

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

OCTAVE GALVANI

**Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en
géométrie euclidienne**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1944

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__265__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Série A
N° de Série :
2088
N° D'ORDRE :
2955

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR OCTAVE GALVANI

1^{re} THÈSE. — SUR LA RÉALISATION DES ESPACES PONCTUELS A TORSION
EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE.

2^e THÈSE. — CONSTRUCTION DE COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES.

Soutenues le 8 août 1944 devant la Commission d'Examen.

MM. ÉLIE CARTAN	} <i>Président.</i>	
RENÉ GARNIER		} <i>Examineurs.</i>
GEORGES BOULIGAND		

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1945

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... PAUL MONTEL.

PROFESSEURS

P. MONTEL.....	†	Théorie des Fonctions.	G. RIBAUD.....	†	Hautes températures.
L. BLARINGHEM....	†	Botanique.	CHAZY.....	†	Mécanique analytique.
G. JULIA.....	†	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	GAULT.....	†	Chimie (P.C.B.).
C. MAUGUIN.....	†	Minéralogie.	CROZE.....	†	Physique théorique et Physique céleste.
A. MICHEL-LÉVY...	†	Pétrographie.	DUPONT.....	†	Théories chimiques.
A. DENJOY.....	†	Géométrie supérieure.	LANQUINE.....	†	Géologie structurale et géologie appliquée.
L. LUTAUD.....	†	Géographie physique et géologie dynamique.	VALIRON.....	†	Calcul différentiel et calcul intégral.
E. BLOCH.....	†	Physique.	BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
G. BRUHAT.....	†	Physique.	F. PERRIN.....		Théories physiques.
E. DARMOIS.....	†	Enseignement de Physique.	VAVON.....	†	Analyse et mesures chimiques.
A. DEBIERNE.....	†	Électronique et Radioactivité.	G. DARMOIS.....	†	Mathématiques générales.
M. JAVILLIER.....	†	Chimie Biologique.	CHATTON.....	†	Biologie maritime.
ROBERT LÉVY.....	†	Physiologie comparée.	AUBEL.....		Chimie biologique.
HENRI VILLAT.....	†	Mécanique des fluides et applications.	JACQUES BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.
CH. JACOB.....	†	Géologie.	M ^{me} JOLIOU-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
P. PASCAL.....	†	Chimie générale.	PLANTEFOL.....	†	Botanique.
M. FRÉCHET.....	†	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	CABANNES.....	†	Recherches physiques.
E. ESCLANGON....	†	Astronomie.	GRASSÉ.....	†	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
M ^{me} RAMART-LUCAS	†	Chimie organique.	PRÉVOST.....		Chimie organique.
H. BÉGHIN.....	†	Mécanique physique et expérimentale.	BOULIGAND.....		Mathématiques.
FOCH.....	†	Mécanique expérimentale des fluides.	CHAUDRON.....		Chimie.
PAUTHENIER.....	†	Électrotechnique générale.	WYART.....		Minéralogie.
DE BROGLIE.....	†	Théories physiques.	TEISSIER.....		Zoologie.
CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.	MANGENOT.....		Biologie végétale (P. C. B.).
JOB.....		Chimie générale.	P. AUGER.....	†	Physique.
PRENANT.....	†	Anatomie et Histologie comparées.	MONNIER.....		Physiologie générale.
VILLEY.....	†	Mécanique physique et expérimentale.	PIVETEAU.....		Géologie.
COMBES.....	†	Physiologie végétale.	ROCARD.....		Physique.
GARNIER.....	†	Application de l'Analyse à la Géométrie.	H. CARTAN.....		Calcul différentiel.
PÈRES.....	†	Mécanique rationnelle.	SCHAEFFER.....	†	Physiologie générale.
HACKSPILL.....	†	Chimie minérale.	LAFFITTE.....		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER.....	†	Physiologie générale.	LERAY.....		Mécanique théorique des fluides.
TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.	FAVART.....		Calcul des probabilités. et Physique mathématique.
M. CURIE.....		Physique (P. C. B.).	COULOMB.....	†	Physique du globe.
			M ^{me} COUSIN.....		Biologie animale (P. C. B.).
			CHRÉTIEN.....		Analyse et mesures chimiques.
			DRACH.....		Évolution des êtres organisés.

Secrétaire..... CH. MONIER.



A MES PARENTS

A MA FEMME

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LA RÉALISATION

DES

ESPACES PONCTUELS A TORSION

EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

INTRODUCTION.

C'est dans les travaux de Gauss [1] (¹) que l'on trouve le premier exemple d'un espace non holonome, l'exemple devenu banal d'une surface plongée dans l'espace ordinaire. La géométrie sur la surface, considérée comme un continu à deux dimensions, est complètement définie quand on connaît l'expression de la distance de deux points infiniment voisins. Cette expression est induite sur la surface par la métrique euclidienne de l'espace ambiant : c'est donc le « point de vue *externe* » [8] de définition d'un espace de Riemann, qui est à l'origine de la théorie.

Si l'on se donne, au contraire *a priori* dans un continuum, l'expression de la distance élémentaire, on se libère de l'existence d'un espace ambiant. Ce point de vue interne suffit pour édifier complètement la géométrie riemannienne. Mais il n'en reste pas moins que le point de vue externe se trouve à l'origine non seulement de la théorie elle-même, mais aussi du nouvel essor qu'elle a pris, en 1917, avec la notion de parallélisme de Levi-Civita. Cela tient sans doute à ce qu'il donne une image plus concrète des espaces de Riemann.

(¹) Les crochets renvoient aux numéros d'ordre de la bibliographie.

L'*équivalence locale* des deux points de vue résulte du théorème de Schlaëfli [2], d'après lequel tout espace de Riemann est localement réalisable par une variété plongée dans un espace euclidien à nombre suffisant de dimensions. Ce théorème, énoncé vers 1873, ne fut démontré en toute rigueur que beaucoup plus tard, en 1926 [10 et 11]. L'*impossibilité d'une équivalence globale* a été établie par Hilbert [5], qui a montré l'impossibilité de réaliser tout le plan de Lobatchewsky au moyen d'une surface euclidienne privée de singularités.

Depuis 1922, les espaces de Riemann ne sont qu'un Chapitre bien particulier de la théorie des espaces non holonomes de M. Élie Cartan [6]. Cette théorie procède du point de vue *interne*. Les espaces de Riemann sont les *espaces ponctuels sans torsion à connexion euclidienne* [14].

La question se pose alors de savoir s'il est possible, au moins localement, de concevoir les espaces non holonomes du point de vue externe. Or, sans même sortir des connexions ponctuelles euclidiennes, il n'existait jusqu'ici aucun schéma général externe de ces espaces. La connexion *induite par l'espace ambiant* [8] sur une variété ponctuelle euclidienne est toujours sans torsion, de sorte qu'aucun espace à torsion ne peut être réalisé par une variété ponctuelle, si du moins on désire attacher à cette variété sa connexion intrinsèque, c'est-à-dire celle qui rend le mieux compte des relations de la variété avec l'espace ambiant.

Le but de ce travail est de donner, en géométrie *euclidienne*, une image externe des espaces *ponctuels* non holonomes les plus généraux (*pouvant comporter une torsion*). La méthode consiste à utiliser, pour réaliser ces espaces, des variétés *non ponctuelles* (congruences de droites, d'éléments linéaires, etc...), sur lesquelles est définie une connexion *ponctuelle* intrinsèque. Les espaces sans torsion entrent comme cas particuliers dans ces schémas généraux.

Une fois définie, sur une variété appartenant à une certaine catégorie, une connexion d'une certaine espèce, il faut encore, pour le but que nous nous proposons, montrer qu'étant donnée une connexion de cette espèce, on peut trouver une variété de la catégorie envisagée, qui, plongée dans un espace holonome convenable, admette localement cette connexion donnée. C'est l'objet des *théorèmes d'existence* démontrée aux Chapitres IV et V, qui généralisent en somme le théorème de Schlaëfli.

Cette étude, limitée aux connexions ponctuelles euclidiennes, peut néanmoins *fournir un cadre pour une étude analogue concernant d'autres connexions* (d'autres groupes fondamentaux ou d'autres éléments générateurs). D'où l'emploi exclusif de la méthode du repère mobile (qui fournit un cadre analytique général pour la théorie des espaces non holonomes); d'autre part les diverses connexions induites envisagées ont été définies conformément à des *principes généraux* qui ne précisent ni groupe fondamental, ni élément géné-

rateur. — Nous publierons par ailleurs [18] un exemple d'une telle extension, relatif aux connexions ponctuelles *affines* à n dimensions, dans le cas général (réalisation toujours possible dans l'espace affine à n^2 dimensions) et dans le cas de la géométrie des groupes de Lie [12], où certaines réalisations se rattachent au problème de la *représentation linéaire* de ces groupes.

Les principes généraux sont posés au cours du premier Chapitre, qui rappelle en même temps, en les présentant sous une forme aisément généralisable, des considérations classiques relatives aux surfaces euclidiennes. Les trois Chapitres suivants sont consacrés aux connexions euclidiennes à deux dimensions. Le Chapitre II définit la connexion ponctuelle induite sur une *congruence d'éléments linéaires* plongée dans l'espace ordinaire. Cette définition est susceptible d'une interprétation de nature mécanique. Elle fournit d'autre part, comme cas particuliers, la connexion d'une congruence de *droites* [16 a], et la connexion riemannienne classique d'une surface.

Le Chapitre III contient une suite de théorèmes sur les *propriétés géométriques de cette connexion induite*; les résultats classiques relatifs à la courbure de Gauss et à certaines propriétés des géodésiques, en sont des cas particuliers. Nous faisons d'abord une étude complète de la courbure et de la torsion, *en les reliant à certains éléments géométriques* tels que les foyers de la congruence. Les résultats obtenus sont très simples dans le cas général (nos 20 et 23), un peu plus compliqués dans certains cas de dégénérescence. D'autre part, l'étude des congruences admettant la même connexion induite conduit en particulier à l'*applicabilité de leurs surfaces polaires* (1).

Nous étudions ensuite les « pseudo-lignes » (variétés à un paramètre) de la congruence, qui correspondent à des lignes remarquables de l'espace réalisé, par exemple aux *droites* (définies par le transport parallèle), ou aux *géodésiques* (2) (extrémales de la longueur). Par exemple, les pseudo-droites sont étroitement liées à des *développables d'un complexe* associé à la congruence. Signalons aussi une relation entre les *pseudo-droites géodésiques* éventuelles et les *géodésiques de la surface polaire*, ainsi que l'étude *des espaces admettant un réseau de droites géodésiques* (n° 41).

Les congruences à *cône directeur*, qui réalisent les espaces à *parallélisme absolu*, font l'objet d'une étude spéciale concernant le parallélisme et les pseudo-lignes remarquables. En particulier, nous mettons en évidence divers cas où le parallélisme induit se traduit par un parallélisme ordinaire dans l'espace ou par une égalité d'angles. Une étude analogue est faite pour les congruences à *plan directeur* qui correspondent aux espaces où *la torsion a une direction fixe*. Ils constituent une classe de congruences admettant un

(1) La surface polaire est l'enveloppe des plans normaux aux éléments générateurs en leur centre.

(2) On sait que ces deux familles sont distinctes, du moins dans le cas de deux dimensions [8].

réseau de pseudo-droites géodésiques, une autre classe étant formée de congruences de normales à une développable (le réseau en question est alors formé des plans normaux à la développable le long de ses génératrices). Le Chapitre se termine par une brève étude relative aux lignes de torsion et par deux exemples particuliers.

Le Chapitre IV a pour objet l'étude détaillée de la réalisation d'une connexion ponctuelle euclidienne à deux dimensions arbitrairement donnée, par une congruence d'éléments linéaires de l'espace ordinaire. Il contient principalement une démonstration du théorème d'existence (avec, dans le cas le plus général, une formulation simple du problème de Cauchy), et une étude plus directe du cas du parallélisme absolu, qui permet d'explicitier les résultats et surtout d'*indiquer des formes géométriques types* auxquelles peuvent se réduire les solutions (possibilité de choisir le cône directeur, ou, si la torsion a une direction fixe, de réaliser l'espace par des congruences de normales à une droite).

L'étude complète de la réalisation par des congruences de droites est donnée dans le cas du parallélisme absolu. Une étude analogue du cas général, publiée aux *Comptes rendus* [16 b], n'a pas été reproduite.

Le cinquième et dernier Chapitre est consacré aux connexions à n dimensions. Un premier théorème d'existence (n° 87) affirme la possibilité de les réaliser, au voisinage d'un point quelconque, par des variétés d'éléments plans (éléments à $n^2 - n$ dimensions) plongées dans l'espace euclidien à n^2 dimensions; une telle réalisation *existe quel que soit l'espace donné*. Un second théorème d'existence (n° 101) affirme la possibilité, *quand l'espace donné est générique*, de le réaliser, au voisinage d'un point générique, dans l'espace euclidien à $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensions, ce qui généralise exactement le théorème de Schläfli. D'autre part, la notion de classe des espaces de Riemann se généralise d'elle-même aux espaces à torsion, et à ce propos (n° 100) nous donnons brièvement quelques résultats relatifs aux espaces de classe 1 : généralisation des conditions de Ricci [3] et considérations géométriques sur les variétés réalisantes.

Tant par la vaste théorie géométrique à laquelle elle se rattache (espaces généralisés) que par les instruments analytiques employés (méthode du repère mobile, théorie des systèmes en involution), l'étude que nous venons d'analyser ne saurait se concevoir sans les travaux de M. Élie Cartan. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde et respectueuse reconnaissance pour l'intérêt très bienveillant qu'il a pris à mes recherches. Je tiens aussi à remercier bien vivement M. Georges Bouligand et M. René Garnier de la sympathie qu'ils m'ont témoignée; et je prie M. Paul Montel, qui a bien voulu accueillir ce travail dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*, de trouver ici l'expression de ma sincère gratitude.

CHAPITRE I.

LA CONNEXION INTRINSÈQUE TRADUITE SUR UNE SURFACE. PRINCIPES GÉNÉRAUX DE DÉFINITION D'UNE CONNEXION INDUITE.

1. Dans ce Chapitre préliminaire, nous allons reprendre les considérations bien connues, qui font d'une surface ordinaire un espace de Riemann à deux dimensions. Nous donnerons au passage un schéma général de définition d'une connexion induite, auquel se conformeront nos définitions ultérieures. Nous ferons aussi, à titre d'introduction, quelques rapides calculs analogues à ceux que nous retrouverons plus loin à propos des variétés non ponctuelles.

2. Regarder une surface V comme un espace de Riemann, c'est ⁽¹⁾ la considérer comme formée de morceaux infiniment petits de plans euclidiens, avec une loi permettant de raccorder dans un même plan deux morceaux infiniment voisins. Cette loi sera caractérisée par l'effet du raccordement sur un repère rectangulaire.

a. Chaque morceau est formé des points M' infiniment voisins des points M de V , et l'on assimile M' à sa projection orthogonale m' dans le plan $P(M)$ tangent en M à V .

b. La loi de raccordement est basée sur la définition du parallélisme de Levi-Civita, c'est-à-dire sur la convention suivante :

Convention. — L'angle de deux directions ∂, ∂' issues de deux points M et M' infiniment voisins est défini comme égal, au second ordre près par rapport à MM' , à celui des projections orthogonales de ∂, ∂' dans $P(M)$.

Une telle convention se légitime par le fait que l'angle de deux directions de $P(M')$ se conserve au second ordre près par la projection envisagée.

Loi de raccordement. — Si l'on choisit dans chaque plan $P(M)$ un repère rectangulaire $\varphi(M)$, le raccordement de $P(M')$ dans $P(M)$, déduit de la convention précédente, amènera $\varphi(M')$ en $\varphi_M(M')$ confondu au second ordre près avec la projection de $\varphi(M')$ dans $P(M)$.

M. Élie Cartan a montré ⁽¹⁾ que, parmi toutes les connexions qu'on peut imaginer sur une surface (en modifiant la correspondance *a* ou la loi *b*), la précédente possède un caractère intrinsèque, et a étendu ces conceptions à d'autres géométries (affine, projective, conforme).

3. Si l'on effectue le raccordement de proche en proche le long d'un arc (C) tracé dans V , on obtient le *développement* ⁽¹⁾ le long de (C) de l'espace de

⁽¹⁾ Cf. É. CARTAN [8].

Riemann E réalisé par V . L'ensemble des développements le long des divers arcs tracés sur V constitue la carte de E . On peut encore dire que les opérations a et b du n° 2 définissent la *carte intrinsèque* de V , et que, par définition, l'espace E réalisé par V est celui qui admet pour carte la carte intrinsèque de V .

Les considérations précédentes n'exigent pas absolument que V soit engendrée par un point. Considérons par exemple une congruence V de droites S . Nous dirons encore que V réalise un espace ponctuel à connexion euclidienne, si l'on peut la considérer comme formée de morceaux infiniment petits $\omega(S)$ dont les éléments soient en correspondance biunivoque et continue avec les points d'un morceau infiniment petit $\gamma(S)$ d'un plan euclidien, et si l'on possède une loi de raccordement des $\gamma(S)$ et $\gamma(S')$ relatif à deux morceaux $\omega(S)$ et $\omega(S')$ infiniment voisins.

On pourra alors assimiler $\omega(S)$ à $\gamma(S)$ et l'on aura bien une connexion ponctuelle. On peut encore dire que $\gamma(S)$ constitue la *carte infinitésimale* de $\omega(S)$ et que la loi de raccordement permet de construire la *carte de V* . L'espace réalisé est alors par définition celui qui admet pour carte cette carte de V .

4. De façon générale, considérons une variété V à n dimensions d'élément générateur S , et d'autre part un espace holonome E à n dimensions, d'élément générateur s , et de groupe fondamental G .

Pour définir une connexion du groupe G et d'élément s intrinsèquement induite sur V , on établira, par des opérations géométriques intrinsèques :

a. Une correspondance biunivoque et continue entre les éléments S' infiniment voisins de S et les éléments s' infiniment voisins de s d'un espace E , soit $E(S)$ intrinsèquement lié à S ; l'ensemble $\gamma(S)$ des s' constituera la carte infinitésimale de V en S .

b. Une loi L de raccordement de $E(S')$ dans $E(S)$. On choisira dans tout $E(S)$ un repère [14] $\rho(S)$ d'élément origine s , et la loi L sera caractérisée par la position $\rho_s(S')$ que le raccordement assigne au repère $\rho(S')$ dans $E(S)$.

Cette loi devra évidemment respecter la carte infinitésimale, c'est-à-dire que l'élément origine de $\rho_s(S')$ doit être l'élément s' .

Dans ces conditions, si l'on assimile les éléments S' à leur carte $\gamma(S)$, V réalise un espace (holonome ou non) d'élément générateur s , du groupe fondamental G . On peut encore définir cet espace réalisé comme celui qui admet pour carte la carte intrinsèque de V déduite de la correspondance *a* et de la loi L .

Les connexions induites que nous nous proposons d'étudier sont des connexions ponctuelles (les s sont des points), mais les variétés V ne seront pas en général ponctuelles.

5. *Composantes relatives de la connexion induite.* — Dans le cas classique d'une surface euclidienne V , comme dans les cas plus généraux que nous venons d'envisager, la carte infinitésimale et la loi de raccordement sont bien définies par la connaissance *de la position de $\rho_s(S')$ par rapport à $\rho(S)$* ; les origines des $\rho_s(S')$ donnent en effet la carte infinitésimale, et la loi de raccordement a été caractérisée justement par la position relative de ces repères.

Les paramètres de la transformation, rapportée à $\rho(S)$, qui amène $\rho(S)$ en $\rho_s(S')$ constituent les *composantes relatives de la connexion induite*. On peut les regarder comme les coordonnées de $\rho_s(S')$ par rapport à $\rho(S)$. Soit $T(S, S')$ la transformation du groupe G définie par ces paramètres. Nous supposons les repères ρ choisis de façon que $T(S, S')$ soit une transformation infiniment petite. Cela aura toujours lieu dans les applications que nous avons en vue.

L'espace réalisé par la variété V peut donc être défini par la famille des transformations $T(S, S')$ associées à tout couple d'éléments S, S' infiniment voisins dans V . On reconnaît la définition générale des espaces non holonomes de M. Élie Cartan [14], dans laquelle les transformations $T(S, S')$ jouent précisément le même rôle qu'ici, à savoir :

1° On attache idéalement à tout élément de l'espace envisagé S un repère $\bar{\rho}(S)$ d'un espace holonome auxiliaire $E(S)$.

2° Les éléments S' infiniment voisins de S sont assimilés aux origines des repères $\bar{\rho}_s(S')$ obtenus en faisant subir à $\bar{\rho}(S)$ les transformations $T(S, S')$; et la loi de raccordement de $E(S')$ dans $E(S)$ assigne à $\bar{\rho}(S')$ la position $\bar{\rho}_s(S')$.

Dans le cas d'une connexion intrinsèquement induite par l'espace ambiant, on peut prendre pour $\bar{\rho}$ les repères $\rho(S)$ précédemment définis, et qui sont attachés intrinsèquement aux éléments S .

6. *Effets d'un changement de repères sur les composantes relatives.* — Un autre choix de repères $\rho(S)$ d'origine s donnerait, pour la même connexion, des composantes relatives différentes. Conserver la même connexion, c'est d'après sa définition, ne changer ni $\gamma(S)$, ni la loi de raccordement de $E(S')$ dans $E(S)$.

Soit $\rho^*(S)$ un repère de même origine que $\rho(S)$, et qui s'en déduit par une transformation $\Theta(S)$ du groupe G , laissant fixe l'origine. Par analogie avec la géométrie euclidienne nous appellerons *rotations* de telles transformations Θ .

a. On ne change pas $\gamma(S) : \rho_s^*(S')$ a donc même origine que $\rho_s(S')$.

b. On ne change pas la loi de raccordement de $E(S')$ dans $E(S) : \rho_s^*(S')$ se déduit de $\rho_s(S')$ par la rotation $\Theta(S')$.

La transformation $T^*(S, S')$ qui fait passer de $\rho^*(S)$ à $\rho_s^*(S')$ se déduit aisément de $T(S, S')$, de $\Theta(S)$ et de $\Theta(S')$. Nous dirons qu'elle est la transformée

de $T(S, S')$ par la famille des $\Theta(S)$. *Les composantes relatives de la connexion induite sont définies à une transformation près par une famille de rotation.*

7. *Composantes de l'espace de Riemann E' réalisé par une surface.* — On a vu que ce sont les coordonnées du repère $\varphi_M(M')$ par rapport à $\varphi(M)$. Soit $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$ les vecteurs de base $\varphi_M(M')$, dont l'origine est la projection m' de M' dans $P(M)$, et soient \vec{e}_1, \vec{e}_2 ceux de $\varphi(M)$. Les composantes relatives $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_{12}$ de E' sont définies par

$$(1) \quad \begin{cases} m' = M + \varpi_1 \vec{e}_1 + \varpi_2 \vec{e}_2, \\ \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \varpi_{12} \vec{e}_2. \end{cases}$$

D'autre part les $\varphi(M)$ forment avec le vecteur unitaire \vec{e}_3 normal à V un repère $R(M)$ du premier ordre de V [14]. Considérons une famille analytique \mathcal{F} de repères $R(M)$ du premier ordre de V , et soient ω_i, ω_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) ses composantes relatives, ce qui veut dire que le repère $R(M') = M' \vec{e}'_i$ est lié à $R(M) = M \vec{e}_i$ par les relations (au second ordre près) :

$$(2) \quad \begin{cases} M' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12} \vec{e}_2 + \omega_{13} \vec{e}_3, \end{cases}$$

\vec{e}_3 étant normal à V , $\omega_3 = 0$. En projetant $\varphi(M')$ dans $P(M)$ on doit obtenir au second ordre près $m' \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$, donc

$$(3) \quad \begin{cases} m' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2, \\ \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12} \vec{e}_2, \end{cases}$$

ce qui donne, en comparant à (1),

$$(4) \quad \varpi_1 = \omega_1, \quad \varpi_2 = \omega_2, \quad \varpi_{12} = \omega_{12}.$$

Appelons composantes tangentielles du premier ordre de V , les composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ d'une famille de repères du premier ordre de V . Elles sont définies à une rotation près autour de \vec{e}_3 , et l'on peut énoncer :

Les composantes relatives de la connexion induite sont les composantes tangentielles du premier ordre de la surface.

