien Δ_p de P vérifie :

i) $\Delta_p = \Delta_v + \Delta_h$

ii) $[\Delta_v, \Delta_h] = 0$

où Δ_h est le Laplacien horizontal et Δ_v le Laplacien vertical défini de la manière suivante :

$$\Delta_v(f)(x) = \Delta_{F_b}(f \restriction F_b)(x) \quad , \quad b \in B \ , \quad F_b = p^{-1}(\{b\}) \ , \ x \in F_b \ .$$

Les fibres de la submersion considérée étant des sous-variétés totalement géodésiques de P , le transport parallèle horizontal est isométrique, la relation ii) en découle immédiatement.

Par ailleurs, si φ correspond à une section du fibré ξ , elle vérifie la relation d'équivariance :

$$\varphi(p\cdot g) = g^{-1}\cdot\varphi(p)$$

soit p_0 un point de la fibre de $b_0 \in B$, la restriction de φ à cette fibre est donc la fonction

$$p = p_0 g \longmapsto g^{-1}\cdot\varphi(p_0) \quad \text{où} \quad \varphi(p_0) \in F \ .$$

La fibre étant isométrique au groupe structural G muni d'une métrique biinvariante, on a

$$(\Delta_v\varphi)(p) = (\Delta_G\rho)\cdot\varphi(p_0)$$

où ρ est la fonction sur G

$$\begin{aligned} & G \longrightarrow SO(n) \\ \rho : \ & g \longmapsto g^{-1} \ . \end{aligned}$$

Le fibré vectoriel ayant été supposé orienté, on peut prendre $G = SO(n)$, la métrique biinvariante étant choisie de sorte que $SO(n)$ soit l'espace des repères orthonormés directs de S^{n-1} . On a alors

$$\Delta_G\rho = (n-1)\rho$$

d'où

$$(\Delta_v\varphi)(p) = (n-1)\varphi(p) \ .$$

En résumé

$$\bar{\Delta}s \sim \Delta_h\varphi = (\Delta_p-\Delta_v)\varphi = \Delta_p\varphi - (n-1)\varphi \ .$$

<u>CAS PARTICULIER</u> 1.

Si B est compacte, le Laplacien brut est à résolvante compacte et a donc un spectre de valeurs propres, discret s'accumulant en $+\infty$. La relation précédente se traduit donc par l'égalité :

$$\bar{\lambda} = \lambda_p - (n-1)$$

(pour toute valeur propre $\bar{\lambda}$ de $\bar{\Delta}$, il existe une valeur propre λ_p de Δ_p telle que l'égalité précédente soit vérifiée.

Des remarques analogues peuvent être faites lorsque le fibré ξ a une structure quelconque (Fibré vectoriel complexe hermitien, symplectique, spinoriel, etc...).

CAS PARTICULIER 2.

Soit un fibré vectoriel $\xi : E \to B$, en droites complexes et ξ^k sa puissance tensorielle k-ième

$$\begin{array}{c} E' \\ \downarrow \xi^k \\ B \end{array}$$

ξ^k est muni de la connexion naturelle induite par ∇ et de la structure hermitienne déduite de ξ . La construction précédente est

$$\begin{tikzcd} & P' \times \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r] & P' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

où la représentation de S^1 dans $\mathbb{C}$ est la représentation canonique. Toutefois, sachant que E' est un produit tensoriel, on peut utiliser le même fibré principal que pour ξ .

$$\begin{tikzcd} & P \times \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r] & P \arrow[r] & B \end{tikzcd} .$$

La représentation de S^1 dans $\mathbb{C}$ est alors la puissance k-ième de la précédente, c'est-à-dire

$$S^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\lambda, Z) \longmapsto \lambda^k . Z \ .$$

L'étude des Laplaciens conduit alors à la formule :

$$\bar{\lambda}' = \lambda_P - k^2$$

L'exposé suivant a pour but d'étudier un exemple précis dans lequel cette construction joue un rôle important.

BIBLIOGRAPHIE

[B-B] J.P. BOURGUIGNON & L. BERARD BERGERY, Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic Fibres. Illinois Journal of Maths, vol.26, number 2, 1982.

[BE] A. BESSE, Einstein Manifolds (à paraître).

[B-G-M] M. BERGER, GAUDUCHON, MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes n°194, Springer Verlag.

[BT] J.M. BISMUT, Mécanique aléatoire, Lecture Notes in Math. 866, Berlin Heidelberg New-York, Springer Verlag.

[D-N-F] B. DOUBROVINE, S. NOVIKOF et A. FOMENKO, Géométrie contemporaine, Tomes 1 et 2, Editions de Moscou.

[GT] S. GALLOT, Cours de géométrie riemannienne, Université Paris 7.

[G-H-V] II W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, tome II, Connections, curvature and cohomologie, Academic Press.

[HN] R. HERMAN, Yang Mills, Kaluza Klein and the Einstein program. Interdisciplinary Mathematics, vol. XIX, Math. Sci. Press.

[K-N] I S. KOBAYASHI et N. NOMIZU, tome I. Foundations of Differential Geometry. Tracts in Mathematics n°15. Interscience.

[OL] B. O'NEILL, The fundamental equations of a submersion, Mich. Math. J. 13 (1966), 459-469.