8. La non-holonomie de E' se déduit immédiatement de ses composantes relatives et des équations de structure $[E_2]$ et $[E_3]$ des déplacements à 2 et 3 dimensions. Le déplacement associé [14] à un « parallélogramme élémen-

taire » ⁽¹⁾ d'origine M a pour composantes par rapport au repère attaché au point M

$$\Omega_1 = \varpi'_1 - [\varpi_{12} \varpi_2], \quad \Omega_2 = \varpi'_2 - [\varpi_1 \varpi_{12}], \quad \Omega_{12} = \varpi'_{12}.$$

Les équations [E₃] qui nous seront utiles sont

$$\omega'_1 = [\omega_{12} \omega_2] + [\omega_3 \omega_{31}], \quad \omega'_2 = [\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{32}], \quad \omega'_{12} = [\omega_{32} \omega_{31}].$$

Elles donnent, en tenant compte de $\omega_3 = 0$ et de (7.4) ⁽²⁾

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \\ (2) \quad & \Omega_{12} = [\omega_{32} \omega_{31}]. \end{aligned}$$

Les équations (1) traduisent l'absence de torsion. L'équation (2) donne la courbure R, par la relation $\Omega_{12} = R[\omega_1 \omega_2]$; en prenant le repère intrinsèque (tangent aux lignes de courbure de V) [14], on a

$$\omega_{31} = \frac{-\omega_1}{R_1}, \quad \omega_{32} = \frac{-\omega_2}{R_2}, \quad \text{d'où } R = \frac{-1}{R_1 R_2},$$

R_1, R_2 étant les rayons de courbure principaux, et l'on retrouve bien la courbure totale de V.

Enfin le ds^2 est le même que celui de V, ainsi que le confirment les égalités

$$ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_2^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \quad [\text{d'après (7.4) et } \omega_3 = 0].$$

CHAPITRE II.

LA CONNEXION PONCTUELLE INTRINSÈQUE D'UNE CONGRUENCE D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES.

I. — Éléments linéaires et congruences.

9. Un élément linéaire est l'ensemble d'un point appelé son *centre*, et d'une droite passant par ce point (appelée son *support*). Étant donnés un point M et une droite D, la notation (M, D) représentera l'élément de centre M et de support D. Inversement, étant donné un élément S, la notation M(S) représentera son centre, et D(S) son support. Nous dirons aussi pour abréger qu'un vecteur (par exemple) porté par D(S) est *porté par l'élément S*.

Un élément linéaire est bien défini par son centre et la direction δ du support, qu'on appellera aussi *direction de l'élément*; on le représentera aussi par la notation (M, δ) . Étant donné un vecteur libre \vec{u} , la notation (M, \vec{u}) représentera l'élément linéaire de centre M et parallèle à \vec{u} .

⁽¹⁾ C'est-à-dire au cycle $M, M + dM, M + dM + \delta M + \delta dM, M + \delta M, M, d$ et δ , étant deux symboles de différentiation échangeables entre eux.

⁽²⁾ C'est-à-dire les équations (4) du n° 7. Cette notation sera adoptée toutes les fois qu'une relation figure dans un autre numéro que celui où elle est citée.

Nous aurons souvent à associer à S le plan normal en $M(S)$ à $D(S)$. Nous l'appellerons *plan polaire de S* et la représenterons par la notation $P(S)$.

Enfin, nous ne considérerons que des éléments *orientés*; (M, \vec{u}) aura par définition le *sens de \vec{u}* , et les éléments (M, \vec{u}) , $(M, -\vec{u})$ ne seront pas considérés comme identiques. Ils seront dits opposés.

10. Dans l'espace euclidien E_3 à trois dimensions, on peut attacher à tout élément S une famille à un paramètre de repères trirectangulaires $R = M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, dont l'origine M est au centre de S , et le troisième vecteur \vec{e}_3 porté par S et de même sens que S .

Soit $R_0 = O\vec{u}_1\vec{u}_2\vec{u}_3$ un repère de base arbitrairement choisi dans E_3 , et soit S_0 l'élément linéaire $(O\vec{u}_3)$. On peut amener S_0 en S par un déplacement $T_0(S)$ comprenant la translation \vec{OM} suivie d'une rotation d'axe normal à \vec{u}_3 . Alors \vec{u}_1 vient en \vec{u}'_1 et pour amener R_0 en R il faut lui faire subir, après le déplacement $T_0(S)$, une rotation $\Phi(S)$ d'angle $\varphi = \widehat{\vec{u}'_1, \vec{e}_1}$ autour de \vec{e}_3 . S peut être défini par les 5 paramètres $\lambda_i(S) (i=1, 2, \dots, 5)$ de $T_0(S)$ et les repères attachés à S par le paramètre φ . On les désignera par $R(S, \varphi)$.

11. Une congruence V d'éléments linéaires S est une famille à 2 paramètres de tels éléments (plongés dans l'espace euclidien E_3 à trois dimensions). Les $\lambda_i(S)$ sont alors fonctions de deux variables u_1, u_2 , qu'on peut considérer comme les coordonnées de S dans V . Nous supposerons la congruence analytique, c'est-à-dire les $\lambda_i(S)$ fonctions analytiques de u_1, u_2 .

La congruence sera dite *ordinaire*, si (comme c'est le cas général) *a.* les centres des éléments forment *effectivement* une surface, et *b.* les éléments ne sont pas tangents en leur centre à cette surface. Nous ne considérerons désormais que des congruences ordinaires.

On appellera *surface des centres* le lieu Σ des centres des éléments d'une congruence ordinaire V . On peut voir qu'alors les droites $D(S)$ décrivent effectivement une congruence (congruence des supports).

Enfin nous dirons que V est une *congruence d'éléments normaux* si $D(S)$ est normale à Σ en $M(S)$, (ou encore *congruence orthogonale*), par opposition à une *congruence de normales* (dont les *supports* sont normaux à une surface).

12. *Repères attachés à une congruence V.* — Les repères $R(S, \varphi)$ attachés aux éléments S de V constituent les repères d'ordre zéro [14] de V . Si φ est une fonction analytique de u_1, u_2 , les $R(S, \varphi)$ constituent une famille analytique \mathcal{F} de repères d'ordre zéro de V . La famille la plus générale (analytique) de repères

d'ordre zéro est alors formée des repères $R(S, \varphi + \theta)$, θ étant une fonction (analytique) des u .

Soient $\omega_i, \omega_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ les composantes relatives de \mathcal{F} ; le repère $R(S', \varphi')$ attaché à l'élément S' voisin de S est défini, au second ordre près, par

$$(1) \quad \begin{cases} M' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 & (= M + dM) \\ \vec{e}'_i = \vec{e}_i + \sum \omega_{ij} e_j & (= \vec{e}_i + d\vec{e}_i) \end{cases} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Les ω sont des formes de Pfaff bien déterminées des six paramètres z_1, z_2, \dots, z_6 du déplacement euclidien [14] qui définit $R(S, \varphi)$; par exemple ces six paramètres peuvent être les λ_i et φ . Pour la congruence V donnée, elles s'expriment en fonction de u_1, u_2 et de leurs différentielles, et ce sont ces formes à 2 variables attachées à V (et au choix de φ) que nous allons considérer. Nous allons caractériser certaines conditions relatives à V au moyen de ces composantes relatives. Nous donnerons à $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ le nom de *composantes latérales*.

a. Caractérisation d'une congruence ordinaire. — Soient d et δ deux symboles de différentiation distincts, c'est-à-dire que $[du\delta u] \neq 0$. Si M décrit effectivement une surface, dM et δM ne sont pas colinéaires; et si cette surface n'est pas tangente en $M(S)$ à $D(S)$, \vec{e}_3 n'est pas dans le plan $dM, \delta M$, et

$$(2) \quad (dM, \delta M, \vec{e}_3) \neq 0 \quad (\text{produit mixte}).$$

Réciproquement (2) entraîne $dM, \delta M$ non colinéaires, et \vec{e}_3 non situé dans le plan $(dM, \delta M)$, et l'on a bien une congruence ordinaire (n° 11). Le calcul donne immédiatement

$$(dM, \delta M, \vec{e}_3) = \omega_1(d)\omega_2(\delta) - \omega_1(\delta)\omega_2(d) = [\omega_1\omega_2].$$

Étant donnée une famille à deux paramètres de repères $\vec{M}e_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $(\vec{M}\vec{e}_3)$ engendre une congruence ordinaire est que les composantes latérales de translation de la famille soient indépendantes, ce qui se traduit par la relation

$$(3) \quad [\omega_1\omega_2] \neq 0.$$

b. Congruence orthogonale; congruence de normales. — Les premières sont visiblement caractérisées par la condition

$$(4) \quad \omega_3 = 0,$$

qui exprime que dM est dans le plan polaire, donc normal au support.

Les congruences de normales sont caractérisées par

$$(5) \quad \omega'_3 = 0.$$

En effet, il *faut et suffit* qu'il existe sur S un point $P = M + \rho \vec{e}_3$ tel que dP soit normal à $D(S)$, donc ait une projection nulle sur \vec{e}_3 , d'où

$$\omega_3 + d\rho = 0;$$

ω_3 est donc différentielle exacte, d'où la condition (5).

II. — Définition de la connexion induite.

13. Conformément au n° 4, nous avons à définir une carte infinitésimale et une loi de raccordement :

a. La carte infinitésimale $\gamma(S)$ s'obtiendra en projetant le centre d'un élément S' infiniment voisin de S orthogonalement sur le plan polaire $P(S)$. On a ainsi une correspondance continue associant à S' un point m' infiniment voisin de M du plan $P(S)$.

Cette correspondance est visiblement biunivoque si la congruence est ordinaire.

b. Le raccordement de $P(S')$ dans $P(S)$ se fera par la même projection orthogonale sur $P(S)$. Ayant choisi dans tout plan $P(S)$ un repère rectangulaire $\varphi(S)$ d'origine M, le raccordement amènera $\varphi(S')$ en $\varphi_S(S')$ confondu au second ordre près avec la projection de $\varphi(S')$ dans $P(S)$, ce qui est possible pour la même raison qu'au n° 2.

Le plan polaire et les opérations *a* et *b* sont intrinsèquement liés à S, et définissent la *carte intrinsèque* de V. En assimilant les éléments voisins de S à leur carte infinitésimale $\gamma(S)$, V réalise ainsi un espace *ponctuel* à connexion *euclidienne* à deux dimensions E' . Cet espace E' admet pour carte la carte intrinsèque de V.

Cette connexion ponctuelle intrinsèquement induite sur V par l'espace ambiant sera appelée plus brièvement la *connexion* de V.

14. *Composantes relatives.* — Soit $M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ un repère $R(S, \varphi)$ d'une famille analytique \mathcal{F} d'ordre zéro. Prenons pour $\varphi(S)$ le repère $M\vec{e}_1\vec{e}_2$. Soit $m'\vec{\varepsilon}_1\vec{\varepsilon}_2$ le repère $\varphi_S(S')$. Les composantes relatives de la connexion de V sont des formes de Pfaff $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ (des variables u) définies par

$$(1) \quad \begin{cases} m' = M + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2, \\ \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12} \vec{e}_2. \end{cases}$$

Les équations (12. 1) définissent $\rho(S')$ en fonction des composantes relatives ω de $\vec{\mathfrak{F}}$; en particulier

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{M}' = \vec{M} + \varpi_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3. \\ \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12} \vec{e}_2 + \omega_{13} \vec{e}_3. \end{cases}$$

La projection de $\rho(S')$ dans $P(S)$ s'en déduit aisément, et comme elle doit coïncider au second ordre près avec $\rho_S(S')$,

$$(3) \quad \begin{cases} \vec{m}' = \vec{M} + \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \omega_{12} \vec{e}_2 \end{cases} \quad (\text{au } 2^\circ \text{ ordre près});$$

la comparaison de (1) et (3) donne

$$(4) \quad \boxed{\varpi_1 = \omega_1, \quad \varpi_2 = \omega_2, \quad \varpi_{12} = \omega_{12}.}$$

Les ϖ , comme d'ailleurs les composantes latérales $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$, ne sont définis qu'à une rotation près des repères $\rho(S)$ autour de leur origine, et l'on peut énoncer :

THÉORÈME. — *Les composantes de la connexion induite sont les composantes latérales d'ordre zéro de V.*

Remarque. — La condition (12. 3) pour que V soit une congruence ordinaire entraîne bien

$$[\varpi_1, \varpi_2] \neq 0,$$

qui est nécessaire et suffisante pour que les ϖ définissent un espace ponctuel à 2 dimensions.

15. *Courbure et torsion.* — Le déplacement infinitésimal associé à un cycle infiniment petit se calcule comme au n° 8; en conservant les mêmes notations, on a, pour un « parallélogramme élémentaire » [14],

$$(1) \quad \Omega_1 = [\omega_3 \omega_{31}], \quad \Omega_2 = [\omega_3 \omega_{32}], \quad \Omega_{12} = [\omega_{32} \omega_{31}].$$

Ici, ω_3 n'est en général pas nul, ni proportionnel à la fois à ω_{32} et ω_{31} , et la torsion n'est pas nulle.

Si le cycle a une origine fixe réalisée par l'élément S, le déplacement associé est proportionnel à l'aire α du cycle, c'est-à-dire que l'on a, pour la carte dans le plan polaire de S,

$$(2) \quad \vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 = \alpha \vec{T}, \quad \Omega_{12} = \alpha R.$$

Nous appellerons \vec{T} le *vecteur torsion de V en S*, R la courbure de V en S; et, quand $R \neq 0$, nous appellerons *torsion relative de V en S*, le vecteur

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{T}}{R}.$$

Pour un parallélogramme élémentaire, on a

$$(3) \quad \vec{\Omega} = \vec{T}[\omega_1 \omega_2], \quad \Omega_{12} = R[\omega_1 \omega_2],$$

d'où, d'après (1), le calcul de R et de $\vec{T} = T_1 \vec{e}_1 + T_2 \vec{e}_2$ en fonction de u_1, u_2 .

16. *Relation entre deux congruences de même connexion.* — Une congruence réalise un espace E' bien déterminé. Inversement, il peut se faire que le même E' soit réalisé par plusieurs congruences (cf. Chap. IV), par exemple V et V^* . Soient S et S^* les éléments réalisant un même point m de E' .

Il existe un déplacement amenant S^* en S et la carte dans $P(S^*)$ de V^* sur la carte dans $P(S)$ de V , puisque ces cartes sont égales. Ce déplacement amène S'^* homologue de S' voisin de S en s'^* voisin de S ; et d'après la définition de la carte, s'^* passe au deuxième ordre près par m' , projection de $M(S')$ dans $P(S)$, car m' est aussi la projection de $M(s')$ dans $P(S)$; il existe donc un déplacement $T(S, S^*)$ qui amène V^* dans une position telle que S^* soit en S , et, quel que soit S' voisin de S , S'^* rencontre S' au second ordre près.

Nous verrons, au n° 25, que si le plan polaire $P(S)$ dépend effectivement de deux paramètres et enveloppe une surface φ , il en est de même de $P(S^*)$, et que *les surfaces polaires ainsi définies sont applicables l'une sur l'autre*. Cela se produit pour tous les E' à courbure non nulle.

17. *Interprétation de la connexion induite.* — On peut donner de la connexion induite sur V une interprétation en quelque sorte expérimentale. Imaginons qu'un élément linéaire mobile S soit maintenu dans V par certaines liaisons, et que, pour le déplacer, un observateur « habitant V » lui applique une force \vec{F} normale en son centre à son support. Cet observateur pourrait considérer le déplacement faisant passer S de S_0 à une position voisine S'_0 comme se réduisant à sa projection sur \vec{F} (qui intervient dans le travail de \vec{F}) et imaginer que les éléments de V se déduisent de proche en proche par de simples translations normales à leur support.

A ce titre il se croirait dans l'espace holonome \bar{E} formé des éléments se déduisant d'un élément donné par les translations normales à son support. Cet espace \bar{E} est analogue au plan (ponctuel) euclidien : un habitant de V pourrait se croire localement dans un plan euclidien.

Il pourrait prendre en chaque élément S , le repère $\rho = M \vec{e}_1 \vec{e}_2$ pour repérer le déplacement de S . Soit ρ_0 et ρ'_0 les repères choisis en S_0 et S'_0 . Si, S allant de S_0 à S'_0 , on entraîne avec lui le repère ρ (initialement en ρ_0) en l'empêchant de tourner autour de S , ρ vient en ρ' et, pour l'amener en ρ'_0 , il faut encore lui faire subir la rotation ω_{12} . Le déplacement amenant ρ de ρ_0 à ρ'_0 se réduit donc, pour l'habitant de V , au déplacement de composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$, le déplacement de composantes $\omega_3, \omega_{34}, \omega_{32}$ étant assuré par les liaisons.

III. — Cas particuliers.

18. *Connexion intrinsèque d'une surface.* — Dans le cas d'une congruence V d'éléments normaux, la définition de la connexion de V (n° 13) est identique à la définition, d'après le n° 2, de la connexion de la surface des centres. Inversement, on peut toujours regarder la connexion intrinsèque d'une surface Σ donnée comme celle de la congruence V des éléments *normaux* à Σ (c'est-à-dire centrés sur Σ et dont les supports sont normaux à Σ), et la *connexion intrinsèque d'une surface est un cas particulier de celle d'une congruence d'éléments linéaires.*

On voit que ce cas correspond à $\omega_3 = 0$, qui entraîne bien une torsion nulle. L'applicabilité des surfaces polaires des congruences de même connexion a comme cas particulier celle des surfaces réalisant le même espace de Riemann.

Une étude directe de la carte met en évidence le fait que la torsion, non nulle dans le cas général, le devient pour une congruence orthogonale. Soit $SS'S''S$ un cycle triangulaire infiniment petit, $MM'M''$ les centres correspondants; m'' la projection de M'' dans $P(S')$ et μ'' sa représentation dans $P(S)$ quand on raccorde $\lambda(S')$ dans $P(S)$. Et soient m', M'_1, m'_1 les projections de M', M'' et m'' dans $P(S)$.

Quand on va directement de S à S'' (par une différentiation unique des u) le point représentatif de S'' est M''_1 . Quand on parcourt le trajet $SS'S''$ correspondant à deux différentiations successives non proportionnelles, on arrive au point μ'' . L'aire du cycle est de l'ordre de

$$\alpha = \overline{MM'} \cdot \overline{M'M''}.$$

Les longueurs $m''_1 \mu''$ et $m''_1 M''$ sont respectivement de l'ordre de

$$\delta_1 = \overline{MM'}^2 \cdot \overline{M'M''} = \alpha \cdot \overline{MM'}, \quad \delta_2 = \overline{MM'} \cdot \overline{M''m''}.$$

a. Si $\omega_3 \neq 0$, $M''m''$ est de l'ordre de $M'M''$ et $m''_1 M''$ est de l'ordre de α ; δ_1 est infiniment petit devant α , et $M''_1 \mu''$ est de l'ordre de α : la torsion n'est pas nulle.

b. Si $\omega_3 = 0$, $M''m''$ est au contraire de l'ordre de $\alpha \overline{M'M''}^2$ et $\delta_2 = \alpha \overline{M'M''}$; $M''_1 \mu''$ est en plus de l'ordre de $\alpha(\overline{MM'} + \overline{M'M''})$ et est infiniment petit devant α : la torsion est nulle. On peut d'ailleurs remarquer que la carte des points d'un cycle infiniment petit de Σ se fait par simple projection du cycle sur le plan tangent à l'origine, alors qu'il n'en est pas ainsi (d'après *a*) pour une congruence V quelconque. Remarquons aussi que cette construction valable pour les *points* du cycle, ne l'est pas pour les repères attachés à ces points.

19. *Connexion d'une congruence de droites.* — Soit une congruence Γ de droites D . La connexion ponctuelle intrinsèque de Γ sera, par définition, *celle*

de la congruence des éléments linéaires (M, D), M étant l'origine du repère intrinsèque attaché à D dans Γ .

a. Si D a deux foyers à distance finie, M est le milieu des foyers. La connexion se confond avec celle de la surface Σ lieu de M si D est normale à Σ : Γ est alors une congruence de normales à une surface minima.

b. Si Γ a un cône directeur et s'il reste un foyer F à distance finie, M sera défini par $\vec{MF} = \vec{e}_3$.

c. Si D a toujours un foyer double à l'infini, on peut caractériser l'origine M du repère de Frenet (qui est alors du *second* ordre) par le fait que la trace du lieu de M dans le plan focal soit normale en M à D.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DE LA CONNEXION D'UNE CONGRUENCE D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES.

I. — Courbure et torsion (1).

20. La courbure et le vecteur torsion ont une signification géométrique. Nous allons voir d'abord que la *courbure* est liée de façon très simple aux *distances focales* de V, c'est-à-dire aux distances du centre M(S) aux foyers du support D(S) dans la congruence Γ des supports.

Reprenons le repère R(S, φ) du n° 12, de composantes relatives ϖ_i, ϖ_{ij} . D'après le n° 15, la courbure R est donnée par

$$(1) \quad [\omega_{32} \omega_{31}] = R[\omega_1 \omega_2].$$

D'autre part les foyers $F = M + \varphi \vec{e}_3$ de Γ sont tels que dF forme avec \vec{e}_3 un plan indépendant de du, dv ; donc tels que les composantes de dF sur \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , à savoir

$$\omega_1 + \varphi \omega_{31}, \quad \omega_2 + \varphi \omega_{32},$$

soient dans un rapport indépendant de du, dv , et l'équation aux *distances focales* φ s'obtient en annulant le produit extérieur de ces composantes

$$(2) \quad [\omega_1 + \varphi \omega_{31}, \omega_2 + \varphi \omega_{32}] = 0.$$

Les racines ne sont jamais nulles, ni indéterminées, si l'on a affaire à une congruence ordinaire ($[\omega_1 \omega_2] \neq 0$). Le produit des racines ρ_1, ρ_2 vérifie

$$(3) \quad [\omega_{31} \omega_{32}] \rho_1 \rho_2 = [\omega_1 \omega_2].$$

(1) Les principaux résultats de ce paragraphe ont été publiés aux *Comptes rendus* [16 e].

Deux cas se présentent : 1° (2) a ses deux racines finies : (1) et (3) donnent alors

$$(4) \quad R = \frac{-1}{\rho_1 \rho_2};$$

2° (2) n'a pas ses deux racines finies ; c'est alors que

$$(5) \quad [\omega_{21} \omega_{12}] = 0.$$

La direction \vec{e}_2 ne dépend que d'un paramètre, et V admet un cône directeur. On peut dire qu'alors un foyer (au moins) est rejeté à l'infini et prendre pour ce foyer $\frac{1}{\rho} = 0$. D'autre part, d'après (1) et (5), on a bien $R = 0$, et (4) est encore vérifiée.

D'où la conclusion générale :

THEOREME. — *La courbure est le produit, changé de signe, des inverses des distances focales.*

21. *Cas particuliers.* — 1° *Congruence orthogonale.* — La connexion est alors celle de la surface des centres, et l'on retrouve bien pour la courbure de l'espace de Riemann réalisé, la *courbure totale* de cette surface.

2° *Congruence de droites* (M milieu des foyers). — On a alors

$$\rho_1 = -\rho_2 = \rho, \quad R = \frac{1}{\rho^2},$$

et la courbure est l'inverse du carré de la demi-distance focale.

3° *Courbure nulle.* — Il faut et il suffit que l'on ait (20.5). *Les congruences V à cône directeur réalisent des espaces à parallélisme absolu [14] et sont les seules à le faire.* Il en est évidemment de même des congruences de droites.

4° En particulier une surface Σ (c'est-à-dire une congruence orthogonale) réalise un plan euclidien si les normales ont un foyer au moins à l'infini, et l'on retrouve bien les développables.

22. *Torsion.* — C'est un vecteur du plan polaire. Elle peut toujours s'exprimer, de façon plus ou moins simple, en fonction des *éléments focaux* de V et de la normale en M à Σ . Mais, dans le cas général d'une *courbure non nulle*, la *torsion relative* $\frac{\vec{T}}{R}$ est liée très simplement au point caractéristique Φ du plan polaire. Après avoir examiné ce point de vue nous donnerons d'autres interprétations de la torsion susceptibles de la fournir quand un ou deux foyers sont rejetés à l'infini.

23. *Torsion des espaces à courbure non nulle.* — Comme $[\omega_{32}, \omega_{31}] \neq 0$, on peut exprimer du_1, du_2 en fonction de ω_{31}, ω_{32} et écrire

$$(1) \quad \omega_1 = a_1 \omega_{31} + a_2 \omega_{32}.$$

1° Si l'on appelle $d\mu$ la projection de dM sur \vec{e}_3 , et si l'on considère le vecteur

$$\vec{A} = a_2 \vec{e}_1 - a_1 \vec{e}_2,$$

l'équation (1) donne

$$(2) \quad d\mu = \vec{A} \wedge d\vec{e}_3 \quad (\text{produit vectoriel}).$$

On peut donc attacher à tout élément S un vecteur \vec{A} du plan polaire (M) tels que $d\mu$ se déduise de la variation élémentaire $d\vec{e}_3$ de la direction de S par la relation (2) : nous appellerons \vec{A} le *vecteur d'obliquité* de V en S; il est nul pour une congruence orthogonale.

2° D'après le n° 15, la torsion relative $\vec{H} = \frac{\vec{T}}{R} = \Pi_1 \vec{e}_1 + \Pi_2 \vec{e}_2$ est donnée par

$$[\omega_3, \omega_{31}] = \Pi_1 [\omega_{32}, \omega_{31}], \quad [\omega_3, \omega_{32}] = \Pi_2 [\omega_{32}, \omega_{31}].$$

En remplaçant ω_3 par son expression (1), il vient

$$\Pi_1 = a_2, \quad \Pi_2 = -a_1,$$

soit

$$(3) \quad \vec{H} = \vec{A}.$$

La torsion relative est égale au vecteur d'obliquité de V.

Et l'on peut écrire

$$(4) \quad \omega_3 = \Pi_1 \omega_{32} - \Pi_2 \omega_{31}.$$

3° Le point caractéristique du plan polaire, soit

$$(5) \quad \Phi = M + x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

s'obtient en écrivant que $d\Phi$ a une composante nulle sur \vec{e}_3 :

$$(6) \quad \omega_3 - x_1 \omega_{31} - x_2 \omega_{32} = 0.$$

D'où $x_1 = a_1, x_2 = a_2$, et le point Φ est unique et à distance finie : nous l'appellerons le *pôle* de l'élément S. Le vecteur $\vec{M}\Phi$ se déduit de \vec{A} par une rotation de $\frac{\pi}{2}$. D'où la conclusion :

THÉORÈME. — *La torsion relative (d'une congruence à courbure non nulle) se déduit du vecteur $\vec{\Phi M}$ qui joint le pôle au centre par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.*

Ce que l'on peut traduire par la formule vectorielle

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{T}}{R} = \vec{M}\Phi \wedge e_3.$$

24. *Remarques.* — 1° Le calcul de Φ au moyen de l'équation (6) n'exige pas l'hypothèse $[\omega_{31}, \omega_{12}] \neq 0$. Mais, si $[\omega_{32}, \omega_{31}] = 0$, on peut voir que Φ est ou bien rejeté à l'infini, ou bien indéterminé (le plan polaire enveloppant alors une développable). La condition pour chaque élément d'avoir un pôle unique à distance finie est donc nécessaire et suffisante pour que la courbure ne soit pas nulle.

2° Pour que $\vec{T} \equiv 0$, il faut et il suffit, si $R \neq 0$, que $\vec{\Pi} \equiv \vec{A} \equiv 0$; c'est-à-dire que l'on ait une congruence orthogonale. Les espaces de Riemann (courbure non nulle et torsion nulle) ne peuvent donc être réalisés que par de telles congruences, c'est-à-dire par des surfaces.

Les congruences de *droites* réalisant des espaces de Riemann (ainsi définis) sont les congruences de normales à une surface minima.

3° La torsion en un point de courbure non nulle s'obtient en divisant $\vec{\Pi}$ par R . En un point *isolé* de courbure nulle, on peut opérer un passage à la limite. La construction du n° 27 nous la donnera directement, du moins si l'élément isolé a ses deux foyers distincts.

25. *Correspondance entre les congruences ayant même connexion à courbure non nulle.* — a. Nous allons démontrer le théorème énoncé au n° 16, d'après lequel les surfaces polaires φ et φ^* de deux congruences V et V^* ayant même connexion sont applicables l'une sur l'autre. Remarquons d'abord que d'après une proposition précédente (24. 10), si tout élément S de V a un pôle Φ (unique à distance finie), V a une courbure non nulle, et, si V^* a la même connexion que V , elle a aussi une courbure, donc en chaque élément S^* un pôle bien défini.

Reprenons le déplacement $T(S, S^*)$ qui amène S^* en S avec coïncidence des cartes (n° 16). Soit \mathcal{F}^* une famille de repères $R(S^*)$ d'ordre o de V^* , \mathcal{F} la famille qui s'en déduit par les $T(S, S^*)$ et qui est une famille d'ordre o de V . La superposition des cartes montre que \mathcal{F} et \mathcal{F}^* ont mêmes composantes latérales, et que l'on a les relations

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_2 = \omega_2^*, \quad \omega_{12} = \omega_{12}^*, \quad \Pi_1 = \Pi_1^*, \quad \Pi_2 = \Pi_2^*.$$

On voit que $T(S, S^*)$ amène Φ^* en Φ . Considérons maintenant les repères $R(\Phi)$ et $R(\Phi^*)$ équipollents à $R(S)$ et $R(S^*)$ et d'origine $\varphi, \varphi^* : T(S, S^*)$ amène $R(\Phi^*)$ en $R(\Phi)$. D'autre part un calcul simple donne pour les composantes relatives $\tilde{\omega}$ de $R(\Phi)$

$$(2) \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 - D\Pi_2,$$

$$(3) \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 + D\Pi_1$$

où $D\Pi_1, D\Pi_2$ sont les différentielles absolues de $\tilde{\Pi}$, définies par

$$(4) \quad D\Pi_1 = d\Pi_1 - \omega_{12}\Pi_2, \quad D\Pi_2 = d\Pi_2 + \omega_{12}\Pi_1.$$

De même pour $R(\Phi^*)$. Les relations (1) donnent alors

$$(5) \quad \tilde{\omega}_1^* = \tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}_2^* = \tilde{\omega}_2.$$

Les $R(\Phi)$ et $R(\Phi^*)$ sont des repères du premier ordre de φ et φ^* , et les relations (5) expriment (1) que les surfaces φ et φ^* sont applicables l'une sur l'autre. (C. Q. F. D.)

b. Il ne suffit évidemment pas que φ et φ^* soit applicables pour que V et V^* réalisent la même connexion. On peut s'en convaincre en prenant φ et φ^* confondues, et pour V la congruence orthogonale des éléments normaux à φ (torsion nulle), tandis que les centres de V^* ne seraient pas situés sur φ (torsion non nulle).

L'applicabilité de φ^* sur φ entraîne (2) une correspondance ponctuelle entre les deux surfaces, et l'existence pour tout couple Φ, Φ^* de points homologues, d'un déplacement $T(\Phi, \Phi^*)$ qui amène Φ^* en Φ , et Φ'^* voisin de Φ^* en coïncidence au second ordre près avec son homologue Φ' . Ce déplacement est bien défini pour chaque couple Φ, Φ^* , à condition toutefois que φ ne se réduise pas à un point. Nous dirons que *ce déplacement réalise l'application de φ^* sur φ* . Nous allons démontrer (quand φ ne se réduit pas à un point) la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soit une congruence V dont chaque élément a un pôle unique à distance finie, variable avec l'élément. Pour que V^* réalise la même connexion que V , il faut et il suffit : 1° que sa surface polaire soit applicable sur celle de V ; 2° que le déplacement qui réalise l'application en deux points homologues amène en coïncidence les éléments qui admettent pour pôles ces deux points.*

La condition est nécessaire. — D'après (5), si V^* a la même connexion que V , $T(S, S^*)$ réalise l'application de φ^* sur φ ; $T(\Phi, \Phi^*)$ étant bien déterminé (car φ ne se réduit pas à un point), est donc confondu avec $T(S, S^*)$ et amène bien S^* en S .

La condition est suffisante. — En effet, prenons sur φ^* une famille de repères $R(\Phi^*)$ du premier ordre, et soit $R(\Phi)$ le repère déduit de $R(\Phi^*)$ par $T(\varphi, \varphi^*)$; c'est un repère du premier ordre de φ , et les composantes $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}^*$ de $R(\varphi)$ et de $R(\Phi^*)$ vérifient les relations (5) et de plus (en tenant compte des équations de structure de l'espace, cf. [15]), la relation

$$(6) \quad \tilde{\omega}_{12}^* = \tilde{\omega}_{12}.$$

(1) Cf. É. CARTAN [13], p. 227.

(2) Cf. É. CARTAN [13], p. 230.

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs de base de $R(\Phi)$; on a pour le centre M de l'élément S de pôle Φ

$$(7) \quad M = \Phi - \Pi_1 \vec{e}_2 + \Pi_2 \vec{e}_1.$$

De même pour S^* , et l'hypothèse donne

$$(8) \quad \Pi_1 = \Pi_1^*, \quad \Pi_2 = \Pi_2^*.$$

Prenons pour repères en S, S^* dans V et V^* des repères équipollents aux $R(\Phi)$, $R(\Phi^*)$; ils auront mêmes composantes de rotation que ces derniers et, d'après (6), on aura

$$(9) \quad \omega_{12}^* = \omega_{12}.$$

Les équations (6), (8), (4) ont pour conséquence

$$D\Pi_1 = D\Pi_1^*, \quad D\Pi_2 = D\Pi_2^*,$$

d'où, d'après (5) et (2),

$$(10) \quad \omega_1 = \omega_1^*, \quad \omega_2 = \omega_2^*.$$

Les équations (9) et (10) expriment que V et V^* ont mêmes composantes latérales.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il peut se faire que la correspondance ponctuelle entre φ et φ^* ne soit pas bien définie (exemple : 2 sphères égales). Il suffirait alors qu'il existe un choix de cette correspondance tel que les déplacements $T(\Phi, \Phi^*)$ correspondants vérifient la condition du théorème.

26. *Torsion dans le cas de deux foyers distincts.* — L'un d'eux au moins F_1 est à distance finie. Soit ρ_1 la distance focale correspondante. L'angle X d'un plan focal avec \vec{e}_1 vérifie

$$(1) \quad \text{tang X} = \frac{\omega_2 + \rho \omega_{12}}{\omega_1 + \rho \omega_{11}}.$$

a. Prenons \vec{e}_1 dans le plan focal (p_1) relatif à F_1 . On a alors, pour (p_1) , $X = 0$, d'où

$$(2) \quad \omega_{12} = \frac{-\omega_2}{\rho_1}.$$

b. Soit $\vec{H} = p \vec{e}_1 + q \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ le vecteur normal en M à Σ qui se projette en \vec{e}_3 sur S. Quels que soient du_1, du_2 , on a $\vec{H} \cdot d\vec{M} = 0$, d'où

$$(3) \quad \omega_3 = -p \omega_1 - q \omega_2.$$

c. La composante T_2 de la torsion sur \vec{e}_2 , c'est-à-dire sur le plan normal à (p_1) passant par S, est donnée par

$$[\omega_3 \omega_{32}] = T_2 [\omega_1 \omega_2],$$

d'où

$$(4) \quad T_2 = \frac{P}{\rho_1}.$$

Or $\frac{P}{\rho_1}$ est la composante sur \vec{e}_2 du produit vectoriel

$$(5) \quad \overrightarrow{Mg_1} = \frac{1}{\rho_1} \vec{e}_3 \wedge \vec{H}.$$

Nous réserverons désormais le nom de *torsion* (en S de V) au vecteur torsion pris avec M(S) comme origine. D'après (4) et (5) *l'extrémité de la torsion est sur la parallèle menée par g_1 à la trace polaire de (p_1) .*

En recommençant avec le second foyer supposé aussi à distance finie, on aurait un second vecteur $\overrightarrow{Mg_2}$ (d'ailleurs colinéaire à $\overrightarrow{Mg_1}$), et une seconde droite δ_2 , non parallèle à δ_1 (puisque, les foyers étant distincts, les plans focaux le sont aussi). D'où le vecteur \vec{T} .

Les vecteurs \overrightarrow{Mg} peuvent être imaginaires; l'extrémité de la torsion est alors le point réel de δ_1 .

On aurait aussi la torsion relative en remplaçant $\overrightarrow{Mg_1}$ par

$$\overrightarrow{Mg'_1} = -\rho_2 \vec{e}_3 \wedge \vec{H} = \vec{H} \wedge \overrightarrow{MF_2},$$

et de même $\overrightarrow{Mg_2}$ par

$$\overrightarrow{Mg'_2} = \vec{H} \wedge \overrightarrow{MF_1}.$$

27. *Cas d'un foyer simple à l'infini.* — La construction de la torsion est une extension de la précédente.

Si $[\omega_{32}\omega_{31}] = 0$, quand le point $P = M + \lambda \vec{e}_3$ s'éloigne à l'infini sur D, les plans (\vec{e}_3, dt) qui dépendent de $\frac{du_2}{du_1}$ ont une même position limite indépendante de du_1, du_2 , et qui fait avec \vec{e}_1 l'angle X vérifiant

$$(1) \quad \text{tang X} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda \omega_{12} + \omega_2}{\lambda \omega_{31} + \omega_1} = \frac{\omega_{12}}{\omega_{31}}.$$

On voit que X est bien défini si ω_{31} et ω_{32} ne sont pas tous deux nuls et vérifient $[\omega_{31}\omega_{32}] = 0$.

a. $\omega_{31} = \omega_{32} = 0$. On a alors une congruence d'*éléments parallèles* ($\overrightarrow{de_3} = 0$). Il résulte immédiatement de l'expression générale de la torsion (n° 15) que *la torsion est nulle*. Comme $R = 0$, une telle congruence réalise le plan euclidien. D'autre part, il n'y a alors aucun foyer à distance finie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b. Si ω_{31} et ω_{32} ne sont pas tous deux nuls, la position limite du plan (\vec{e}_3, dP) est le plan focal de l'infini. Si V a un cône directeur, ce plan est d'ailleurs parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice parallèle à S.

Prenons \vec{e}_1 dans ce plan focal (p') ; $X = 0$ donne

$$(2) \quad \omega_{12} = 0,$$

d'où

$$(3) \quad T_2 = [\omega_1, \omega_{32}] = 0.$$

La torsion est dans le plan focal de l'infini.

c. Si l'on a un foyer F, à distance finie, on peut lui appliquer la construction du n° 26; et \vec{T} est alors la projection de \vec{Mg}_1 parallèlement à (p_1) sur la trace polaire de (p') . Ces constructions sont réelles, si du moins S et V le sont. On a donc la proposition suivante :

THEOREME. — *La torsion dans le cas d'un foyer simple à l'infini est la projection sur la trace polaire du plan focal de l'infini et parallèlement à l'autre plan focal du vecteur*

$$\vec{g} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_3 \wedge \vec{H},$$

où ρ désigne la distance focale finie, \vec{e}_3 le vecteur unitaire de S, \vec{H} le vecteur normal à la surface des centres qui se projette orthogonalement en \vec{e}_3 sur S.

Dans le cas d'une congruence de droites, on a $\vec{FM} = \vec{e}_3$, c'est-à-dire $\rho = -1$, et le vecteur à considérer dans l'énoncé précédent est le vecteur

$$\vec{g} = \vec{MF} \wedge \vec{H}.$$

28. Réalisations du plan euclidien. — Nous dirons qu'une congruence, dont chaque élément a en général un foyer simple à l'infini, admet un cône directeur simple. La nullité de \vec{T} exige alors :

a. Soit que \vec{e}_3 et \vec{H} soient colinéaires; congruence orthogonale, la surface des centres étant une développable.

b. Soit que \vec{g} se trouve dans le plan focal à distance finie; remarquons que \vec{g} est toujours tangent à la surface des centres Σ ; dans l'hypothèse envisagée, la congruence s'obtient donc en coupant la surface des centres par des plans dépendant d'un paramètre, et se compose des cylindres admettant pour sections droites les sections ainsi définies.

29. *Torsion des congruences à cône directeur double* (c'est-à-dire dont chaque élément a un foyer double à l'infini). — L'équation en ζ (20.2) n'a jamais de racine finie, donc

$$(1) \quad [\omega_{31}\omega_{32}] = [\omega_1\omega_{32}] + [\omega_2\omega_{31}] = 0.$$

Écartons l'hypothèse $\omega_{31} = \omega_{32} = 0$ examinée au n° 27 a. Le plan focal est bien déterminé, et en prenant \vec{e}_1 dans le plan focal on a (n° 27 b) $\omega_{32} = 0$. C'est donc que $\omega_{31} \neq 0$.

Or en faisant dans l'hypothèse (1) $\omega_{32} = 0$, il vient

$$[\omega_2\omega_{31}] = 0,$$

d'où

$$(2) \quad \omega_{31} = K\omega_2 \quad (K \neq 0).$$

D'autre part

$$\omega'_{32} = 0,$$

donc

$$[\omega_{31}\omega_{12}] = 0$$

et

$$(3) \quad \omega_{12} = A\omega_2.$$

Le tableau des composantes des repères est alors le suivant :

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} [\omega_1\omega_2] \neq 0, \\ \omega_3 = -p\omega_1 - q\omega_2, \end{array} \quad \begin{array}{l} \omega_{31} = K\omega_2 \quad (K \neq 0); \\ \omega_{32} = 0; \\ \omega_{12} = A\omega_2. \end{array}$$

Le cylindre de la congruence passant par S est défini par $d\vec{e}_3 = 0$, donc $\omega_{31} = 0$. On a alors

$$\omega_2 = \omega_{31} = \omega_{12} = 0.$$

Ce cylindre est donc le plan $M\vec{e}_1\vec{e}_3$, c'est-à-dire le plan focal (p) de S. Quand S varie, (p) dépend d'un paramètre; car s'il était fixe on aurait $\omega_2 \equiv 0$, et la congruence ne serait pas ordinaire. A chaque génératrice (δ) du cône directeur correspond un plan $p(\delta)$ bien déterminé, et les éléments S décrivent les plans $p(\delta)$ en restant parallèles à (δ).

D'après (4) et le n° 15, on a, pour la torsion,

$$T_2 = 0, \quad T_1 = -pK,$$

soit

$$(5) \quad \vec{T} = -K(p\vec{e}_1).$$

La torsion est donc la projection orthogonale, sur la trace polaire du plan focal, du vecteur

$$\vec{\gamma} = -K\vec{H}.$$

La signification de K varie suivant que A est nul ou non.

1° $A = 0$. — Alors $\omega_{12} \equiv \omega_{32} \equiv 0$ et $\vec{de}_2 \equiv 0$, (p) a une *direction* fixe. Le cône directeur est un plan. On peut repérer S par la distance z de $p(\delta)$ à un plan fixe $p(\delta_0)$ et l'angle $\theta(z) = \widehat{\delta_0, \delta}$. On a alors

$$\omega_2 = dz, \quad \omega_{31} = d\theta$$

et

$$(6) \quad K = \frac{d\theta}{dz}.$$

On peut regarder z et θ comme la plus courte distance et l'angle de S avec un élément de base fixe S_0 pris dans V .

2° $A \neq 0$. — Le plan (p) n'a plus une direction fixe. Sa droite caractéristique est parallèle à S . Les éléments S de V sont *tangents à l'infini à la développable* (Δ) enveloppée par ce plan.

Considérons l'arête de rebroussement (A) de (Δ). Son repère de Frenet \bar{R} a pour composantes, en prenant \vec{e}_3 tangent et \vec{e}_1 sur la normale principale,

$$(7) \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_{32} = 0, \quad \omega_{31} = \frac{\omega_3}{R_a}, \quad \omega_{12} = \frac{\omega_3}{T_a}, \quad \text{avec } R_a, T_a \text{ finis } ^{(1)},$$

R_a et T_a étant les inverses de la courbure et de la torsion de (A) au point P origine de \bar{R} .

Le repère R de composantes (4) se déduit de \bar{R} par la translation $\vec{PM} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_3$, et l'on a en particulier

$$(8) \quad \omega_2 = \omega_2 + \lambda \omega_{12} + \mu \omega_{32} = \frac{\lambda}{T_a} \omega_3, \quad \omega_{31} = \frac{\omega_3}{R_a} = K \omega_2,$$

d'où

$$(9) \quad K = \frac{T_a}{\lambda R_a}.$$

Résumons les résultats obtenus :

THÉORÈME. — *La torsion en S d'une congruence V à cône directeur double est la projection orthogonale, sur la trace polaire du plan focal, du vecteur $-\mathbf{K}\vec{H}$, \vec{H} étant le vecteur normal à la surface des centres qui se projette sur S suivant le vecteur unitaire, et \mathbf{K} ayant l'une ou l'autre des significations suivantes :*

1° *Si le cône est un plan, \mathbf{K} est la dérivée de l'angle de S avec un élément S_0 fixe de V par rapport à la plus courte distance de S à S_0 .*

2° *Si le cône n'est pas un plan, et si λ est la distance de S à la génératrice (δ) parallèle à S de la développable (Δ) à laquelle les éléments (S) restent tangents à*

(1) (A) ne peut être plane, sans quoi les S seraient tous dans son plan (congruence non ordinaire), ou alors (A) serait une droite, et l'on aurait une congruence d'éléments parallèles, hypothèse que nous avons exclue.

l'infini, R_a et T_a les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de (Δ) en son point de contact avec $(\hat{\sigma})$, on a

$$K = \frac{T_a}{\lambda R_a}.$$

30. *Congruences de droites à cône directeur double.* — Dans le cas d'un plan directeur, elles admettent le groupe des translations parallèles à ce plan directeur. L'origine du repère intrinsèque est incomplètement déterminée, mais doit pourtant vérifier $\omega_3 = 0$ quand $\omega_2 = 0$; alors $p = 0$, $\vec{T} = 0$.

Dans le cas d'un cône directeur non plan, on peut prendre pour origine du repère intrinsèque la projection sur D du point P de l'arête de rebroussement de (Δ) où elle admet le plan focal de D comme plan osculateur. Le repère intrinsèque se déduit alors du repère \bar{R} du n° 29 par la translation

$$\vec{PM} = \lambda \vec{e}_1$$

et l'on a, pour ses composantes,

$$\omega_3 = \varpi_3 + \lambda \varpi_{31} = \varpi_3 (1 + \lambda A), \quad \omega_{31} = \varpi_{31} = \frac{\varpi_3}{R_a},$$

ce qui entraîne

$$[\omega_3 \omega_{31}] = 0 \quad \text{et} \quad \vec{T} = 0.$$

D'autre part $\omega_1 = d\lambda$ et $[\omega_1 \varpi_3] \neq 0$: on a bien une congruence ordinaire; enfin, d'après (29.8), ω_3 ne dépend que de ω_2 (proportionnel à ϖ_3) et non de ω_1 ; l'origine du repère de Frenet est caractérisée par $p = 0$ conformément à la définition du n° 19.

Dans tous les cas, les congruences de droites à cône directeur double sont caractérisées par $p = 0$ et réalisent le plan euclidien.

31. *Réalisations du plan euclidien.* — Reprenons une congruence V à cône directeur double. Remarquons d'abord que, si le cône est un plan, $\frac{d\theta}{dz} \neq 0$ si la congruence n'est pas formée d'éléments parallèles; si le cône n'est pas un plan, on a vu que $\frac{1}{R_a} \neq 0$; dans tous les cas $K \neq 0$, il faut et il suffit que $p = 0$, donc qu'on ait la connexion d'une congruence de droites.

Les possibilités de réalisation du plan euclidien ont été complètement examinées dans les numéros précédents. Ce sont :

- a. Les surfaces développables (n° 28 a).
- b. Les congruences à cône directeur simple, dont la surface des centres coupe les cylindres suivant des sections droites (n° 28).
- c. Les congruences de droites à cône directeur double (n° 30 et 31).
- d. Les congruences d'éléments linéaires parallèles (n° 27 a).

32. *Autres expressions de la torsion.* — Nous nous bornerons à signaler les résultats :

1° *Foyers confondus à distance finie.* — Trois cas sont à distinguer, la congruence pouvant être formée :

- a. d'éléments à supports tangents aux asymptotiques d'une surface ;
- b. d'éléments à supports tangents à une développable le long d'une courbe ;
- c. d'éléments passant par un point fixe.

La torsion relative peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad \vec{\Pi} = \vec{H} \wedge \vec{MF} + p A \vec{e}_1,$$

\vec{H} et p ayant la signification donnée plus haut ; M, F étant le centre et le foyer de l'élément ; \vec{e}_1 le vecteur unitaire de la trace polaire du plan focal ; et A ayant, suivant le cas envisagé, les expressions suivantes :

a. A est le rayon de torsion de l'asymptotique tangente à $D(S)$.

b. s désignant l'arc de l'arête de rebroussement, T_a, R_a les rayons de torsion et de courbure de cette arête au point de contact P avec la génératrice passant par F , λ la mesure de \widehat{PF} et φ l'angle \widehat{PF}, D ,

$$(2) \quad A = -T_a \left(1 + \frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{R_a} \cot \varphi \right).$$

c. Pour une congruence d'éléments passant par un point fixe, $A = 0$ et

$$(3) \quad \vec{\Pi} = \vec{H} \wedge \vec{MF}.$$

2° *Composantes de la torsion par rapport au repère de Frenet de V .* — Quand les deux foyers sont distincts, les plans focaux le sont aussi. Soient ρ_1, ρ_2, X_1, X_2 les distances focales et les angles des plans focaux avec \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Les équations

$$\omega_2 + \rho_1 \omega_{32} = \tan X_1 (\omega_1 + \rho_1 \omega_{31}), \quad \omega_2 + \rho_2 \omega_{32} = \tan X_2 (\omega_1 + \rho_2 \omega_{31})$$

donnent ω_{31}, ω_{32} en fonction des ω_1, ω_2 , des ρ et des X .

a. *Deux foyers à distance finie.* — On prendra pour le repère intrinsèque de la congruence (d'éléments linéaires) le vecteur \vec{e}_1 dans un plan bissecteur des plans focaux. Alors

$$X_1 = -X_2 = X$$

et

$$\Pi_1 = aq - \rho p \cot X, \quad \Pi_2 = \rho q \tan X - ap,$$

avec

$$a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = MF_0, \quad \rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} = F_0 F_1 \quad (F_0 \text{ milieu des foyers}).$$

En particulier, pour une congruence *de droites* ($\rho_1 = -\rho_2 = \rho =$ demi-distance focale)

$$\Pi_1 = -p\rho \cot X, \quad \Pi_2 = q\rho \tan X.$$

b. Congruence V à cône directeur. — On prendra \vec{e}_1 dans le plan focal relatif à ce foyer rejeté à l'infini; alors

$$\frac{1}{\rho_1} = 0, \quad \tan X_1 = 0; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}, \quad \tan X_2 = \tan X$$

et l'on a

$$T_2 = 0 \quad T = T_1 = \frac{-P}{\rho} \cot X - \frac{Q}{\rho}.$$

Dans le cas d'une congruence *de droites*, $\rho = -1$. On trouve alors

$$\omega_{31} = \omega_1 - \omega_2 \cot X.$$

Or $\omega_{31} = 0$ donne un cylindre de la congruence. Le long de ce cylindre

$$\omega_3 = -p(\omega_2 \cot X) - q\omega_2 = -T\omega_2.$$

D'autre part, toujours le long de ce cylindre, $dM = dF$; T est donc le rapport de ω_3 à ω_2 quand F décrit le cylindre passant par D. Ce qui donne le résultat suivant :

La torsion d'une congruence de droites à cône directeur est donnée par

$$T = \frac{\cot \psi}{\sin X},$$

ψ étant l'angle avec D de la courbe de contact du cylindre passant par D avec la surface focale, et X l'angle des plans focaux.

II. — Pseudo-lignes. Droites et géodésiques.

33. La correspondance établie entre les éléments de V et les points de l'espace E réalisé entraîne une correspondance entre les lignes (L') tracées dans (E') et les variétés (L) à une dimension, que nous appellerons *pseudo-lignes*, situées dans V. D'après la définition même de la connexion de V et de E', le développement de E' suivant une ligne L' n'est autre que celui de V suivant la pseudo-ligne (L) correspondante.

Pour étudier les pseudo-lignes de V, nous utiliserons les *composantes générales d'ordre zéro* de V, c'est-à-dire les composantes relatives du repère $\bar{R} = R(S, \varphi + \theta)$ le plus général d'ordre zéro, θ étant une fonction arbitraire, φ une fonction choisie arbitrairement une fois pour toutes. Le repère \bar{R} dépend de trois paramètres, u_1 , u_2 et θ . Le repère $R(S, \varphi)$ ayant pour composantes ω_i ,

ω_{ij} , qui sont (pour une congruence donnée) *des formes données de u_1, u_2* , le repère \bar{R} a pour composantes

$$(1) \quad \begin{cases} \varpi_1 = \omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta, & \varpi_{31} = \omega_{31} \cos \theta + \omega_{32} \sin \theta; \\ \varpi_2 = -\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta, & \varpi_{32} = -\omega_{31} \sin \theta + \omega_{32} \cos \theta; \\ \varpi_3 = \omega_3, & \varpi_{12} = \omega_{12} + d\theta. \end{cases}$$

Nous désignerons par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs de base de \bar{R} . Sur une pseudo-ligne (L) de V, on prendra \vec{e}_1 dans le plan tangent à (L) en M. La pseudo-ligne est alors définie par $\varpi_2 = 0$, et le choix d'une fonction $\theta(u_1, u_2)$. La pseudo-ligne $\theta = f(u_1, u_2)$ passant par un élément donné S_0 , est le lieu de l'élément $(\vec{M}e_3)$ quand le repère \bar{R} décrit la famille à 1 paramètre définie par

$$\theta = f(u_1, u_2), \quad \varpi_2 = 0$$

et la condition que S_0 soit une position particulière de $\vec{M}e_1$.

Dans l'espace E' réalisé, $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_{12}$ sont les composantes du repère le plus général; sur une ligne (L') de E' on peut prendre le premier vecteur du repère tangent à (L') et la ligne est encore définie par $\varpi_2 = 0$ et la fonction $\theta(u_1, u_2)$. Une ligne et la pseudo-ligne correspondante sont alors définies toutes deux par la même fonction θ .

34. *Définitions relatives à E'* . — On distinguera dans E' les droites, qui seront par définition les lignes dont la tangente reste de proche en proche parallèle à elle-même, et les géodésiques qui sont les lignes de longueur minima. Une droite est donc caractérisée par

$$(1) \quad \varpi_2 = \varpi_{12} = 0$$

et une géodésique par la propriété d'être une extrémale de $\int \sqrt{\varpi_1^2 + \varpi_2^2}$ prise entre deux de ses points.

Une droite géodésique est une ligne jouissant des deux propriétés. Quand la torsion n'est pas nulle ce sont des droites exceptionnelles.

Nous aurons enfin à considérer les lignes de torsion, qui sont par définition tangentes en chacun de leurs points au vecteur de torsion de ce point.

35. *Définitions relatives aux congruences*. — Nous utiliserons, dans l'étude des pseudo-droites d'une congruence V, les définitions suivantes (données avec les notations du n° 9).

1° Deux éléments linéaires sont dits *normaux* s'ils ont même centre et des supports perpendiculaires.

2° On appellera *variété conjuguée* $\overline{\omega}$ d'une pseudo-ligne ω d'éléments S, la variété engendrée par les éléments S' normaux à S et situés dans le plan tangent à ω en M(S).

Une variété ω admet ainsi une conjuguée bien définie $\overline{\omega}$. Il y a en général réciprocity. Le cas d'exception est celui où $\overline{\omega}$ est une développable dont la ligne des centres [lieu de M(S)] est l'arête de rebroussement. Dans ce cas particulier, il y a une infinité de pseudo-lignes admettant $\overline{\omega}$ comme conjuguée, mais une seule d'entre elles est la conjuguée de ω .

3° On appellera *complexe normal* à V, soit K_V , le complexe des éléments σ normaux aux éléments de V. Il est formé d'éléments dont le centre décrit la surface $\Sigma(V)$; les éléments de centre donné sont dans le plan polaire P(S) de l'élément S de V ayant ce point pour centre.

4° On appellera *variété normale* à une dimension de K_V , toute variété engendrée par des éléments σ (appartenant à K_V et dépendant d'un paramètre) qui est *normale* au plan polaire P(S) au centre M(σ) de ses éléments, ou, le cas échéant, le long de leur support D(σ).

La conjuguée d'une variété normale ω de K_V est une pseudo-ligne $\overline{\omega}$ de V, et il y a *réciprocité*, c'est-à-dire que ω est alors la conjuguée de $\overline{\omega}$; mais la *reciproque de cette proposition* n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire qu'il peut exister des pseudo-lignes ω_1 de V dont la conjuguée $\overline{\omega}_1$ ne soit pas une variété normale de K_V ; ces pseudo-lignes exceptionnelles sont caractérisées par le fait que leurs éléments générateurs sont des *normales non principales* à la ligne des centres ($\omega_2 = \omega_3 = 0$, $\omega_{12} \neq 0$).

36. *Pseudo-droites.* — Nous allons établir à leur sujet le théorème suivant :

THEOREME. — *Les pseudo-droites d'une congruence V sont les conjuguées des développables normales du complexe normal à V.*

a. Soit en effet une pseudo-droite ω de V; les composantes du repère \overline{R} attaché à ω vérifient, par définition des droites de E',

$$(34.1) \quad \omega_2 = \omega_{12} = 0.$$

La variété conjuguée $\overline{\omega}$ est le lieu de l'élément $(M\overrightarrow{e}_1)$. Or cet élément décrit une développable. En effet, si l'on prend un point P = M + $\lambda\overrightarrow{e}_1$ sur cet élément, la composante de dP sur \overrightarrow{e}_2 , à savoir

$$\omega_2 + \lambda\omega_{12},$$

est constamment nulle quel que soit λ , et le plan tangent reste fixe tout le long

de la génératrice $(\overrightarrow{Me_1})$ de $\overline{\omega}$; ce plan n'est autre d'ailleurs que le plan $\overrightarrow{Me_1e_3}$ qui est normal au plan polaire, et ω est bien une *développable normale* de K_V .

b. *Réciproquement*, si $(\overrightarrow{Me_1})$ décrit une développable normale de K_V , cette développable admet pour plan tangent le long de $(\overrightarrow{Me_1})$ le plan $\overrightarrow{Me_1e_3}$ et le repère admet pour composantes $\omega_1 = \omega_{12} = 0$: $(\overrightarrow{Me_3})$ engendre bien une pseudo-droite de V .
C. Q. F. D.

Remarque. — Si la congruence V contient *un plan*, c'est-à-dire si une pseudo-ligne de V est située dans un plan, la variété conjuguée de cette pseudo-ligne est le plan lui-même, donc c'est une développable, qui d'autre part est visiblement normale au plan polaire : *les plans d'une congruence sont des pseudo-droites.*

Cas particuliers. — Quand V est une congruence orthogonale, les plans polaires sont les plans tangents à la surface des centres Σ ; les développables du complexe normal ont pour arête de rebroussement les courbes (γ) de Σ , les développables normales sont celles dont le plan osculateur en M à (γ) est normal en M à Σ (M étant le centre de l'élément générateur), et l'on retrouve bien pour les courbes (γ) *les géodésiques de Σ .*

37. *Parallélisme.* — Soient deux éléments infiniment voisins S et S' ; un élément normal à S représente une *pseudo-direction de V* issue de S . Deux pseudo-directions δ, δ' sont parallèles, d'après la définition de la connexion, si la projection de δ' sur le plan polaire de S est parallèle à D . Il revient au même de dire que δ et δ' font le même angle avec la développable normale de K_V passant par S, S' .

On peut définir un parallélisme entre deux points A et B non infiniment voisins, au moyen de cette dernière propriété. Ce parallélisme sera bien défini s'il ne passe qu'une pseudo-droite par A et B , et le postulat d'Euclide est alors vérifié. Mais, si l'espace n'est pas à parallélisme absolu, étant donnés trois points A, B, C , deux pseudo-directions issues de B et de C et parallèles à une même troisième issue de A ne sont pas en général parallèles.

38. *Géodésiques.* — La distance élémentaire de E' est donnée par

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

Or, si $d\sigma$ est l'arc d'une courbe (γ) de Σ décrite par $M(S)$, et α l'angle (compris entre zéro et π) de (γ) avec $D(S)$, on a

$$ds = d\sigma \sin \alpha,$$

et par suite les pseudo-géodésiques ont pour trace dans Σ les extrémales de $\int \sin \alpha d\sigma$.

On retrouve bien les géodésiques de Σ quand on a une congruence orthogonale (puisque alors $\sin \alpha = 1$).

Définition d'une distance dans V. — On peut considérer les pseudo-géodésiques comme de véritables géodésiques de V, en prenant

$$dS = SS' = d\sigma \sin \alpha,$$

comme distance de deux éléments linéaires S, S' infiniment voisins. Cette définition est cohérente, puisque $SS' = S'S$ au second ordre près (ou, si l'on oriente la courbe et la pseudo-ligne, $\overline{SS'} = -\overline{S'S}$). La longueur d'une pseudo-ligne (L) joignant A et B est alors, en valeur absolue,

$$l = AB = BA = \int_B^A d\sigma \sin \alpha.$$

On peut interpréter cette longueur comme le travail d'une force \vec{F} d'intensité 1, qui appliquée dans les conditions du n° 17 [normalement en M(S) à D(S)], transporterait S de A à B le long de (L). En supposant une résistance du milieu opposée au déplacement latéral de D et fonction uniquement de la vitesse $\frac{dS}{dt}$, les géodésiques seraient les *trajectoires de travail minimum* pour une vitesse constante donnée; elles sont d'ailleurs indépendantes de la vitesse constante choisie.

On peut aussi regarder la longueur l comme la limite du quotient par λ , quand $\lambda \rightarrow 0$, de l'aire balayée par le vecteur $\lambda \vec{e}_3$ d'origine M quand S va de A à B le long de (L). Si l'on désigne par $\alpha(\lambda, \mu)$ l'aire balayée par le segment PQ de S défini par $P = M + \lambda \vec{e}_3$, $Q = M + \mu \vec{e}_3$, on a

$$l = \frac{\partial \alpha(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} \quad \text{pour } \lambda = 0.$$

39. *Repères attachés aux géodésiques.* — Soit une pseudo-ligne (L); les repères \bar{R} attachés à (L), c'est-à-dire tels que \vec{e}_1 soit tangent à (L) (cf. n° 33), dépendent d'un paramètre t . Considérons une famille à un paramètre x de pseudo-ligne $L(x)$ passant par deux éléments donnés A et B. Les $\bar{R}(t)$ attachés aux diverses $L(x)$ constituent une famille à deux paramètres de repères $\bar{R}(t, x)$, dont on désignera par $\tilde{\omega}$ les composantes relatives; comme pour x fixe, soit $x = x_1$, $\bar{R}(t, x_1)$ a sa composante $\tilde{\omega}_2$ nulle, on peut dire que :

- 1° $\tilde{\omega}_2$ ne dépend pas de dt , elle est de la forme $\tilde{\omega}_2 = f(x, t) dx$;
- 2° L'élément d'arc de $L(x_1)$ est $ds = \tilde{\omega}_1(x_1, t, dx = 0, dt)$.

Les géodésiques sont les extrémales de $\int_{\lambda}^B \tilde{\omega}_1(x_1, t, dx = 0, dt)$, donc leur paramètre x_0 vérifie la condition nécessaire et suffisante [7]

$$(1) \quad \tilde{\omega}'_1(x_0, t, dx, dt) = 0.$$

En désignant par \bar{T}_1 la projection de la torsion \vec{T} sur \vec{e}_1 , les équations de structure donnent pour cette condition

$$(2) \quad \tilde{\omega}'_1 = [\tilde{\omega}_{12}\tilde{\omega}_2] + \bar{T}_1[\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2] = 0.$$

Il en résulte que $\tilde{\omega}_{12}$ est de la forme

$$(3) \quad \tilde{\omega}_{12} = -\bar{T}_1\tilde{\omega}_1 + g(x, t)\tilde{\omega}_2$$

et comme $\tilde{\omega}_2(x_0, t, dx = 0, dt)$ est nul, on a pour l'extrémale

$$(4) \quad \tilde{\omega}_{12} = -\bar{T}_1\tilde{\omega}_1.$$

Réciproquement, soit une pseudo-ligne (L) dont le repère $\bar{R}(t)$ vérifie la condition (4); et soit une famille $\bar{R}(t, x)$ se réduisant à $\bar{R}(t)$ pour $x = x_0$; alors, pour $x = x_0$, $dx = 0$ entraîne (4), et par suite la composante $\tilde{\omega}_{12}$ de $\bar{R}(t, x)$ est de la forme (3), donc (2) est vérifiée. Conclusion :

Les géodésiques sont caractérisées par

$$(5) \quad \boxed{\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_{12} + \bar{T}_1\tilde{\omega}_1 = 0.}$$

Le calcul est le même qu'on se place dans E' ou dans V .

Variétés conjuguées des géodésiques. — Dans E' , la courbure d'une géodésique g' est donc $-\bar{T}_1$; c'est celle du développement sur un plan de g' , et par suite aussi de la pseudo-ligne g correspondante. Le repère \bar{R} attaché à g est le repère intrinsèque de g . C'est aussi le repère intrinsèque de la variété conjuguée g^* , qui est une variété normale du complexe K_V normal à V ; \bar{T}_1 est alors au signe près l'invariant différentiel $I = \frac{\tilde{\omega}_{12}}{\tilde{\omega}_1}$ de g^* ; cet invariant serait nul si g^* était une développable normale de K_V et caractérise ainsi la différence entre g^* et une telle développable. Et l'on peut caractériser les géodésiques par la propriété d'avoir pour conjuguées les variétés g^* du complexe normal, dont l'invariant I est égal et de signe contraire à la projection de la torsion sur le plan tangent à g^* .

40. *Droites géodésiques.* — Les droites de E' ne sont toutes des géodésiques que si la torsion \vec{T} est partout nulle [8]. Si $\vec{T} \neq 0$, certaines droites peuvent être

des géodésiques; il faut et suffit pour cela que la projection \bar{T} , de \vec{T} sur une telle droite soit nulle en chacun de ses points, ainsi qu'il résulte d'un calcul direct de variations [8], ou encore de la comparaison des conditions (34.1) et (39.5), ou encore des résultats relatifs aux variétés conjuguées des pseudo-droites et des géodésiques (nos 36 et 39). La notion de trajectoires orthogonales s'étend d'elle-même aux pseudo-lignes de V , et la condition nécessaire et suffisante pour qu'une pseudo-droite soit géodésique est qu'elle soit trajectoire orthogonale des lignes de torsion, ou bien qu'elle soit une pseudo-ligne de torsion nulle. Nous désignerons par (A) cette condition.

Quand la congruence n'a pas de cône directeur, il existe une relation entre les pseudo-droites géodésiques et les géodésiques de la surface polaire.

THEOREME. — *Pour qu'un élément S décrive une pseudo-droite géodésique d'une congruence à surface polaire non dégénérée, il faut et il suffit que son pôle Φ décrive une géodésique de la surface polaire, et que la tangente en Φ à cette géodésique passe par le centre de S .*

Démonstration. — Soit une congruence V sans cône directeur (engendrée par des éléments S dont le centre M est à distance finie). Le théorème s'applique à un domaine de V correspondant à un domaine à distance finie de la surface polaire.

Quand S décrit dans V une pseudo-ligne (L) , Φ décrit dans (φ) une ligne (λ) . On désignera par Φ'_λ la tangente en Φ à (λ) . Soit (\bar{L}) la variété conjuguée de (L) , elle est engendrée par la droite δ tangente en $M(S)$ à (L) et normale à S .

a. La condition du théorème est nécessaire, c'est-à-dire que si (L) est une pseudo-droite géodésique, (λ) est une géodésique de (φ) et Φ'_λ passe par M .

En effet, d'après la condition (A), ou bien la torsion en S est nulle, ou bien elle est normale en M à (L) . Comme $R \neq 0$, c'est ou bien que M est en Φ , ou bien que, \vec{T} étant normal à $M\Phi$ (n° 23), $M\Phi$ est tangente à (L) ; dans les deux cas (δ) passe par M et par Φ .

(L) étant une pseudo-droite, (\bar{L}) est une développable normale au plan polaire $P(S)$, donc normale en Φ à (φ) ; il en résulte ⁽¹⁾ que (λ) est son arête de rebroussement, donc que Φ'_λ et δ sont confondues et Φ'_λ passe bien par M , et d'autre part que (λ) est une géodésique de (φ) .

b. La condition est suffisante. — Si (λ) est une géodésique de (φ) , Φ'_λ engendre une développable normale en Φ à (φ) donc à $P(S)$. Si Φ'_λ passe par M , cette développable est la conjuguée de (L) , donc (L) est une pseudo-droite.

⁽¹⁾ La tangente Φ'_λ est située dans le plan tangent à la développable, et dans le plan $P(S)$ tangent à (φ) ; ces deux plans étant distincts (perpendiculaires) Φ'_λ est leur intersection, qui n'est autre que (δ) ; et (λ) est l'enveloppe de (δ) .

Si Φ est en M , la torsion \vec{T} est nulle. Si Φ n'est pas en M , \vec{T} est normale à ΦM , c'est-à-dire au plan tangent en M à (L) . De toute manière $\vec{T}_1 = 0$.

C. Q. F. D.

Construction de congruences admettant des pseudo-droites géodésiques. — On peut définir une congruence V à partir de sa surface polaire (φ) en prenant dans tout plan $P(S)$ tangent (en Φ) à (φ) , un point M , et en prenant pour élément générateur l'élément S de centre M et normal à P .

On aura une congruence V admettant une pseudo-droite géodésique, en partant d'une géodésique (λ) de (φ) et en prenant, dans tout plan P tangent à (φ) en un point Φ de (λ) le point M sur la tangente Φ' en Φ à (λ) .

Si l'on opère ainsi sur toutes les géodésiques d'une famille à un paramètre décrivant (φ) , la congruence obtenue est telle que *par chacun de ses éléments il passe une pseudo-droite géodésique*.

Remarque. — Pour que toutes les pseudo-droites soit géodésiques, il faudrait que M soit sur la tangente en Φ à toutes les géodésiques passant par Φ , donc soit en Φ , ce qui donne bien $\vec{T} \equiv 0$.

41. *Congruences admettant par chaque élément une pseudo-droite géodésique.* — Elles réalisent les espaces admettant en tout point une droite géodésique, c'est-à-dire ceux dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites.

a. Définitions. — Deux congruences ordinaires sont dites *normales l'une à l'autre* si les éléments de l'une sont normaux à ceux de l'autre.

La *congruence des torsions* d'une congruence V d'éléments S , est la congruence normale à V engendrée par le support de la torsion \vec{T} de V en S . Nous nous bornerons à la définir pour des congruences V à torsion non nulle (c'est-à-dire de façon plus précise : nulle en aucun élément).

La *congruence conjuguée* de la congruence V est la congruence normale à la fois à V et à la congruence des torsions de V .

b. THÉORÈME. — *Pour qu'il passe par tout élément d'une congruence à torsion non nulle, une pseudo-droite géodésique, il faut et il suffit que la congruence conjuguée soit une congruence de normales.*

Prenons en chaque élément S le repère $\bar{R}(u_1, u_2)$ dont le vecteur \vec{e}_2 est porté par la torsion \vec{T} en S . S'il passe par S une pseudo-droite géodésique (L) , le vecteur \vec{e}_1 est tangent à (L) , car $\vec{T}_1 = 0$, et la variété (L) est définie par $\varpi_2 = 0$. C'est donc que pour le repère \bar{R} , $\varpi_2 = 0$ entraîne $\varpi_{1,2} = 0$ (cf. 34. I).

Or, pour le repère \bar{R} (à deux paramètres), $\bar{T}_1 = 0$, donc

$$(1) \quad [\varpi, \varpi_{11}] = 0.$$

Si d'autre part $\varpi_2 = 0$ entraîne $\varpi_{12} = 0$, c'est que

$$(2) \quad [\varpi_{12}\varpi_2] = 0.$$

Il en résulte

$$(3) \quad \varpi_1 = [\varpi, \varpi_{11}] + [\varpi_{12}\varpi_2] = 0,$$

et cela exprime que (\vec{Me}_1) engendre une congruence de normales (n° 12).

Réciproquement, (3) et (1) entraînent (2), et si la congruence conjuguée, c'est-à-dire celle des éléments (\vec{Me}_1) , est une congruence de normales, les variétés $\varpi_2 = 0$ sont des pseudo-droites géodésiques, et il en passe bien une par tout élément S. C. Q. F. D.

c. Si la torsion est identiquement nulle, la congruence conjuguée est indéterminée; d'autre part, toute pseudo-droite est géodésique; il passe donc alors par tout élément, une infinité de pseudo-droites géodésiques.

Si $R \neq 0$, le pôle Φ est bien défini; la congruence conjuguée n'est autre que celle des droites $M\Phi$; on pourrait voir directement que $M\Phi$, dont un plan focal est $P(S)$, admet, d'après le n° 40, un second plan focal normal à $P(S)$, ce qui caractérise bien une congruence de normales.

d. Considérons la congruence V^* des torsions. Si $[\varpi, \varpi_3] \neq 0$, c'est-à-dire si (12.3) \vec{T} n'est pas tangent à Σ , c'est une congruence ordinaire. Elle réalise alors un espace E^* dont la torsion \vec{T}^* a une composante \vec{T}_1^* nulle d'après (2); donc \vec{T}^* est nulle ou portée par \vec{e}_3 ; dans cette dernière hypothèse qui est le cas général, V^* a même conjuguée que V , et vérifie par suite la condition du théorème précédent. Donc :

THÉORÈME. — *Si par tout élément d'une congruence V à torsion non tangente à la surface des centres, il passe une pseudo-droite géodésique, il en est de même dans la congruence des torsions, si du moins cette dernière n'a pas une torsion nulle.*

Dans le cas d'exception $\vec{T}^* \equiv 0$, les pseudo-droites et les géodésiques de V^* sont confondues; alors comme $[\varpi_2\varpi_{23}] = 0$, $\varpi_2 = 0$ a pour conséquences $\varpi_{12} = \varpi_{32} = 0$, et \vec{e}_2 a une direction fixe le long d'une pseudo-droite géodésique de V ; ces dernières sont donc situées dans les plans $P_{13} = M \vec{e}_3 \vec{e}_1$; nous dirons, en abrégé, que *les pseudo-droites géodésiques sont des plans*.

III. — Congruences à cône directeur.

42. *Parallélisme*. — Les congruences à cône directeur réalisent des espaces E' à *parallélisme absolu* (n° 21); le parallélisme en deux éléments A et B (défini au n° 37) y a une signification absolue, et *deux pseudo-directions parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles*.

Nous aurons à distinguer par la suite entre le *parallélisme dans l'espace* (auquel nous réserverons le nom de parallélisme) et le parallélisme induit, que nous appellerons aussi *pseudo-parallélisme*. C'est ce dernier qui intervient dans l'énoncé ci-dessus. On appellera *pseudo-parallèles* des *pseudo-droites pseudo-parallèles*.

Nous appellerons *angle de deux pseudo-lignes* qui se coupent en S, l'angle de leurs plans tangents en $M(S)$, centre de l'élément S. Cet angle est orienté, par l'orientation de S et celle de l'espace.

L'angle en S d'une pseudo-ligne passant par S avec un plan (p) de l'espace, est l'angle orienté que fait avec (p) le plan tangent à la pseudo-ligne en $M(S)$.

Le postulat d'Euclide et le théorème relatif aux angles de deux parallèles avec une sécante sont vrais dans E' et ce dernier théorème correspond au suivant dans V :

Deux pseudo-parallèles font le même angle avec une pseudo-droite sécante arbitraire et réciproquement.

43. *Droites géodésiques*. — La congruence V ayant un cône directeur, \vec{T} est, en chaque élément S, dans le plan focal (p) de l'infini de S; considérons les repères $R(u_1, u_2)$ obtenus en prenant \vec{e}_2 dans (p). Ils vérifient

$$(1) \quad \omega_{\cdot 1} = 0 \quad \left[\text{cf. 27. 2, avec } \vec{e}_1 \text{ dans } (p) \right]$$

et l'on a $T_1 = 0$. En dehors des lignes de torsion nulle, les pseudo-droites géodésiques sont alors des variétés $\omega_2 = 0$ de la congruence; il passe une telle variété par tout élément S; pour qu'il passe par tout élément S, une pseudo-droite géodésique, il faut donc, et il suffit, que $\omega_2 = 0$ entraîne $\omega_{12} = 0$ (cf. n° 41), c'est-à-dire que l'on ait

$$(2) \quad [\omega_{12} \omega_2] = 0.$$

En tenant compte des équations de structure

$$(3) \quad \omega'_{\cdot 1} = [\omega_{12} \omega_{\cdot 2}] = 0,$$

les équations (2), (3) entraînent soit $\omega_{12} \equiv 0$, et l'on verra qu'alors le cône directeur est un plan (n° 45), soit, si le cône directeur n'est pas un plan,

$$(4) \quad [\omega_{22} \omega_2] = 0.$$

44. *Congruence à cône directeur non plan admettant en chaque élément une pseudo-droite géodésique.* — Les équations (1), (4) du n° 43 ont pour conséquence

$$(1) \quad \omega' \equiv [\omega_{11}\omega_1] + [\omega_{22}\omega_2] = 0$$

et la congruence V est une congruence de normales ($\omega' \equiv 0$) à une développable (δ). Considérons en effet le point

$$(2) \quad m \equiv M - z\vec{e}_3$$

avec

$$(3) \quad dz = \omega.$$

En tenant compte de (43.1) sa différentielle est

$$(4) \quad dm = \omega_1\vec{e}_1 + (\omega_2 - z\omega_{32})\vec{e}_2$$

et, le long d'une pseudo-ligne $\omega_2 = 0$, (43.4) entraîne

$$(5) \quad dm = \omega_1\vec{e}_1.$$

D'autre part, le long d'une telle pseudo-ligne les équations (43.1, 2 et 4) montrent que le repère R a une direction fixe :

a. Les éléments S restent parallèles à eux-mêmes: le plan tangent en m au lieu de m a une direction fixe [d'après (4)].

b. D'après (5), m décrit une droite.

Le lieu de m est bien une développable (δ); on voit aussi que les pseudo-lignes $\omega_2 = 0$ sont les plans normaux à (δ) le long de ses génératrices, et que les éléments S d'une telle pseudo-ligne sont parallèles entre eux.

Réciproquement, si V est une congruence de normales à une développable (δ), elle admet un cône directeur non plan [sauf si (δ) est elle-même un plan, auquel cas le cône se réduit à une droite, et la congruence réalise le plan euclidien]. Les équations (44.1) et (43.1) entraînent (43.4), d'où d'après (43.3) et $\omega_{12} \neq 0$, l'équation (43.2) : les variétés $\omega_2 = 0$ sont des pseudo-droites géodésiques. On a donc la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Les congruences à cône directeur non plan et à torsion non nulle, qui admettent par chaque élément une pseudo-droite géodésique sont les congruences de normales à une développable.*

D'après les remarques faites sur les pseudo-lignes $\omega_2 = 0$, qui sont précisément les pseudo-droites géodésiques, on a pour ces pseudo-lignes la caractéristique suivante :

THÉORÈME II. — *Les pseudo-droites géodésiques sont les plans normaux le long des génératrices de la développable.*

Les éléments d'une pseudo-droite géodésique sont parallèles entre eux.

De cette dernière propriété résulte la propriété suivante de deux pseudo-parallèles (d'après le n° 42) :

THEOREME III. — *Deux pseudo-parallèles sont parallèles dans l'espace au centre de leurs éléments d'intersection avec les plans normaux à la développable.*

45. *Congruences à plan directeur.* — Prenons en chaque élément S un repère dont le vecteur \vec{e}_1 est normal au plan directeur; dans la famille ainsi définie, \vec{e}_1 est équipollent à un vecteur fixe, et $d\vec{e}_1 \equiv 0$, soit

$$\begin{aligned} (1) & \qquad \qquad \qquad \omega_{12} = 0, \\ (2) & \qquad \qquad \qquad \omega_{,1} = 0. \end{aligned}$$

Le plan focal et le vecteur torsion sont parallèles au plan directeur. D'autre part, dans l'espace réalisé E', le repère de composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ a, d'après (1), une direction fixe, et comme par rapport à ce repère $T_1 = 0$ [d'après (2)], la torsion \vec{T} a une direction fixe dans E'.

THEOREME I. — *Les congruences à plan directeur, et à torsion non partout nulle, réalisent des espaces non holonomes à parallélisme absolu, à torsion de direction fixe, et sont les seules à le faire.*

On vient d'en démontrer la première partie. Réciproquement, soit une congruence V réalisant un espace non holonome E', à parallélisme absolu et à torsion de direction fixe. On en déduit, en prenant \vec{e}_2 sur le vecteur torsion de V, l'équation (2) ($T_1 = 0$) et l'équation (1) (\vec{T} est une pseudo-direction fixe). Les équations (1) et (2) expriment que $d\vec{e}_1 \equiv 0$, donc que \vec{e}_1 a une direction fixe, et que S ($= M \vec{e}_3$) est parallèle à un plan fixe.

Si la torsion est nulle le long d'une pseudo-ligne (Λ) de V, le théorème est démontré pour les éléments S extérieurs à (Λ); l'angle de S avec le plan directeur est constamment nul pour S extérieur à (Λ), donc l'est encore pour S sur (Λ), d'après l'hypothèse de continuité de V (cf. n° 11).

COROLLAIRE. — *Les pseudo-lignes de torsion et leurs trajectoires orthogonales sont des pseudo-droites. Par tout élément il passe une pseudo-droite géodésique.*

Revenons d'autre part à la détermination, d'après le n° 43, des congruences admettant par chaque élément une pseudo-droite géodésique. On les a déterminées dans l'hypothèse $\omega_{12} \neq 0$, et ce sont alors les congruences du n° 44. L'hypothèse $\omega_{12} \equiv 0$, jointe à (43. 1) donne $d\vec{e}_1 \equiv 0$, et un plan directeur. Les congruences cherchées sont donc soit les congruences de normales à une développable, soit les congruences à plan directeur.

Lignes de torsion. Parallélisme. — Les pseudo-lignes de torsion sont des *pseudo-droites*, et de façon plus précise, ce sont les pseudo-lignes $\omega_1 = 0$. Comme d'autre part $\omega_{31} = \omega_{12} = 0$, ces variétés sont les plans parallèles au plan directeur. Par suite :

THÉORÈMES : II. — *Toute pseudo-droite fait un angle constant avec le plan directeur.* III. — *Deux pseudo-parallèles font le même angle avec le plan directeur.*

(Ce sont des corollaires immédiats des propositions du n° 42 et de la propriété qui vient d'être établie au sujet des plans parallèles au plan directeur.)

Nature des pseudo-droites géodésiques. — Ce sont les trajectoires orthogonales dans V des plans parallèles au plan directeur. En général, ce sont des surfaces réglées admettant le plan directeur comme cône asymptotique, et la ligne des centres comme ligne de striction. Exceptionnellement, elles peuvent être des plans normaux au plan directeur.

46. *Espaces dont les lignes de torsion sont des droites.* — On peut leur étendre certaines des propriétés précédentes (celles du parallélisme). Déterminons d'abord les congruences susceptibles de réaliser de tels espaces; ce sont :

1° Les congruences à plan directeur.

2° Les congruences à cône directeur non plan, dans lesquelles, pour le repère R du n° 43, $\omega_1 = 0$ entraîne $\omega_{12} = 0$. Comme $\omega_{12} \neq 0$, l'équation (43.3) donne alors

$$[\omega_1 \omega_{32}] = 0.$$

Comme d'autre part, d'après (43.1) et l'existence du cône directeur, on a respectivement

$$[\omega_2 \omega_{31}] = 0, \quad [\omega_{32} \omega_{31}] = 0,$$

la congruence vérifie les conditions du n° 29 qui expriment qu'elle a en chaque élément un foyer double à l'infini. Donc :

THÉORÈME. — *Les congruences à cône directeur double non plan, et les congruences à plan directeur (simple ou double), réalisent (dans le cas général où leur torsion n'est pas partout nulle) des espaces non holonomes à parallélisme absolu dont les lignes de torsion sont des droites, et sont seules à le faire.*

Parallélisme dans le cas d'un cône directeur double (non plan). — On sait que les éléments sont tangents à l'infini à une développable (\hat{c}) , que nous appellerons la *développable directrice*.

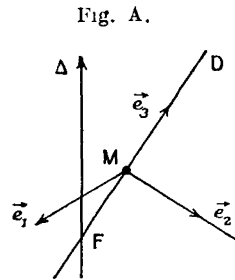
Les plans tangents à (\hat{c}) , qui sont les plans focaux de la congruence V, constituent aussi les cylindres de V et en même temps les lignes de torsion de V.

Les pseudo-droites lignes de torsion sont les plans tangents à la développable directrice; les éléments d'une telle pseudo-droite sont parallèles entre eux.

Deux plans focaux ne sont pas pseudo-parallèles : une pseudo-droite ne fait donc pas le même angle avec les plans focaux de ses divers éléments. Mais deux pseudo-parallèles issues de deux éléments S_1, S_2 d'un même plan focal sont parallèles dans l'espace aux centres de S_1, S_2 .

THEOREME. — *Deux pseudo-parallèles sont parallèles dans l'espace au centre de leurs éléments d'intersection avec un plan tangent à la développable directrice.*

47. *Exemple de congruence à cône directeur. Congruence des droites D coupant à angle constant α une droite fixe Δ .* — Prenons pour paramètre l'abscisse z du foyer F sur Δ , et l'angle polaire θ du plan (Δ, D) par rapport à



un plan fixe passant par Δ . On a pour le repère $Me_1e_2e_3$ défini par $\vec{MF} = \vec{e}_3$, et \vec{e}_2 dans le plan focal

$$(I) \quad \begin{cases} \omega_1 = \sin \alpha dz, & \omega_{31} = 0, \\ \omega_2 = -\sin \alpha d\theta, & \omega_{32} = -\sin \alpha d\theta, \\ \omega = \cos \alpha dz, & \omega_{12} = \cos \alpha d\theta, \end{cases}$$

ou bien, en prenant comme nouvelles variables

$$(1) \quad u = z \sin \alpha,$$

$$(2) \quad \psi = -\theta \sin \alpha,$$

et, en posant $k = \cot \alpha$,

$$(II) \quad \begin{cases} \omega_1 = du, & \omega_{31} = 0, & \omega_3 = k\omega_1, \\ \omega_2 = d\psi, & \omega_{32} = \omega_2, & \omega_{12} = -k\omega_2. \end{cases}$$

a. La torsion est portée par \vec{e}_2 et vaut

$$(3) \quad T_2 = T = k.$$

La courbure est nulle. La congruence Γ ainsi définie pour θ et z variant de $-\infty$ à $+\infty$ réalise globalement un espace à parallélisme absolu E' dont la torsion

a une grandeur constante, et dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites. Γ est visiblement formée des normales aux cônes de révolution de sommet sur Δ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$; les propriétés générales du n° 44 lui sont applicables; en particulier *les pseudo-droites géodésiques sont les plans passant par Δ* . (Ce qu'on peut retrouver d'ailleurs en faisant $d\psi = 0$.)

b. Les pseudo-droites (d) sont définies par les équations différentielles :

$$(III) \quad \begin{cases} d\psi = -\operatorname{tang} \beta \, du, \\ d\beta = -k \, d\psi, \end{cases}$$

β étant l'angle du plan tangent à (d) en M avec le vecteur e_1 . La pseudo-droite passant par l'élément $D_0 = D(u_0, \psi_0)$ donné, et dont la direction est définie par $\beta = \beta_0$ en D_0 est donnée par la résolution du système (III) :

$$(4) \quad u - u_0 = \frac{-1}{k} \log \frac{\sin |\beta_0 - k(\psi - \psi_0)|}{\sin \beta_0} = -\frac{1}{k} \log |\cos k(\psi - \psi_0) - \cot \beta_0 \sin k(\psi - \psi_0)|.$$

Pseudo-droites passant par deux éléments donnés. — β_0 doit vérifier (4) pour $u = u_1, \psi = \psi_1$ correspondant au deuxième élément. Cela donne

$$\cot \beta_0 = \cot k(\psi_1 - \psi_0) - \frac{e^{-k(u_1 - u_0)}}{\sin k(\psi_1 - \psi_0)}.$$

Une solution et une seule correspond à toute valeur de $(u_1 - u_0, \psi_1 - \psi_0)$. Donc *une infinité dénombrable* de droites par 2 points donnés (puisque $\psi_1 - \psi_0$ n'est défini qu'à un multiple près de $\frac{2\pi}{\sin \alpha}$).

c. *Pseudo-géodésiques.* — Ce sont les extrémales de $\int \sqrt{du^2 + d\psi^2}$, donc elles vérifient

$$\psi - \psi_0 = \Lambda(u - u_0) \quad (\Lambda = \text{const}),$$

où, d'après (1) et (2),

$$\frac{\theta - \theta_0}{z - z_0} = B \quad (B = \text{const}).$$

Le point M décrit alors une hélice d'axe Δ . *Une infinité dénombrable de solutions* par 2 éléments donnés, l'une d'entre elles réalisant effectivement, en général, le minimum de la distance (il peut, exceptionnellement, y en avoir deux).

d. On passe par continuité à un espace holonome quand $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Alors pour les pseudo-droites

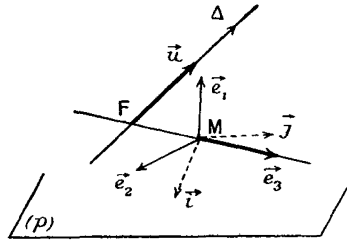
$$d\beta = 0, \quad \beta = \beta_0, \quad \frac{\theta - \theta_0}{z - z_0} = \text{const}.$$

Cet espace est analogue au cylindre de révolution. Le nombre de géodésiques (au sens large) et de droites (confondues d'ailleurs avec les précédentes) est le même que précédemment.

e. Remarquons enfin que la congruence admet le groupe des déplacements hélicoïdaux d'axe Δ , et que les géodésiques admettent un sous-groupe à un paramètre de ces déplacements.

48. *Exemple de congruence à plan directeur. Congruence des droites parallèles à un plan donné (p) et s'appuyant sur une droite donnée (Δ).* — Soit \vec{u} le vecteur unitaire de Δ , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_1$, 3 vecteurs unitaires trirectangulaires, le dernier étant

Fig. B.



perpendiculaire à (p), et le second parallèle au plan \vec{u}, \vec{e}_1 . Prenons comme paramètres l'abscisse s de F sur Δ , et l'angle

$$\sigma = \widehat{e_1, t} \quad (\vec{e}_1 = \vec{FM}).$$

En désignant par r l'angle $\widehat{j, u}$, on a pour le repère $Me_1e_2e_3 = R$:

$$(I) \quad \begin{cases} \omega_1 = \sin r \, ds, & \omega_{11} = 0, \\ \omega_2 = d\sigma - \cos r \cos \sigma \, ds, & \omega_{12} = 0, \\ \omega_3 = -\cos r \sin \sigma \, ds, & \omega_{23} = d\sigma. \end{cases}$$

a. *Torsion.* — Elle vérifie

$$\vec{T} = -\sin \sigma \cot r \vec{e}_2.$$

Elle a une pseudo-direction fixe ($\omega_{12} = 0$). Elle a de plus une valeur fixe quand $d\sigma = 0$, c'est-à-dire ($\omega_{12} = 0$) le long d'un cylindre de la congruence.

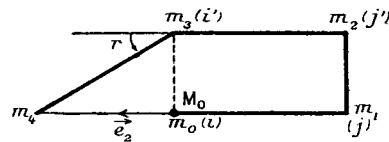
Ces cylindres sont des plans passant par Δ et sont d'ailleurs des pseudo-droites (n° 36). Les plans passant par Δ et perpendiculaires à (p) sont des pseudo-droites géodésiques.

La *carte* le long d'un cycle fermé fini donne un repère final parallèle au repère initial, avec une translation parallèle à l'axe e_2 . Le cycle fermé (i, j, j', i') défini par 4 droites parallèles aux vecteurs \vec{i}, \vec{j} et de cotes s, s' à la carte de la figure 1; pour le repère final $m_4 e_1 e_2$ on a

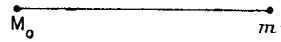
$$M_0 m_4 = (s' - s) \cos r.$$

Ce cycle est réductible à un élément par déformation continue. Au contraire, pour le cycle obtenu en déplaçant D dans un plan parallèle au plan directeur,

Fig. C.



(Fig. 1.)



(Fig. 2.)

et en lui faisant subir un tour complet de D_0 en D_0 , le cycle à la carte de la figure 2. Le repère final a son origine en m' , et $M_0 m' = 2\pi$ est indépendant de r .

b. Les *pseudo-droites* font un angle constant (pour chacune d'elles) avec le plan directeur, ou ce qui revient au même, avec e_1 . Soit α cet angle

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tan \alpha, \quad \text{d'où} \quad d\sigma - \cos r \cos \sigma ds = \tan \alpha \sin r ds$$

et

$$ds = \frac{d\sigma}{\cos r \cos \sigma + \tan \alpha \sin r}.$$

Soit

$$I(\alpha, \sigma) \equiv \int \frac{d\sigma}{\cos r \cos \sigma + \tan \alpha \sin r}.$$

Les pseudo-droites passant par $D_0(\sigma_0, s_0)$ sont données par

$$s - s_0 = I(\alpha, \sigma) - I(\alpha, \sigma_0),$$

en fonction du paramètre α . Les pseudo-droites passant par D_0 et par $D_1 = D(\sigma_1, s_1)$, ont leur angle α défini par

$$s_1 - s_0 = I(\alpha, \sigma_1) - I(\alpha, \sigma_0).$$

On peut voir qu'on a une infinité dénombrable de pseudo-droites passant par D_0, D_1 (à toute valeur de $\sigma_1 - \sigma_0$ correspond une valeur de α).

c. On passe par continuité à un espace euclidien quand $r \rightarrow \frac{\pi}{2}$. L'espace euclidien réalisé globalement est alors le cylindre de révolution (auquel se réduit la surface Σ des centres M). La carte du 1^{er} cycle fermé considéré se referme ($\cos r = 0$), mais celle du second reste ouverte, ce qui correspond à la différence topologique qui existe entre le cylindre et le plan euclidien.

CHAPITRE IV.

REALISATION DES CONNEXIONS EUCLIDIENNES PONCTUELLES A DEUX DIMENSIONS.

I. — Généralités.

49. Nous avons défini au Chapitre II la connexion d'une congruence ordinaire d'éléments linéaires, de sorte qu'une telle congruence réalise un espace généralisé E' . Nous allons maintenant traiter la réciproque, et démontrer à son sujet la proposition suivante :

THEOREME. — *Toute connexion euclidienne ponctuelle à deux dimensions est localement réalisable par des congruences d'éléments linéaires de l'espace ordinaire.*

Les congruences réalisant une connexion donnée dépendent généralement de deux fonctions arbitraires d'un argument. Dans certains cas particuliers, elles dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.

C'est une généralisation aux espaces à torsion du théorème bien connu relatif aux espaces de Riemann, et qui correspond au cas particulier de la réalisation par une congruence orthogonale. Un autre cas particulier serait celui d'une congruence de droites (*cf.* n° 19). Nous montrerons que cette dernière réalisation est en général impossible, et déterminerons certaines conditions de possibilité. La question a été traitée dans les Notes [16a] et [16b] aux *Comptes rendus*. (La Note [16c] indique une autre réalisation des connexions euclidiennes ponctuelles à deux dimensions les plus générales, par des congruences de plans de l'espace à quatre dimensions.)

Signalons d'autre part qu'il se présentera certains *points exceptionnels* au voisinage desquels le théorème ne sera pas démontré (*cf.* n° 62). Une réalisation au voisinage de ces points est alors donnée, dans l'espace à quatre dimensions, par un théorème d'existence du Chapitre V (n° 87).

50. Nous nous bornerons exclusivement au problème local, que nous ramènerons à l'étude de systèmes différentiels. Au sujet du problème global, rappelons seulement que, même si la réalisation locale par une certaine congruence V est valable dans tout l'espace E' , il ne s'ensuit pas que V réalise globalement E' . (Exemple : plan et cylindre de révolution.)

51. Se donner une connexion E' , c'est se donner en fonction de deux variables u_1, u_2 et de leurs différentielles, les composantes relatives $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_{12}$ de la connexion, c'est-à-dire trois formes de Pfaff (des variables u), formes que l'on peut choisir de façon tout à fait arbitraire pourvu que

$$|\varpi_1 \varpi_2| \neq 0.$$

Nous les prendrons *analytiques*, c'est-à-dire que leurs coefficients seront des fonctions analytiques de u_1, u_2 .

Ces composantes peuvent être considérées comme celles d'un repère $R(u_1, u_2)$ rectangulaire attaché idéalement à tout point (u_1, u_2) de E' . On peut, sans changer E' , remplacer $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_{12}$ par les formes $\varpi_1^*, \varpi_2^*, \varpi_{12}^*$ qui s'en déduisent par une rotation $\theta(u_1, u_2)$ arbitraire autour de l'origine.

52. Réaliser localement E' par une congruence V , c'est (n° 14) associer à tout point (u_1, u_2) d'un certain voisinage de E' , un élément linéaire $S(u_1, u_2)$ tel qu'une famille de repères d'ordre zéro, soit $R(u_1, u_2)$ de la congruence obtenue, ait pour composantes latérales

$$(1) \quad \omega_1 = \varpi_1, \quad \omega_2 = \varpi_2, \quad \omega_{12} = \varpi_{12}.$$

La condition (51.1) entraîne alors

$$(1) \quad |\omega_1 \omega_2| \neq 0$$

et l'on a une congruence ordinaire (cf. 12.3).

Réaliser E' par V c'est en somme associer à tout point (u_1, u_2) de E' le repère $R(u_1, u_2)$. Or les composantes d'un repère sont six formes de Pfaff bien déterminées des six paramètres z_1, z_2, \dots, z_6 du déplacement qui amène en R un repère de base R arbitrairement choisi (cf. n° 12 et [14]) : les équations (1) constituent donc un système différentiel

$$(2) \quad \sigma(z, u) = \sigma(\omega, \varpi)$$

aux six fonctions inconnues z_1, z_2, \dots, z_6 , des deux variables indépendantes u_1, u_2 . Toute solution de ce système fournit une réalisation locale de E' .

La lettre E' désignera seulement un voisinage de l'espace donné.

53. Mais les composantes de E' ne sont définies qu'à une rotation près $\theta(u_1, u_2)$ des repères attachés à E' . On pourrait aussi bien prendre le système

$$(1) \quad \sigma^*(z, u) = \sigma(\omega, \varpi^*),$$

avec, θ désignant une fonction analytique de u_1, u_2 ,

$$\begin{aligned} \varpi_1^* &= \varpi_1 \sin \theta + \varpi_2 \cos \theta, \\ \varpi_2^* &= -\varpi_1 \cos \theta + \varpi_2 \sin \theta, \\ \varpi_{12}^* &= \varpi_{12} + d\theta. \end{aligned}$$

Si la congruence V vérifie σ , elle réalise localement E' , donc vérifie σ^* , et l'on peut dire que tous ces systèmes σ, σ^* sont géométriquement équivalents. Mais les $R(u_1, u_2)$, c'est-à-dire les fonctions z obtenues à partir de σ et de σ^* ne sont pas les mêmes dans une même variété V ; on peut prévoir que les $R^*(u_1, u_2)$, de paramètres z^* , trouvés pour V à partir de σ^* , se déduisent des $R(u_1, u_2)$ trouvés à partir de σ , par la rotation $\theta(u_1, u_2)$ autour de \vec{e}_3 .

De façon plus précise, considérons la transformation

$$z^* = \theta(z)$$

dépendant de la fonction arbitraire $\theta(u_1, u_2)$, qui donne, en fonction des paramètres z d'un repère R *quelconque*, les paramètres z^* de celui qui s'en déduit par la rotation θ autour de \vec{e}_3 .

On a, pour $s = 1, 2, 12$, les mêmes relations entre les $\omega_s(z)$ et $\omega_s(z^*)$ qu'entre les ϖ_s et les ϖ_s^* (cf. n° 51); et le système transformé de σ par la transformation Θ est

$$\Theta(\sigma) \equiv \sigma^*(z^*, u) \equiv \sigma | \omega(z^*), \varpi^* |.$$

Si les z vérifient $\sigma(z)$, les z^* vérifient $\sigma^*(z^*)$, c'est-à-dire σ^* . Les familles $R(u_1, u_2)$ et $R^*(u_1, u_2)$ sont attachées à la même congruence V .

Cette transformation Θ nous servira bientôt à donner une condition simple d'involution du système σ . Rappelons que le système σ^* n'est autre que le système σ défini à partir d'un autre choix (soit R^*) des repères de E' .

54. Le système σ n'est pas en involution. Nous allons montrer que ses solutions vérifient une autre équation linéaire en ω .

Soient R la courbure, T_1, T_2 les composantes de la torsion dans le système des repères \bar{R} des composantes $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_{12}$. On a

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varpi'_1 = [\varpi_{12} \varpi_2] = T_1 [\varpi_1 \varpi_2], \\ (2) \quad & \varpi'_2 = [\varpi_1 \varpi_{12}] = T_2 [\varpi_1 \varpi_2], \\ (3) \quad & \varpi'_{12} = R [\varpi_1 \varpi_2]. \end{aligned}$$

D'après σ et les équations de structure de l'espace à trois dimensions, les équations de fermeture de σ sont

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4) \quad [\omega_3 \omega_{31}] = T_1 [\varpi_1 \varpi_2], \\ (5) \quad [\omega_3 \omega_{32}] = T_2 [\varpi_1 \varpi_2], \\ (6) \quad [\varpi_{32} \omega_{31}] = R [\varpi_1 \varpi_2]. \end{array} \right.$$

Elles ont pour conséquences :

1° Si $R \neq 0$, et si l'on pose $\vec{T} = R\vec{\Pi}$,

$$[\omega_3 \omega_{31}] = \Pi_1 [\omega_{32} \omega_{31}], \quad [\omega_3 \omega_{32}] = \Pi_2 [\omega_{31} \omega_{31}]$$

et, comme $[\omega_{32}\omega_{31}] \neq 0$,

(7)

$$\omega_3 = \Pi_1 \omega_{32} - \Pi_2 \omega_{31}.$$

2° Si $R \equiv 0$, (6) donne

(8)

$$[\omega_{32}\omega_{31}] = 0.$$

a. $T_2 \neq 0$. — D'après (5), on a alors $\omega_{32} \neq 0$, donc (8) donne, A désignant une fonction de u_1, u_2 ,

(9)

$$\omega_3 = \Lambda \omega_{32}$$

et, d'après (4) et (5),

(10)

$$\Lambda = \frac{T_1}{T_2}.$$

b. $T_2 \equiv 0$. — Si $\omega_{32} \neq 0$, (5) et (8) entraînent $[\omega_3\omega_{31}] = 0$ et $\vec{T} \equiv 0$. Si la torsion n'est pas partout nulle, c'est donc que $T_2 \equiv 0$ entraîne $\omega_{32} \equiv 0$; et l'on a, dans tous les cas où $\vec{T} \neq 0$,

(11)

$$T_2 \omega_{31} = T_1 \omega_{32}.$$

On voit que les équations de fermeture du système σ entraînent comme conséquence (quand E' n'est pas holonome), l'équation (7) ou l'équation (11). Donc σ n'est pas en involution. Et, d'autre part, toute solution de σ vérifie (7) ou (11).

Nous sommes ainsi amenés à étudier suivant les cas, les systèmes $[\sigma, (7)]$ ou le système $[\sigma, (11)]$. En adjoignant à un tel système ses équations de fermeture, c'est-à-dire les équations (II) et celles qui résultent de la dérivation extérieure de l'équation supplémentaire (7) ou (11), on obtient un système fermé que nous désignerons par

$$\Sigma \equiv \Sigma[\omega(z), \varpi(u), J],$$

la lettre J représentant des quantités telles que $T_1, T_2, R, \Pi_1, \Pi_2$, ou leurs dérivées covariantes. Nous allons montrer que Σ est en involution. La méthode employée (1) est généralisable aux connexions à n dimensions (*cf.* Chap. I) et c'est ce qui nous l'a fait choisir.

55. 1° Considérons une famille (f) d'éléments (e), par exemple les éléments intégraux d'un système de Pfaff, définie par un système (s) d'égalités : les égalités (s) sont nécessaires et suffisantes pour que (e) fasse partie de (f). Toute égalité, vérifiée éventuellement par un élément (e) de (f), et qui ne fait pas partie de (s) sera dite *égalité superflue*.

(1) C'est l'application au système Σ de la méthode employée par M. É. Cartan dans la démonstration du théorème de Schlaefli [11].

L'élément *générique* de (f) n'introduit par définition ⁽¹⁾ aucune égalité superflue.

2° Soit un système de Pfaff Σ_n à n variables indépendantes imposées u_1, \dots, u_n , et désignons par $\overline{\Sigma}_n$ le même système dans lequel on ne distingue plus les u comme variables indépendantes. *Un élément intégral à p dimensions de Σ_n est par définition un élément intégral à p dimensions de $\overline{\Sigma}_n$ ⁽¹⁾, qui introduit exactement $n - p$ relations entre les du .*

3° Rappelons enfin que l'on a alors ⁽¹⁾ la *condition nécessaire et suffisante d'involution* suivante, que nous énoncerons dans le cas du système Σ qui nous intéresse ($n = 2$), et que nous désignerons par condition A.

CONDITION A. — *a. Par le point intégral générique passe un élément intégral à une dimension; b. par l'élément intégral générique à une dimension passe un élément intégral à deux dimensions I_2 .*

56. Le système Σ vérifie la condition (Aa). Considérons en effet les u et les z comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un espace auxiliaire E_8 à huit dimensions; limitons E à un domaine où $[\varpi_1, \varpi_2]$ n'est *jamais* nul. On peut prendre pour paramètres directeurs d'un élément linéaire de E_8 , ϖ_1, ϖ_2 et les ω , puisque ϖ_1, ϖ_2 sont indépendants en du , et les ω indépendants en dz et indépendants des du .

Par tout point intégral, c'est-à-dire par tout point (u, z) du domaine $[\varpi_1, \varpi_2] \neq 0$, passent des éléments intégraux à une dimension, pour lesquels on peut prendre arbitrairement, d'après la forme du système Σ , les paramètres ϖ_1, ϖ_2 ; il suffit de ne pas prendre $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$ pour que l'élément choisi introduise exactement une relation entre les du . C. Q. F. D.

Reste à vérifier la condition (Ab). Elle exprime qu'étant donné un élément intégral I_1 :

- b_1 . ou bien on peut affirmer qu'il passe par lui un I_2 ;
- b_2 . ou bien I_1 vérifie une égalité superflue, c'est-à-dire non nécessaire pour qu'il soit élément intégral à une dimension de Σ .

De façon plus précise, il existe un système (s') d'égalités superflues, c'est-à-dire qu'un élément peut être intégral à une dimension sans vérifier une seule des égalités de (s') . Dans le cas (b_2) , I_1 vérifie une ou plusieurs égalités de (s') .

57. Nous allons simplifier les calculs relatifs à la condition (Ab) en faisant intervenir les transformations Θ . Cette simplification a été introduite par M. É. Cartan, dans la démonstration du théorème de Schlaëfli [41].

⁽¹⁾ Cf. É. CARTAN [47].

La transformation $\Theta(\varepsilon)$ du n° 53 transforme Σ en

$$(1) \quad \Sigma^* \equiv \Sigma[\omega(\varepsilon^*), \varpi^*, J^*],$$

les ϖ^* et J^* étant les expressions des ϖ et J dans le système des repères \bar{R}^* déduits des \bar{R} par la rotation $\theta(u_1, u_2)$ autour de l'origine.

Étant donné un élément I_1 , c'est-à-dire un point (u, ε) de E_3 et des paramètres directeurs $\varpi_1, \varpi_2, \omega$, l'équation

$$(2) \quad -\varpi_1 \sin \theta + \varpi_2 \cos \theta = 0$$

définit un angle θ , donc une transformation Θ . Elle transforme R en R^* , et le transformé I_1^* de I_1 par Θ vérifie

$$\varpi_2^* = 0.$$

C'est un élément intégral à une dimension de Σ^* , car il vérifie bien le système, et, d'autre part, Θ ne modifiant pas les u , J^* introduit exactement autant de relations entre les du que l'élément I_1 , c'est-à-dire *une* relation.

Ce raisonnement est d'ailleurs général et tout élément intégral I de Σ est transformé par Θ en un élément intégral I^* de Σ^* ; et inversement, tout élément intégral I^* de Σ^* est transformé par Θ^{-1} en un élément intégral I de Σ . Par suite, un élément intégral I_2^* à deux dimensions de Σ^* passant par I_1^* est transformé par Θ^{-1} en un élément intégral à deux dimensions de Σ passant par I_1 :

La recherche des I_2 passant par I_1 est ainsi ramenée à celle des I_2^ de Σ^* qui passent par I_1^* . Or, un I_2^* passant par I_1^* est défini par un élément à une dimension ε_2^* intégral de Σ^* et en involution avec I_1^* (c'est-à-dire de même centre u^*, ε^* et vérifiant avec lui les équations de fermeture). On peut prendre pour ε_2^* n'importe quel élément de I_2^* non colinéaire à I_1^* , et, comme I_2^* ne doit introduire aucune relation entre les du , et que I_1^* vérifie $\varpi_2^* = 0$, l'élément ε_2^* ne doit pas vérifier $\varpi_2^* = 0$. Il existe dans I_2^* un élément vérifiant n'importe quelle relation autre que cette dernière entre les du et, par exemple la relation*

$$\varpi_1^* = 0.$$

Nous désignerons par I_1^0 tout élément intégral à une dimension vérifiant $\varpi_2 = 0$; par ε_2^0 tout élément intégral à une dimension vérifiant $\varpi_1 = 0$. *La recherche des I_2 passant par ε_1 est donc ramenée à celle des ε_2^0 en involution avec un I_1^0 , dans un certain système Σ^* , c'est-à-dire dans le système Σ correspondant à un certain choix des repères de E' .*

58. Avec ces notations, on peut établir la condition suivante d'involution, dont il nous importe surtout d'utiliser le caractère suffisant.

CONDITION B. — *Pour le choix générique des repères de E' , il existe pour I_1^0 générique, un ε_2^0 en involution avec lui.*

En effet I_1^* est un élément I_1^0 relatif au système Σ^* , c'est-à-dire au repère R^* . Si la condition B est vérifiée, ou bien on peut affirmer qu'il passe par I_1^* un I_2^* ,

donc par I_1 , un I_2 , et l'on est dans le cas (Ab_1) du n° 56, ou bien l'on a l'une ou l'autre des circonstances suivantes :

α . R^* n'est pas un repère générique, c'est-à-dire vérifie une *condition* d'égalité.

β . R^* est un repère générique, mais I_1^* est un I_1^0 vérifiant une égalité superflue.

La circonstance (α) entraîne que I_1 est un élément intégral de Σ' pour lequel ϖ_1 et ϖ_2 sont liés par une certaine relation d'égalité [qui n'est d'ailleurs autre que (57.2) avec pour θ une valeur particulière θ_0 correspondant au repère particulier R^*]. C'est une égalité superflue, puisque pour l'élément générique ϖ_1 et ϖ_2 sont arbitraires (et $\theta \neq \theta_0$). I_1 n'est pas générique, on est dans le cas (Ab_2) .

La circonstance (β) est celle où θ n'a pas une valeur particulière, mais où I_1^* vérifie une condition d'égalité superflue : l'existence d'une telle relation est conservée par Θ^{-1} , et l'on a encore un élément I_1 , non générique : on est encore dans le cas (Ab_2) .

En définitive I_1 vérifie soit (Ab_1) , soit (Ab_2) donc vérifie (Ab) : par l' I_1 générique passe un I_2 . C. Q. F. D.

Il est de même facile d'établir que la condition B est nécessaire.

Application de la condition B. — Les paramètres directeurs étant définis à un facteur constant près, on prendra, pour I_1^0 ,

$$\varpi_1 = 1, \quad \varpi_2 = 0, \quad \omega_s = u_{s1},$$

et pour ε_2^0 ,

$$\varpi_1 = 0, \quad \varpi_2 = 1, \quad \omega_s = u_{s2},$$

l'indice s pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 31, 32, 12. Ces principes posés, passons à l'étude des deux systèmes Σ obtenus suivant que R est partout nul ou non. Nous examinerons aussi en passant les possibilités de réalisation par des congruences de droites.

II. — Connexions à courbure non partout nulle.

a. Réalisation par des congruences d'éléments linéaires.

59. On a alors le système Σ (cf. n° 54).

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \omega_1 = \varpi_1, \\ (2) \quad \omega_2 = \varpi_2, \\ (3) \quad \omega_{12} = \varpi_{12}, \\ (4) \quad \omega_3 = \mathbf{II}_1 \omega_{32} - \mathbf{II}_2 \omega_{31}. \\ (5) \quad [\omega_3 \omega_{31}] = \mathbf{T}_1 [\varpi_1 \varpi_2], \\ (6) \quad [\omega_3 \omega_{32}] = \mathbf{T}_2 [\varpi_1 \varpi_2], \\ (7) \quad [\omega_{32} \omega_{31}] = \mathbf{R} [\varpi_1 \varpi_2], \\ (8) \quad [\omega_{31} \varpi_1] + [\omega_{32} \varpi_2] = (\mathbf{II}_1 \omega_{32} - \mathbf{II}_2 \omega_{31})'. \end{array} \right.$$

En fonction des dérivées absolues de $\vec{\Pi}$ (cf. n° 25) définies par

$$D\Pi_i = d\Pi_i - \varpi_{ij}\Pi_j = \Pi_{i,1}\varpi_1 + \Pi_{i,2}\varpi_2 \quad (i, j = 1, 2),$$

on trouve, pour (8), l'équation

$$(9) \quad \Pi_{1,1}[\varpi_1\omega_{32}] + (1 - \Pi_{2,1})[\varpi_1\omega_{31}] = -\Pi_{2,2}[\omega_{31}\varpi_2] + (1 + \Pi_{1,2})[\omega_{32}\varpi_2].$$

Étude de ce système. — Les équations (5), (6) sont conséquences de (I) et de (7). Le système Σ se réduit donc aux équations [(I), (7), (9)].

Par un point intégral passent toujours ∞^4 éléments I_i ; on peut choisir arbitrairement les paramètres directeurs $\varpi_1, \varpi_2, \omega_{31}, \omega_{32}$. Les autres sont alors bien définis.

Soient, pour les paramètres directeurs :

1° de I_1^0 :

$$\varpi_1 = 1, \quad \varpi_2 = 0, \quad \omega_{31} = a_1, \quad \omega_{32} = a_2;$$

2° de ε_2^0 :

$$\varpi_1 = 0, \quad \varpi_2 = 1, \quad \omega_{31} = x_1, \quad \omega_{32} = x_2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ε_2^0 soit en involution avec I_1^0 est qu'ils vérifient (7) et (9), soit, en fonction des a et des x , les équations

$$(7') \quad a_1x_2 - a_2x_1 = R,$$

$$(9') \quad \Pi_{1,1}x_2 + (1 - \Pi_{2,1})x_1 = -\Pi_{2,2}a_1 + (1 + \Pi_{1,2})a_2.$$

On a deux équations linéaires aux inconnues x_1, x_2 . Le déterminant Δ n'est, en général, pas nul, à moins que $\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv 0$. Si $\Delta \neq 0$, il existe pour I_1^0 un élément ε_2^0 en involution avec lui. Si $\Delta = 0$, quatre cas se présentent :

α . $\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv 0$ quel que soit le point intégral (c'est-à-dire u_1, u_2) et quel que soit le choix des repères. Nous examinerons plus loin le cas d'un tel espace E' .

β . $\Pi_{1,1} \equiv 1 - \Pi_{2,1} \equiv 0$ quel que soit le choix des repères, pour l'origine de I_1^0 , cette relation n'étant vraie qu'en certains points de E' : l'origine de I_1^0 est particulière et I_1^0 n'est pas générique.

γ . $\Pi_{1,1} = 1 - \Pi_{2,1} = 0$ pour les repères R , mais pas pour un repère quelconque : le choix des repères n'est pas générique.

δ . $\Pi_{1,1}$ et $1 - \Pi_{2,1}$ ne sont pas nuls tous deux. Δ n'est nul que pour des valeurs particulières de a_1, a_2 , donc l' I_1^0 considéré n'est pas générique.

60. *Conclusion dans le cas général.* — Soit un espace E' ne vérifiant pas la condition (α). Pour le choix générique du repère [(γ) non vérifiée] et pour l' I_1^0 générique [(β) et (δ) non vérifiées], le déterminant Δ n'est pas nul, et il existe un ε_2^0 en involution avec I_1^0 . La condition B est vérifiée et Σ est en involution. Il admet donc des solutions.

Degré d'arbitraire de la solution générale. — Le nombre d' I_2 passant par I_1 générique est celui des ε_2^* en involution avec I_1^0 ; il y en a ici un et un seul. La solution générale dépend par suite [17] de fonctions arbitraires d'un argument au plus.

D'après la théorie des systèmes en involution [17], le nombre ν de fonctions arbitraires d'un argument dont dépend la solution générale est alors donné par

$$\nu = n - p - s_0,$$

n étant le nombre total de variables (ici 8), p celui des variables indépendantes (ici 2), et s_0 le nombre des paramètres arbitraires de I_1^0 passant par un point intégral donné (ici 4). On a donc $\nu = 2$, d'où la partie du théorème du n° 49 qui concerne le cas général ici envisagé.

Les solutions d'un système Σ donnent visiblement des congruences *distinctes*, c'est-à-dire non toutes deductibles de l'une d'entre elles par des déplacements. La relation géométrique entre ces congruences a été caractérisée au n° 25.

61. *Problème de Cauchy dans ce cas général.* — Le fait que la solution générale dépend ici de deux fonctions arbitraires d'un argument peut se traduire par la proposition suivante :

THEOREME. — Dans la réalisation de E'_2 dans E_3 , on peut faire correspondre à une courbe γ donnée de E'_2 une courbe arbitrairement choisie (C) dans E_3 comme lieu des centres des éléments homologues des points de (γ) .

Démonstration. — La solution générale V est définie par une famille \mathcal{F} de repères R dont les composantes relatives vérifient

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_1 = \varpi_1; & \omega_2 = \varpi_2; & \omega_{12} = \varpi_{12}, \\ \omega_3 = \Pi_1 \omega_{,2} - \Pi_2 \omega_{,1}, \end{cases}$$

cette famille \mathcal{F} dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument, soient f_1 et f_2 .

A la courbe γ de E'_2 définie par $u_2 = f(u_1)$ est associée la pseudo-ligne Γ de V qui vérifie la même équation. Prenons dans E'_2 des repères \bar{R} tels que les repères attaches aux points de γ vérifient $\varpi_2 = 0$. Les autres composantes sont des formes $\varpi(u)$ à une variable. Les repères R correspondant dans E_3 vérifient $\omega_1 = \varpi_1(u)$, ..., et leur origine engendre une courbe (C) qui dépend des fonctions f_1 et f_2 .

On peut choisir f_1 et f_2 de façon que (C) soit une courbe donnée (C_0) de E_3 . Soit en effet

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= ds, & \tilde{\omega}_{12} &= \rho ds, \\ \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_{31} &= 0, & \tilde{\omega}_{32} &= \tau ds \end{aligned}$$

les composantes du repère de Frenet $\tilde{M}\tilde{e}_i$ de (C_0) ; une rotation d'angle V

autour de \vec{e}_1 amène ce repère en \vec{Me}_i^* ; une rotation d'angle θ autour de \vec{e}_2^* amène \vec{Me}_i^* en \vec{Me}_i^* et l'on a

$$\begin{aligned}\omega_1^* &= ds \cos \theta, & \omega_{12}^* &= (\rho \cos V \cos \theta + \tau \sin \theta) ds - \sin \theta dV; \\ \omega_2^* &= 0, & \omega_{31}^* &= \rho \sin V ds + d\theta; \\ \omega_3^* &= -ds \sin \theta, & \omega_{32}^* &= (-\rho \cos V \sin \theta + \tau \cos \theta) ds - \cos \theta dV.\end{aligned}$$

Les équations différentielles

$$\begin{aligned}\omega_1^* &= \mathfrak{w}_1(u), \\ \omega_{12}^* &= \mathfrak{w}_{12}(u), \\ \omega_3^* &= \mathfrak{I}_1(u)\omega_{32}^* - \mathfrak{I}_2(u)\omega_{31}^*\end{aligned}$$

expriment que (C_0) est une courbe (C) lieu des centres des éléments homologues des points de γ . Ce sont des équations à trois fonctions inconnues s, V, θ de la variable u . Elles sont d'ailleurs visiblement compatibles en $\frac{ds}{du}, \frac{dV}{du}, \frac{d\theta}{du}$, et finalement compatibles en s, V, θ . D'où trois constantes arbitraires pour la solution générale correspondant à (C_0) . *La réalisation serait complètement déterminée si l'on se donnait l'élément S homologue d'un point donné \bar{M} de E_n , et la courbe (C_0) lieu des centres des éléments homologues des points d'une courbe γ passant par \bar{M} .*

Caractéristiques. — La correspondance entre γ et C définit une courbe (K) de l'espace des (u, z) . Les résultats précédents ne sont valables que dans le cas général où les éléments de contact de (K) ne sont pas des éléments intégraux singuliers de Σ .

Les courbes caractéristiques de Σ (dans l'espace des u, z) sont définies par

$$(1) \quad \frac{a_1}{\mathfrak{I}_{1,1}} = \frac{a_2}{\mathfrak{I}_{2,1} - 1},$$

relation qui entraîne la nullité du déterminant des équations (59.7') et (59.9').

Si (K) est une caractéristique, le problème de Cauchy est en général impossible [17]. On peut énoncer une condition nécessaire de possibilité qui est la compatibilité des équations (59.7') et (59.9'), auquel cas l'on a

$$(2) \quad \frac{a_1}{\mathfrak{I}_{1,1}} = \frac{a_2}{\mathfrak{I}_{2,1} - 1} = \frac{R}{-\mathfrak{I}_{2,2}a_1 + (1 + \mathfrak{I}_{1,2})a_2}.$$

Alors a_1 et a_2 sont donnés par (2), et, pour les courbes (C) correspondantes, V et θ sont données en fonction de l'arc u de γ par les deux relations finies

$$(3) \quad \begin{cases} \rho \cos V = (\tau \cos \theta - a_2 \sin \theta) \cos \theta, \\ -\tan \theta = \mathfrak{I}_1 a_2 - \mathfrak{I}_2 a_1, \end{cases}$$

où η désigne la courbure de γ ($\varpi_{1,2} = \eta du$); ces deux relations résultent de l'élimination de dV , ds entre les équations $\omega_1^* = du$, $\omega_{1,2}^* = \eta du$, $\omega_{3,2}^* = a_2 du$ et $\omega_3^* = (\Pi_1 a_2 - \Pi_2 a_1) du$.

Ainsi, à toute courbe γ de E'_2 correspond une famille de courbes (C) de E_3 définissant avec γ une courbe (K) caractéristique. Cette famille dépend d'une fonction arbitraire, par exemple la fonction $a_2(u)$; a_1 est alors donné par (1), et V et θ vérifient (3). Les courbes (C) pour lesquels le problème est peut-être possible vérifient de plus (2).

62. *Points exceptionnels.* — On a défini au n° 60 une réalisation de E'_2 au voisinage d'un point (u_1, u_2) générique de E'_2 . On a écarté *a priori* les points de courbure nulle. On peut se dispenser de les écarter, en remplaçant l'équation (54.7) par la suivante :

$$(1) \quad R\omega_3 = T_1\omega_{3,2} - T_2\omega_{3,1},$$

qui est valable dans tous les cas, et fournit encore [après une discussion un peu plus longue (1)] un système Σ en involution. Le théorème d'existence des solutions de Σ ne permet pas d'affirmer l'existence de réalisations au voisinage de tout point de E'_2 . On montrerait que les points exceptionnels (2) sont dans le cas général envisagé ici, des trois types suivants :

1° Points à courbure non nulle pour lesquels

$$(2) \quad \Pi_{1,1} = \Pi_{2,2} = 1 + \Pi_{1,2} = 1 - \Pi_{2,1} = 0.$$

2° Points où la courbure est à la fois nulle et stationnaire, et où, de plus, la direction de la torsion est stationnaire.

3° Points où la courbure et la torsion sont nulles.

(1) L'équation (1) peut s'écrire, si $R \neq 0$, $R\tilde{\omega} = 0$ en posant $\tilde{\omega} = \omega_3 - \Pi_1\omega_{3,2} + \Pi_2\omega_{3,1}$. Alors l'équation dérivée (1') $[dR\tilde{\omega}] + R\tilde{\omega}' = 0$ devient [puisque $\tilde{\omega} = 0$ d'après (1)] $\tilde{\omega}' = 0$, et l'on est ramené à la discussion précédente.

Points à courbure nulle. — L'équation (1') s'écrit

$$(1') \quad [dR\omega_3] = [DT_1\omega_{3,2}] - [DT_2\omega_{3,1}]$$

et l'équation (1) se réduit à

$$(1) \quad T_1\omega_{3,2} = T_2\omega_{3,1}.$$

Si $\vec{T} = R = 0$ le point intégral (u_1, u_2, z) est singulier, car (1) s'évanouit (d'où la 3^e catégorie).

Si $\vec{T} \neq 0$ (donc $T_1T_2 \neq 0$ pour le repère générique), une discussion analogue à celle du n° 59 montre que ces points sont en général réguliers, et conduit à la 2^e catégorie de points exceptionnels.

(2) Ce sont les points (u_1, u_2) tels que les points intégraux (u_1, u_2, z) ne soient pas réguliers, ou tels que par ces points il ne passe aucun élément intégral régulier (cf. [17]).

CONCLUSION. — *Étant donné un espace E'_2 à courbure, on peut, dans le cas général où tous les points à courbure non nulle ne vérifient pas (2), affirmer l'existence d'une réalisation dans E_3 au voisinage de tout point n'entrant dans aucune des catégories ci-dessus.*

63. *Cas particulier.* — Nous allons maintenant examiner les connexions vérifiant

$$(1) \quad \Pi_{1,1}^* \equiv 1 - \Pi_{2,1}^* \equiv 0, \quad R \neq 0$$

en tout point (u_1, u_2) , et quel que soit le choix des repères $R^*(u_1, u_2)$, c'est-à-dire quels que soient u_1, u_2, θ . Nous les appellerons *connexions E'_0* .

Le calcul montre qu'il faut et suffit pour cela que (1) soit vérifiée pour deux valeurs de θ ne différant pas entre elles d'un multiple de π , par exemple pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce qui donne, pour (1), la condition nécessaire et suffisante

$$(2) \quad \Pi_{1,2} = 1 - \Pi_{2,2} = \Pi_{2,1} = 1 + \Pi_{1,1} = 0$$

L'équation (59.g') est identiquement vérifiée. Pour l' I_1^0 générique (ne vérifiant pas $a_1 = a_2 = 0$), il existe ∞^1 éléments ε_2^0 associés. Par l' I_1 générique, il passe donc $\infty^1 I_2$, et la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Signification géométrique de (2) pour l'espace E'_0 . — Prenons \vec{e}_2 sur la torsion; on a alors

$$(3) \quad \Pi_1 = 0, \quad d\Pi_1 = 0, \quad D\Pi_1 = d\Pi_1 - \omega_{12}\Pi_2 = -\omega_{12}\Pi_2;$$

$$(4) \quad \Pi_2 = \Pi, \quad d\Pi_2 = d\Pi, \quad D\Pi_2 = d\Pi_2 + \omega_{12}\Pi_1 = d\Pi.$$

L'hypothèse (2) donne

$$(5) \quad D\Pi_1 = -\omega_2, \quad D\Pi_2 = \omega_1.$$

D'où, d'après (3) et (4),

$$(6) \quad \omega_1 = d\Pi,$$

$$(7) \quad \omega_{12} = \frac{\omega_2}{\Pi}.$$

La relation (7) exprime que les trajectoires orthogonales ($\omega_2 = 0$), des lignes de torsion sont des droites; (6) exprime que, le long d'une ligne de torsion l_0 ($\omega_1 = 0$), la torsion a une grandeur constante Π_0 , et (7) exprime que Π_0 est la courbure de (l_0); on peut dire que les espaces E'_0 ont pour lignes de torsion des cercles (au sens courbure constante) et que la torsion le long de ces cercles est constamment égale à leur rayon (de courbure).

Réciproquement, dans un espace jouissant de ces propriétés, ω_1 est de la forme $A d\Pi$, et ω_{12} est de la forme $B\omega_1 + \frac{\omega_2}{\Pi}$; si les trajectoires orthogonales

des lignes de torsion sont des droites, $B \equiv 0$, et l'on a (7). Alors

$$\Pi\omega'_{12} = \Pi R[\omega_1\omega_2] = [\omega_1\omega_{12}] + \Pi R[\omega_1\omega_2] - [d\Pi\omega_{12}],$$

d'où

$$(A - 1)[d\Pi\omega_{12}] = 0,$$

et finalement $A = 1$, d'où (6). Or (6) et (7) entraînent (2). Conclusion :

Les espaces vérifiant (2), espaces E'_0 , sont ceux dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites, et dont les lignes de torsion sont des cercles, la torsion le long d'un tel cercle étant égale au rayon de courbure.

Signification de (2) dans les congruences réalisantes. — Les équations (25.2) et (25.3) montrent, comme conséquence de (2) que les composantes, $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ du repère parallèle à $R(u_1, u_2)$, et d'origine le pôle de l'élément S décrivant la congruence réalisante, sont toutes deux nulles, ainsi bien entendu que $\tilde{\omega}_3$ qui l'est toujours : le pôle de S reste donc fixe quand S décrit la congruence; d'où l'énoncé suivant, qui précise le cas particulier envisagé dans le théorème général :

THÉORÈME. — *Les espaces E'_0 sont réalisables par des congruences dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments. Dans toute congruence réalisante, la surface polaire est réduite à un point.*

b. Réalisations par des congruences de droites.

64. Pour que le repère obtenu soit celui d'une congruence de droites, il faut et il suffit que son origine soit le milieu des foyers, donc que la somme des racines de l'équation (20.2)

$$(20.2) \quad [\omega_1 + \rho\omega_{31} \quad \omega_2 + \rho\omega_{32}] = 0$$

soit nulle. C'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \quad [\omega_1\omega_{32}] = [\omega_2\omega_{31}].$$

Le système Σ' à résoudre est formé du système Σ et de l'équation quadratique (1) [13, 17]. Les éléments ε_2^0 en involution avec I_1^0 , doivent vérifier l'équation supplémentaire (avec les notations du n° 59)

$$(2) \quad a_1 + x_2 = 0,$$

x_1 et x_2 étant en général bien déterminés par (59.7') et (59.9'), (2) est alors impossible et le système Σ' n'est pas en involution.

Pour qu'il le soit, il faudrait que ces équations soient compatibles avec (2) en tirant x_2 de (2), elles deviennent

$$(3) \quad a_2 x_1 = -R + a_1^2,$$

$$(4) \quad (1 - \Pi_{2,1})x_1 = (\Pi_{1,1} - \Pi_{2,2})a_1 + (1 + \Pi_{1,2})a_2.$$

Leur compatibilité entraînerait une relation entre a_1 , a_2 donc un I_1^0 non générique, sauf si (4) s'évanouit, c'est-à-dire dans l'hypothèse

$$(5) \quad 1 - \Pi_{2,1} \equiv \Pi_{1,1} - \Pi_{2,2} \equiv 1 + \Pi_{1,2} \equiv 0.$$

Ceci doit être réalisé *en tout point* (u_1, u_2) sinon I_1^0 ne serait pas générique. Le calcul montre que les équations (5) sont réalisées quel que soit θ pourvu qu'elles le soient pour une valeur particulière de θ . Le choix des axes est alors générique, et par tout I_1 générique passe un I_2 bien déterminé *du système* Σ' . Comme on a encore $s_0 = 4$, la solution générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

CONCLUSION. — *Les espaces vérifiant la condition (5) sont réalisables par des congruences de droites, qui dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

Cela ne veut pas dire qu'une connexion, qui ne vérifie pas (5), n'est en aucun cas réalisable par des congruences de droites. Il peut se faire que, pour certaines connexions, le système Σ' , bien que non en involution, soit tout de même compatible. La Note [16b] constitue, en somme, une étude complète de la compatibilité de Σ' et indique, en dehors de la condition (5), certaines conditions de possibilité.

III. — Cas du parallélisme absolu.

65. Nous n'aurons à considérer que des espaces effectivement non holonomes, puisque les réalisations locales du plan euclidien ont été données (au n° 31). Les espaces E' étudiés par la suite seront donc des espaces à parallélisme absolu dont la torsion n'est pas partout nulle.

On pourrait leur appliquer la méthode précédente. On peut alors simplifier les calculs en se limitant aux repères \bar{R} pour lesquels $\varpi_{1,2} = 0$, et par suite aux transformations Θ d'angle θ indépendant de u_1, u_2 , ce qui ne modifie pas la condition d'involution B. Pour le repère générique et l'élément I_1^0 générique, T_1 et T_2 ne sont pas nuls, sans quoi l'on aurait $\vec{T} \equiv 0$; cela permet de prendre l'équation à associer à σ pour former Σ (n° 54) sous la forme

$$(1) \quad \omega_{\sigma,1} = A \omega_{\sigma,2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{T_1}{T_2}.$$

En opérant comme précédemment, on trouverait encore un ε_2^0 et un seul en involution avec I_1^0 , dans le cas général où l'équation (1') dérivée de (1) n'est pas identiquement vérifiée. On a encore alors deux fonctions arbitraires d'un argument, c'est-à-dire le théorème du n° 49 (1).

Si (1') est identiquement vérifiée, Σ est encore en involution, et les variétés réalisantes dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Ce cas correspond à $dA \equiv 0$, c'est-à-dire aux E' dont la torsion a une direction fixe; énonçons ce résultat, qui complète le théorème précédent :

THÉORÈME. — *Les espaces E' à parallélisme absolu à torsion de direction fixe sont réalisables par des congruences à plan directeur qui dépendent, pour un E' donné, d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

Pour la réalisation par des *congruences de droites*, il faut, puisque $\vec{T} \neq 0$, qu'il y ait un foyer simple à l'infini, et l'origine du repère intrinsèque est caractérisée par le fait qu'une distance focale est égale à -1 ; cela donne d'après (20. 2), la condition nécessaire et suffisante

$$(2) \quad [\omega_1 - \omega_{31} \quad \omega_2 - \omega_{32}] = 0.$$

Le système $\Sigma' \equiv [\Sigma, (2)]$ admet comme condition d'involution $A = \text{const.}$

THÉORÈME. — *Les espaces E' à parallélisme absolu à torsion de direction fixe sont réalisables par des congruences de droites qui, pour un E' donné dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

Quand Σ' n'est pas en involution, il peut cependant admettre des solutions, du moins pour certains espaces E' . Elles ont été données dans la Note [16a]. Nous allons les retrouver (n° 76) en faisant une étude directe de la réalisation de E' . Nous ferons ici cette étude *dans le cas général d'une réalisation par des congruences d'éléments linéaires*, de façon à expliciter les résultats et surtout à indiquer *certaines formes géométriques* auxquelles peuvent se réduire les solutions (nos 66 à 75).

66. Pour l'étude directe que nous allons faire, nous prendrons comme inconnues, non plus les paramètres z du repère R de la congruence cherchée, mais *les formes de Pfaff à deux variables* que sont les composantes de R quand l'élément $(\vec{M}e_3)$ décrit la congruence.

a. Donnée de E' . — E' est donné par trois formes de Pfaff analytiques $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_{12}$ de deux variables u_1, u_2 . T_1 et T_2 sont alors des fonctions analytiques

(1) Pour la solution générale, seule en vue ici, aucune courbe intégrale de Σ ne passe par les points u_1, u_2 , où $\vec{T} = 0$: la réalisation locale est donc *limitée aux aomaines de torsion jamais nulle* (du moins pour la solution générale).

de u_1, u_2 : nous nous placerons exclusivement dans des domaines E' où la torsion n'est jamais nulle. L'angle de la torsion avec les axes du repère donné est alors une fonction analytique de u_1, u_2 , et une rotation analytique des axes permet de prendre \vec{e}_2 sur le vecteur torsion.

On peut donc prendre en chaque point $\bar{M}(u_1, u_2)$ un repère \bar{R} dont la deuxième axe est porté par la torsion \vec{T} , et dont les composantes $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_{12}$ restent analytiques. On posera alors

$$\vec{T} = T\vec{e}_2.$$

On peut, d'autre part, par un nouveau choix de coordonnées (u, ν) , prendre

$$(1) \quad \varpi_1 = X(u, \nu) du,$$

$$(2) \quad \varpi_2 = Y(u, \nu) d\nu.$$

Enfin, la courbure étant nulle, $\varpi'_{12} = 0$ donne

$$(3) \quad \varpi_{12} = d\varphi \quad (\varphi = \text{fonction de } u, \nu).$$

En général $\varpi_{12} \neq 0$ et φ ne se réduit pas à une constante. On peut alors prendre, comme coordonnées dans E' , φ et une des variables u, ν . D'où les divers cas examinés plus loin.

b. Réalisation de E' . — Le problème consiste à assujettir les composantes ω_s d'un repère $R(u, \nu)$ de l'espace à trois dimensions, aux équations

$$(I) \quad (4) \quad \omega_1 = \varpi_1, \quad (5) \quad \omega_2 = \varpi_2, \quad (6) \quad \varpi_{12} = \varpi_{12},$$

c'est-à-dire à trouver six formes de Pfaff ω_s des deux variables u, ν , vérifiant (I) et les six équations de structure $[\omega_s]$ de l'espace ordinaire. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $(M\vec{e}_3)$ de la famille de repères $R(u, \nu)$ engendre une congruence réalisant E' .

1° Les équations $[\omega_1], [\omega_{12}], [\omega_2]$ s'écrivent

$$[\omega_3\omega_{31}] = 0, \quad [\omega_{32}\omega_{31}] = 0, \quad [\omega_3\omega_{32}] = T[\omega_1\omega_2].$$

Si ω_{31} n'était pas partout nul, les deux premières entraîneraient $[\omega_3\omega_{32}] = 0$, donc $T = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$(7) \quad \omega_{31} \equiv 0.$$

2° Alors $[\omega_{32}]$, qui s'écrit $[\omega_{31}\omega_{12}] = \omega'_{32}$, montre que $\omega'_{32} = 0$ et que ω_{32} est une différentielle totale exacte

$$(8) \quad \omega_{32} = d\sigma,$$

σ étant une fonction *inconnue* de (u, ν) .

Il reste donc à déterminer σ et la forme ω_3 ; comme (7) entraîne $[\omega_1]$ et $[\omega_{12}]$, et que (8) entraîne alors $[\omega_{32}]$, σ et ω_3 doivent vérifier $[\omega_{34}]$, $[\omega_2]$, $[\omega_3]$.

3° $[\omega_{34}]$ s'écrit, en tenant compte de (7),

$$[\omega_{34}] \quad [\omega_{32} \omega_{12}] = [d\sigma \varpi_{12}] = 0.$$

On a donc à envisager deux cas suivant que ϖ_{12} est nul ou non.

67. Si $\varpi_{12} \equiv d\varphi \neq 0$, $[\omega_{34}]$ montre que σ est fonction seulement de φ :

$$(9) \quad \omega_{12} = p(\varphi) d\varphi.$$

Signification de $p(\varphi)$. — Si (γ) désigne l'indicatrice sphérique du cône directeur, et s son arc, α l'angle du plan osculateur à (γ) avec le plan tangent à la sphère, les expressions de \vec{de}_3 et \vec{de}_2 montrent que

$$ds = p(\varphi) d\varphi, \quad \text{tang } \alpha = p(\varphi).$$

La fonction $p(\varphi)$ caractérise donc le cône directeur. En tenant compte de la signification de l'hypothèse $\varpi_{12} \neq 0$, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les espaces à parallélisme absolu E' dont la torsion n'a pas une direction fixe sont localement réalisables par des congruences à cône directeur non plan : étant donné un espace E' , on peut prendre, pour cône directeur, un cône (non plan) arbitraire, et les congruences réalisant E' , et admettant ce cône directeur, dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable (de la variable φ).*

Nous le démontrerons d'abord dans le cas général où φ dépend de u et de v , puis nous examinerons le cas particulier où φ ne dépend que de u (qui ne change rien à la démonstration), et nous étendrons enfin la démonstration au cas où φ ne dépend que de v .

68. *Cas général où φ dépend de u et de v .* — En prenant v et φ comme coordonnées, le tableau (T) des composantes de E' et de la congruence réalisante est le suivant :

(T)	$\omega_1 = \varpi_1 = \xi d\varphi + \zeta dv,$	$\omega_{31} = 0,$
	$\omega_2 = \varpi_2 = \eta dv,$	$\omega_{32} = p(\varphi) d\varphi,$
	$\omega_{12} = \varpi_{12} = d\varphi,$	$\omega_3 = P(v, \varphi) d\varphi + Q(v, \varphi) dv.$

Les fonctions données ξ , η , ζ vérifient par hypothèse (d'après le choix des repères et les équations de structure de E') les relations

$$(1) \quad \eta = \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

$$(2) \quad \frac{1}{\xi \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \zeta \right) = T.$$

Les fonctions inconnues p , P , Q doivent vérifier les relations nécessaires et suffisantes $[\omega_2]$ et $[\omega_3]$, soit ici

$$[\omega_2] \quad (3) \quad Qp = -T\xi\eta,$$

$$[\omega_3] \quad (4) \quad \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - p\eta.$$

On peut prendre $p(\varphi) \neq 0$ arbitraire. Alors Q est bien déterminé par (3)

$$(5) \quad Q = \frac{-T\xi\eta}{p}$$

soit

$$(6) \quad Q = \frac{-1}{p} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \zeta \right) = \frac{-1}{p} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi \partial \nu} + \zeta \right).$$

Et P est donné par (4), et dépend d'une fonction arbitraire $H(\varphi)$,

$$(7) \quad P = P_0(\nu, \varphi) + H(\varphi)$$

avec

$$(8) \quad P_0 = \int_{\nu_0}^{\nu} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + p\eta \right) d\nu.$$

La solution dépend bien de deux fonctions arbitraires (conformément au théorème général); ce sont deux fonctions arbitraires *de* φ (p et H),

La signification de $p(\varphi)$ donnée au n° 67, montre qu'on peut prendre arbitrairement le cône directeur, pourvu qu'on ne prenne pas un plan ($p \neq 0$), et, ce cône étant choisi, les congruences réalisantes dépendent encore de la fonction arbitraire $H(\varphi)$, ce qui démontre le théorème du n° 67. On peut prendre par exemple un cône *de révolution* arbitraire.

69. *Cas où φ ne dépend que de u .* — C'est le cas précédent avec

$$(1) \quad \xi = 0.$$

Dans ce cas, P s'écrit sans signe d'intégration; car

$$Q = \frac{-1}{p} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{1}{p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi \partial \nu} \quad [\text{d'après (66.1)}]$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{-p'}{p^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi \partial \nu} + \frac{1}{p} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \varphi^2 \partial \nu} \quad \left(\text{avec } p' = \frac{dp}{d\varphi} \right).$$

D'où, finalement,

$$(2) \quad P_0 = p\xi - \frac{p'}{p^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{1}{p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}.$$

Signification géométrique de l'hypothèse. — Les lignes de torsion de E' sont les lignes $\varpi_1 = 0$; alors $\varpi_{12} = 0$, ce sont donc des droites. Réciproquement

d'ailleurs, si, la torsion n'ayant pas une direction fixe, les lignes de torsion sont des droites $[\varpi_1 \varpi_{12}] = 0$ et $[du d\varphi] = 0$: φ ne dépend que de u .

On trouve comme réalisations des congruences à cône directeur double, puisque

$$[\omega_1 \omega_{32}] = [\omega_2 \omega_{11}] = [\omega_{12} \omega_{31}] = 0 \quad (\text{pas de racine finie dans l'équation 20.2}).$$

70. *Cas où φ ne dépend que de v .* — Comme $[\varpi_{12} \varpi_2] = 0$, on a $\varpi'_1 = 0$, et un changement de variable u permet de prendre $\varpi_1 = du$.

D'autre part

$$\omega'_3 \equiv [\omega_{,1} \omega_1] + [\omega_{32} \omega_2] = 0,$$

ce qui donne

$$(1) \quad \omega_3 = dz,$$

z étant une fonction inconnue de u et de φ . Le tableau (T) s'écrit alors

(T)	$\omega_1 = \varpi_1 = du,$	$\omega_{31} = 0,$
	$\omega_2 = \varpi_2 = \eta d\varphi,$	$\omega_{32} = p(\varphi) d\varphi,$
	$\omega_{12} = \varpi_{12} = d\varphi,$	$\omega_3 = dz.$

L'équation $[\varpi_3]$ étant alors vérifiée, les deux fonctions inconnues $p(\varphi)$ et $z(u, \varphi)$ sont assujetties à vérifier la condition nécessaire et suffisante $[\varphi_2]$ qui s'écrit

$$(2) \quad \varpi'_2 = [\varpi_1 \varpi_{12}] = [\omega_3 \omega_{32}]$$

soit

$$(3) \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} - 1 = p \frac{\partial z}{\partial u}.$$

D'où, en prenant arbitrairement $p(\varphi) \neq 0$, c'est-à-dire pour cône directeur un cône non plan arbitraire, il reste encore une fonction arbitraire $H(\varphi)$ et

$$(4) \quad z = \frac{\eta - u}{p(\varphi)} + H(\varphi).$$

Le théorème du n° 67 est donc démontré.

Signification géométrique de l'hypothèse. — $\omega_{12} \neq 0$ et $[\varpi_2 \varpi_{12}] \equiv 0$ équivalent à dire que la torsion n'a pas une direction fixe et que les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites. On trouve pour les réalisations des congruences de normales ($\omega_3 = 0$) à une développable non plane (cf. n° 44) et l'on peut choisir arbitrairement le cône asymptotique de la développable (qui est supplémentaire du cône directeur).

71. $\varphi = 0$. *Espaces à torsion de direction fixe.* — Le cas $\varphi = 0$ a été identifié (n° 45) à celui des espaces dont la torsion a une direction fixe. On a alors

$\varpi'_1 = 0$, et l'on peut choisir u tel que $\varpi_1 = du$. On a vu d'autre part (n° 66) que $\omega_{32} = d\sigma$.

a. Donnons-nous arbitrairement une fonction $\sigma(u, \nu)$, dépendant effectivement de u . On pourra alors définir ω_3 par

$$\omega_3 = P d\sigma + Q d\nu,$$

P et Q étant des fonctions inconnues de σ et de ν . Le tableau des composantes de E' et de la congruence cherchée est alors

(T ₂)	$\omega_1 = \varpi_1 = du,$	$\omega_{31} = 0,$
	$\omega_2 = \varpi_2 = \eta(\sigma, \nu) d\nu,$	$\omega_{32} = d\sigma,$
	$\omega_{12} = \varpi_{12} = 0,$	$\omega_3 = P d\sigma + Q d\nu.$

Les fonctions P et Q sont assujetties à vérifier les équations nécessaires et suffisantes $[\omega_2]$, $[\omega_3]$, soit ici

$$[\omega_2] \quad (1) \quad Q = \frac{-d\eta}{d\sigma}$$

$$[\omega_3] \quad \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \eta$$

d'où

$$(2) \quad P = - \int \left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2} \right) d\nu + H(\nu).$$

Si l'on se donne pour σ une fonction arbitraire de deux variables dépendant effectivement de u , les solutions correspondantes dépendent encore de la fonction arbitraire $H(\nu)$.

b. Si l'on se donne pour σ une fonction arbitraire *de la variable ν seulement*, on a

$$\omega'_3 \equiv [\omega_{31}\omega_1] + [\omega_{32}\omega_2] = 0, \quad \omega_3 = dz.$$

En posant alors $\varpi_2 = \bar{\eta}(u, \sigma) d\sigma$, la fonction inconnue $z(u, \sigma)$, qui n'est plus assujettie qu'à $[\omega_2]$, doit vérifier

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u},$$

d'où

$$(3) \quad \boxed{z = \eta + H(\sigma).}$$

Pour ces solutions, soit W, on a deux fonctions arbitraires d'une variable, $\sigma(\nu)$ et $H(\sigma)$, c'est-à-dire deux fonctions arbitraires de ν .

En définitive, on peut prendre pour σ une fonction arbitraire de u et de ν ne se réduisant pourtant pas à une constante (car alors $\omega_{32} \equiv 0$ et l'espace serait

holonome). La solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments (conformément au théorème du n° 65).

Rappelons que les congruences réalisantes ont un *plan directeur* (n° 45).

72. *Forme particulière des réalisations des espaces à torsion de direction fixe.*

THÉORÈME. — *Tout espace E' à parallélisme absolu, dont la torsion a une direction fixe, est localement réalisable par des congruences de normales à une droite (c'est-à-dire engendrée par des éléments dont le support coupe, à angle droit, une droite fixe). Ces solutions dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.*

Les solutions envisagées dans ce théorème ne sont autres que celles que l'on obtient en faisant $H \equiv 0$ dans les solutions W du n° 71 b. Remarquons d'abord en passant que les solutions W sont des congruences de normales ($\omega'_i = 0$) à des cylindres (à cause du plan directeur); soient $\tilde{\omega}_i$ les composantes relatives du repère parallèle à K et d'origine $P = M - z \vec{e}_3$. On a, d'après (T₂) et (71.3),

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \omega_1 - z \omega_{31} = du, \\ \tilde{\omega}_2 &= \omega_2 - z \omega_{32} = -H(\sigma) d\sigma, \\ \tilde{\omega}_3 &= \omega_{31} = \tilde{\omega}_{12} = 0, \quad \tilde{\omega}_{32} = d\sigma. \end{aligned}$$

Les courbes $d\sigma = 0$ du lieu de P sont des droites ($\tilde{\omega}_1$ seul non nul), et ces droites, parallèles à \vec{e}_1 , ont une direction fixe ($\tilde{\omega}_{31} \equiv \tilde{\omega}_{12} \equiv 0$), et décrivent un cylindre. Ce cylindre se réduit à une droite si $H \equiv 0$, et les supports de V coupent cette droite à angle droit. C. Q. F. D.

De telles solutions dépendent de la fonction arbitraire $\sigma(\nu)$ (cf. n° 71 b).

73. *Études de ces réalisations. Congruences de normales à une droite.* — On a, pour le tableau des composantes de E' et de la congruence V envisagée,

$\omega_1 = \varpi_1 = du,$	$\omega_{12} = \varpi_{12} = 0,$	$\omega_{32} = d\sigma,$
$\omega_2 = \varpi_2 = \eta(u, \sigma) d\sigma,$	$\omega_{31} = 0$	$\omega_{31} = d\eta,$

avec (1), $\eta(u, \sigma) = \eta_0(u, \nu)$, σ étant une fonction de ν choisie arbitrairement, η_0 une fonction donnée de u et de ν .

En coordonnées semi-polaires d'axe Ou porté par la droite Δ sur laquelle s'appuie V, u est la cote de M, et σ son angle polaire. Son rayon vecteur ρ est égal à η , et l'équation de la surface des centres Σ est

(2)
$$\rho = \eta(u, \sigma).$$

Les pseudo-lignes de torsion sont les plans perpendiculaires à Δ ; leurs trajectoires orthogonales sont les plans passant par Δ . Ces lignes sont aussi des pseudo-droites. Les dernières sont en même temps des géodésiques.

Cas particulier. — Si l'on peut choisir σ de façon que $\tau_1(u, \sigma)$ ne dépende que de u , on aura, pour Σ , une surface de révolution; cela donne lieu à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Les espaces à parallélisme absolu E'_0 à torsion de direction fixe et de grandeur constante le long d'une ligne de torsion sont réalisables (localement) par une congruence V_0 de normales à une droite fixe Δ et dont les centres décrivent une surface de révolution d'axe Δ .*

En effet, l'hypothèse faite sur E' revient à dire que T ne dépend que de u . Or

$$T = \frac{1}{\tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial u}.$$

C'est donc que $\frac{\partial}{\partial u}(\log \tau_0)$ ne dépend pas de v et que $\log \tau_0$ est de la forme $\log \tau_1(u) + \log \Lambda(v)$, d'où

$$\tau_0 = \tau_1(u) \Lambda(v);$$

et il suffit de prendre

$$d\sigma = \Lambda(v) dv$$

pour avoir

$$\tau_1(u, \sigma) = \tau_1(u)$$

indépendant de σ .

C. Q. F. D.

La solution de cette forme est bien déterminée (H et σ l'étant), du moins à un déplacement près.

La réciproque est d'ailleurs vraie et toute congruence du type V_0 réalise un espace E'_0 . On a en effet alors $\tau_1(u, \sigma) = \tau_1(u)$ et T ne dépend que de u ($T = -\frac{1}{\tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial u}$). On peut le voir aussi en remarquant que la normale à Σ rencontre Δ et que le produit vectoriel $\vec{e}_3 \wedge H$ (n° 27) est porté par \vec{e}_2 et égal à \vec{T} ; or ce produit est constant le long d'un parallèle de Σ_0 .

Autre réalisation des espaces E'_0 . — Si l'on prend

$$dv = \frac{d\sigma}{\cos(\sigma - \sigma_0)},$$

on a

$$\rho \cos(\sigma - \sigma_0) = \eta$$

et la surface des centres Σ_1 est un cylindre de génératrices perpendiculaires à Δ , admettant pour section droite une méridienne de Σ_0 . Une telle réalisation V_1 est encore unique (à un déplacement près).

Rappelons d'autre part que la réalisation n'est valable que dans un domaine où $(\varpi_1, \varpi_2) \neq 0$, et que les congruences réalisantes sont ordinaires : donc aucun centre ne peut être sur (Δ) et la méridienne de Σ_0 est un arc de courbe (γ) ne rencontrant pas (Δ) . Les espaces réalisés globalement par V_0 et V_1 définies par

cet arc (γ) ne sont pas topologiquement les mêmes, et ne sont, par suite, pas globalement applicables.

74. *Étude d'un cas particulier d'espaces E'_0 .* — Nous allons considérer le cas où

$$(1) \quad r_1 = 1 + \frac{u}{A} \quad (A = \text{const.}).$$

On a alors

$$(2) \quad T = \frac{1}{u + A}.$$

La surface de révolution Σ_0 est un cône (c) . Considérons Δ comme verticale. Le cône (c) passe par le cercle horizontal (c_0) de centre o et de rayon 1 , et a un sommet au point de Δ d'abscisse $-A$.

La congruence V_0 limitée à $u > -A$ réalise globalement un espace E'_0 dont les composantes relatives sont les composantes latérales de V_0 :

$$\varpi_1 = du, \quad \varpi_2 = \left(1 + \frac{u}{A}\right) d\sigma, \quad \varpi_{12} = 0 \quad \text{avec } u > -A.$$

La congruence V_1 a pour surface des centres un plan. Limitée aussi à $u > -A$, elle réalise un espace E'_1 de mêmes composantes relatives que E'_0 , mais non globalement applicable sur E'_0 .

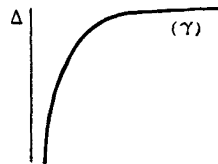
Quand $A \rightarrow \infty$, on passe par continuité à des espaces holonomes : V_0 tend vers un cylindre de révolution, V_1 vers un plan.

75. *Cas d'une torsion constante (et de direction fixe).* — Soit $\vec{T} = T \vec{e}_2$ avec T constant; on a alors

$$(1) \quad r_1 = e^{1u}.$$

On obtient encore un espace holonome par continuité quand T tend vers zéro. La méridienne (γ) de la surface des centres Σ_0 (et en même temps la section droite de Σ_1) est la courbe $\varphi = e^{1u}$. La congruence V_0 est ordinaire en

Fig. D.



tout élément S quand u et σ varient de $-\infty$ à $+\infty$. De même V_1 , avec u quelconque, mais σ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (bornes exclues). Elles réalisent

globalement des espaces E_0 et E'_1 de mêmes composantes relatives, mais non globalement applicables. Le second est simplement connexe.

Quand $T \rightarrow 0$, E'_0 et E'_1 tendent respectivement vers un cylindre de révolution et vers un plan.

Pseudo-droites. — On sait qu'elles font un angle constant le long de chacune d'elles avec le plan directeur; soit donc x l'angle d'une pseudo-droite avec le plan horizontal; on a, dans V_0 ,

$$(3) \quad e^{1u} \frac{d\sigma}{du} = \text{tang } x.$$

dans V_1 ,

$$(4) \quad e^{T u} \frac{d\sigma}{\cos \sigma du} = \text{tang } x.$$

Soient dans V_0 deux éléments $S_1(u_1, \sigma_1)$ et $S_2(u_2, \sigma_2)$. Les droites passant par S_1, S_2 sont données par

$$(5) \quad \sigma_2 - \sigma_1 = - \frac{1}{T} e^{-T(u_2 - u_1)} \text{tang } x.$$

L'angle polaire σ n'étant défini qu'à $2k\pi$ près, il en est ainsi de $\sigma_2 - \sigma_1$, et il y a une infinité dénombrable de droites passant par S_1, S_2 .

Au contraire, dans V_1 , il faudrait remplacer (5) par (6),

$$(6) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\cos \sigma} = - \frac{1}{T} e^{-T(u_2 - u_1)} \text{tang } x$$

et, σ variant seulement de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ (bornes exclues), σ_1 et σ_2 et par suite le premier membre sont bien déterminés par la donnée de deux éléments, et il y a une pseudo-droite et une seule par deux éléments donnés.

76. *Réalisation des espaces à parallélisme absolu par des congruences de droites.* — Nous allons reprendre les divers cas rencontrés à propos de la réalisation par des congruences d'éléments linéaires et voir s'il existe des solutions pour lesquelles le repère $R(u, v)$ est celui d'une congruence de droites. Comme on a toujours $\omega_{31} = 0$, la condition qu'il doit vérifier (cf. n° 65) s'écrit

$$(1) \quad [\omega_1 \omega_2] = [\omega_1 \omega_{32}].$$

En conservant les notations précédentes (n° 66 à 71) on a les divers cas suivants :

1° φ dépend de u et de v (n° 68). — La relation (1) donne alors

$$(2) \quad \xi \eta = p \zeta.$$

Il faut donc que $\frac{\xi\eta}{\zeta}$ soit fonction de φ seulement. Cela suffit, puisqu'on peut prendre p arbitraire pour une congruence d'éléments linéaires V réalisante, et qu'il suffira par suite de prendre

$$(3) \quad p = \frac{\xi\eta}{\zeta}$$

pour que V soit une congruence de droites. Le cône directeur des congruences de droites Γ réalisantes est bien déterminé par (3). Reste pour Γ une fonction arbitraire de φ .

Remarquons que, si l'on pose

$$(4) \quad d\psi = \varphi_1 \omega_1 + \varphi_2 \omega_2,$$

on a

$$(5) \quad \frac{\xi\eta}{\zeta} = \varphi_2.$$

La condition nécessaire et suffisante de possibilité est que φ_2 ne dépende que de φ . Il reste alors une fonction arbitraire de l'argument φ .

2° φ ne dépend que de u . — Les congruences d'éléments linéaires réalisantes ont un cône directeur double. Une congruence de droites à cône directeur double réalise un plan euclidien. Donc le problème est impossible (si $T \neq 0$) pour les espaces E' dont les lignes de torsion sont des droites.

3° φ ne dépend que de v . — Les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites. La condition (1) donne, avec les notations du n° 70,

$$(6) \quad \eta = p(\varphi).$$

D'autre part, on a ici

$$\varphi_2 = \eta,$$

et la conclusion est la même que dans le cas général. On a une fonction arbitraire $H(\varphi)$ et

$$(7) \quad \omega_3 = -d\left[\frac{u}{\varphi_2} + H\right].$$

Cas particulier : espaces dont les trajectoires orthogonales des lignes de torsion sont des droites, et dont la torsion a une grandeur constante. Comme

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = 1 + T\eta,$$

cette hypothèse entraîne

$$\eta = \frac{g(\varphi) e^{\frac{u}{T}} - 1}{T},$$

g étant une fonction donnée arbitraire de φ . D'après (σ), il faut et il suffit, par suite, que $g \equiv 0$ et

$$\eta = \frac{-1}{T} (= \text{const}).$$

En prenant $H \equiv 0$, les composantes de la congruence de *droites* réalisantes ($\rho = \eta$) sont

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_1 &= du, & \omega_{31} &= 0; \\ \omega_2 = \omega_2 &= \frac{-d\varphi}{T}, & \omega_{32} &= \frac{-d\varphi}{T}; \\ \omega_{12} &= d\varphi, & \omega_3 &= T du. \end{aligned}$$

Le foyer F ($= M - \vec{e}_3$) reste fixe quand $du = 0$. Quand $d\varphi = 0$, dF a une direction fixe par rapport au repère, qui a lui-même une direction fixe dans l'espace : F décrit une droite Δ , que les éléments D de la congruence coupent sous un angle constant α défini par

$$\cot \alpha = T.$$

On a la congruence des droites coupant sous un angle constant une droite fixe. De telles congruences ont été étudiées au n° 47.

4° $d\varphi \equiv 0$: *torsion de direction fixe*. — Avec les notations du n° 69, (Γ) devient

$$(8) \quad [du d\sigma] = \eta [du dv],$$

d'où

$$(9) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \eta$$

et

$$(10) \quad \sigma = \int \eta dv + K(u).$$

La réalisation du n° 71 *a* est donc une congruence de *droites* si l'on prend σ vérifiant (10); elle dépend alors de deux fonctions arbitraires d'un argument : la fonction $K(u)$ et la fonction $H(v)$.

Conclusion générale relative aux congruences de droites (1). — 1° *La réalisation est toujours possible quand la torsion a une direction fixe* (deux fonctions arbitraires d'un argument; Σ' en involution).

2° *Si la torsion n'a pas une direction fixe, il faut et il suffit que φ_2 soit une fonction de φ non identiquement nulle* (Σ' non en involution; une fonction arbitraire d'un argument; cône directeur bien déterminé).

Rappelons enfin que le problème n'est jamais possible quand les lignes de torsion sont des droites.

(1) Les principaux résultats de ce n° 76 ont été publiés aux *Comptes rendus* [16 a].

CHAPITRE V.

LES CONNEXIONS PONCTUELLES EUCLIDIENNES A n DIMENSIONS (1).

77. On peut définir par projection orthogonale, comme pour $n = 2$, la connexion intrinsèque d'une variété ponctuelle à n dimensions plongée dans l'espace euclidien à $N (> n)$ dimensions. On obtient ainsi un espace de Riemann (sans torsion) dont le ds^2 est le même que celui de la variété. D'après le théorème de Schlaefli, on peut réaliser ainsi tous les espaces de Riemann, pourvu que $N \geq \frac{n(n+1)}{2}$ (condition suffisante).

Mais les connexions ainsi définies [8] sont toutes dépourvues de torsion. Dans le cas de $n = 2$, les congruences d'éléments linéaires nous ont donné une connexion ponctuelle à torsion généralement non nulle. Pour n quelconque, les variétés à n dimensions d'éléments q -plans plongées dans l'espace E_{n+q} à $n+q$ dimensions sont susceptibles de jouer le même rôle. Nous allons définir, sur une telle variété, une connexion ponctuelle intrinsèque, et montrer que toutes les connexions euclidiennes sont susceptibles d'être ainsi réalisées. Ce sera, à la valeur près de q , une généralisation du théorème de Schlaefli.

I. — Les variétés à n dimensions d'éléments q -plans de E_{n+q} .

78. *Repères euclidiens.* — Tous les repères que nous considérerons seront des repères rectangulaires. Dans l'espace E_p (euclidien à p dimensions), un repère euclidien $R = M\vec{e}_s$ sera formé de p vecteurs \vec{e}_s unitaires et rectangulaires entre eux, et d'origine commune M . Un tel repère est bien défini quand on connaît les $\nu = \frac{p(p+1)}{2}$ paramètres z_1, \dots, z_ν du déplacement $T(z)$ qui amène en R un repère de base R_0 arbitrairement choisi. Les quantités z sont les paramètres ou coordonnées de R , qu'on désignera aussi par $R(z)$.

Soit un repère $R' = R(z + dz) = M'\vec{e}'_s$ infiniment voisin de R . Et soient (1)

$$(1) \quad \begin{cases} M' - M = dM = \omega_s \vec{e}_s \\ \vec{e}'_s - \vec{e}_s = d\vec{e}_s = \omega_{st} \vec{e}_t \end{cases} \quad (s, t = 1, 2, \dots, p; \omega_{st} = -\omega_{ts}).$$

(1) Dans tout ce Chapitre, nous supprimerons le signe somme Σ devant une expression dans laquelle figure deux fois le même indice, c'est-à-dire que par convention, et sauf indication contraire, $a_i b_i$ représentera la somme de toutes les quantités $a_i b_i$ correspondant aux diverses valeurs de i .

Les ω sont un système de composantes relatives de $R(\varepsilon)$. Ce sont des formes de Pfaff de ε et $d\varepsilon$. On peut choisir la représentation paramétrique du groupe des déplacements de façon qu'elles soient *analytiques* par rapport aux ε . Un tel choix sera adopté une fois pour toutes; et les ω seront des formes bien déterminées $\omega(\varepsilon, d\varepsilon)$ ⁽¹⁾.

79. *Éléments q-plans.* — Un élément *q-plan* est l'ensemble d'un point appelé son *centre* et d'un *q-plan* passant par ce point; ce *q-plan* est le *support* de l'élément. La notation (M, Q) représentera l'élément de centre M et de support Q . Inversement, étant donné un élément S , nous représenterons son centre par $M(S)$ et son support par $Q(S)$.

Nous appellerons *plan polaire* de S le *n-plan* $P(S)$ totalement perpendiculaire en $M(S)$ à $Q(S)$, le nombre de dimensions de l'espace étant $n + q$.

Nous dirons encore que la direction de Q est *celle de l'élément*, et que des éléments de supports parallèles sont *des éléments parallèles*.

Enfin, soit α un indice pouvant prendre q valeurs différentes. Si les vecteurs \vec{e}_α sont linéairement indépendants, ils définissent un *q-plan* Q que nous représenterons par $[e_\alpha]$, et la notation $(M, [e_\alpha])$ représentera l'élément (M, Q) .

Les éléments S dépendent de $\mu = n + q + nq$ paramètres, soient y_1, \dots, y_μ .

On peut associer à tout élément S une famille de repères de E_{n+q} , soient $R(S)$, d'origine $M(S)$, et dont les q derniers vecteurs \vec{e}_α sont dans Q . Pour un élément S donné, les $R(S)$ ont pour composantes relatives

$$\omega_i = \omega_\alpha = \omega_{i\alpha} = 0 \quad (\omega_{i\beta} \text{ et } \omega_{\alpha\beta} \text{ arbitraires}).$$

Ils dépendent de $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2}$ paramètres x_1, x_2, \dots, x_l .

80. *Variétés à n dimensions d'éléments S.* — Une telle variété V est décrite par des éléments S dont les paramètres γ dépendent de n variables indépendantes u_1, u_2, \dots, u_n , qu'on peut considérer comme les coordonnées de S dans V .

a. Si l'on attache à tout élément S de V un repère $R(S)$ bien déterminé, les paramètres ε des $R(S)$ ainsi obtenus sont, quand S décrit V , des fonctions des u . Nous dirons que la variété est *analytique*, si, pour un choix convenable des repères $R(S)$, les ε sont des fonctions *analytiques des u*. Les variétés analytiques sont en somme engendrées par les éléments $(M, [e_\alpha])$, quand les paramètres du repère $M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha$ varient en fonction analytique de n variables indépendantes.

⁽¹⁾ Cf. É. CARTAN [14].

Les repères $\vec{M}e_i, \vec{e}_\alpha$ constituent alors une famille analytique \mathcal{F} de repères d'ordre o de V .

b. Variétés ordinaires. — Une variété V sera dite *ordinaire* si $M(S)$ décrit effectivement une variété ponctuelle Σ à n dimensions, à laquelle aucune droite de $Q(S)$ n'est tangente en $M(S)$.

Pour qu'une variété analytique soit ordinaire, il faut et il suffit que sur V

$$(1) \quad [\omega_1 \omega_2 \dots, \omega_n] \neq 0.$$

Cette condition équivaut, en effet, au fait que $\omega_i \vec{e}_i$ n'est jamais nul, quel que soit le choix des du .

Nous ne considérerons désormais que des variétés V ordinaires et analytiques.

c. Variétés orthogonales. — Une variété V sera dite *orthogonale* si ses éléments S sont totalement perpendiculaires en $M(S)$ au lieu Σ des centres. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est visiblement

$$(2) \quad \omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = n+1, \dots, n+q).$$

81. *Repères d'ordre o .* — Étant donnée une famille analytique \mathcal{F} d'ordre o , les autres familles analytiques s'en déduisent par des rotations Θ de paramètres analytiques en u . Ces Θ sont, pour un repère donné, soit les rotations Θ_α autour de P (c'est-à-dire laissant fixes tous les points de P), soit les rotations Θ_i autour de Q .

Les rotations Θ_i ont pour équations

$$(1) \quad \vec{e}_i = a_{ij} \vec{e}_j, \quad \vec{e}'_\alpha = \vec{e}_\alpha \quad (j \leq n),$$

et les Θ_α

$$(2) \quad \vec{e}'_\alpha = b_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta, \quad \vec{e}'_i = \vec{e}_i \quad (\beta > n).$$

Soient ω_s, ω_t les composantes relatives de la famille \mathcal{F} ; $\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_t$ celles d'une famille \mathcal{F}_i s'en déduisant par une rotation Θ_i (a_{ij} = fonctions données des u). Alors : 1° $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha$, $\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}$; 2° $\tilde{\omega}_i$ et $\tilde{\omega}_{ij}$ s'expriment linéairement en $\omega_s, \omega_{ij}, da_{ij}$. Ces expressions linéaires sont visiblement les mêmes que dans une rotation $\bar{\Theta}_i$ d'équations (1) effectuée dans l'espace à n dimensions sur une famille de repères de cet espace ayant pour composantes relatives ω_s, ω_{ij} .

De même pour les Θ_α . En particulier si $\tilde{\omega}_s^*, \tilde{\omega}_t^*$ sont les composantes d'une famille \mathcal{F}_α se déduisant de \mathcal{F} par une rotation Θ_α ($b_{\alpha\beta}$ fonctions des u), on a

$$\tilde{\omega}_s^* = \omega_s, \quad \tilde{\omega}_j^* = \omega_{ij}.$$

82. *Connexion ponctuelle induite sur V .* — Comme au n° 13, nous allons définir une carte ponctuelle infinitésimale et une loi de raccordement.

a. La carte infinitésimale $\gamma(S)$ représentera tout élément S' infiniment voisin de S par la projection orthogonale m' de son centre $M(S')$ dans le plan polaire $P(S)$ de S . Cette correspondance est biunivoque pour une variété ordinaire.

b. Le raccordement se fera par la projection orthogonale de $P(S')$ dans $P(S)$, projection qui, au second ordre près, est un déplacement.

Choisissons dans tout plan $P(S)$ un repère euclidien $\rho(S)$ d'origine $M(S)$: le raccordement de $P(S')$ dans $P(S)$ amènera $\rho(S')$ en $\rho_s(S')$ confondu, au second ordre près, avec la projection de $\rho(S')$ dans $P(S)$.

Le plan polaire est intrinsèquement lié à S ; les opérations géométriques définies en *a* et *b* le sont aussi, et définissent la carte intrinsèque de V .

En assimilant les éléments S' infiniment voisins de S à la projection de leur centre dans le plan polaire de S , on fait ainsi de V un espace ponctuel à connexion euclidienne, soit E'_n . Cet espace admet pour carte la carte intrinsèque de V .

83. *Composantes de la connexion induite.* — Considérons de nouveau la famille \mathcal{F} . Soit $M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha$ le repère de \mathcal{F} attaché à l'élément S ; prenons pour $\rho(S)$ le repère $M\vec{e}_i$, et soit $m'\vec{\varepsilon}_i$ le repère $\rho_s(S')$. Les composantes relatives de la connexion de V sont les quantités ϖ_i, ϖ_{ij} définies par

$$(1) \quad \begin{cases} m' = M + \varpi_i \vec{e}_i \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \varpi_{ij} \vec{e}_j \end{cases} \quad (i, j \leq n).$$

Les équations (76. 1) définissent $\rho(S')$ en fonction des composantes $\omega(u, du)$ de \mathcal{F} :

$$(2) \quad \begin{cases} M' = M + \omega_i \vec{e}_i + \omega_\alpha \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}'_i = \vec{e}_i + \omega_{ij} \vec{e}_j + \omega_{i\alpha} \vec{e}_\alpha \end{cases} \quad (i, j \leq n; \alpha > n).$$

La projection de $\rho(S')$ dans $P(S)$ s'en déduit aisément, et, comme elle doit coïncider au 2^o ordre près avec $m'\vec{\varepsilon}_i$:

$$(3) \quad \begin{cases} m' = M + \omega_i \vec{e}_i, \\ \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \omega_{ij} \vec{e}_j, \end{cases}$$

d'où, par comparaison de (1) et (3), les composantes de la connexion de V

$$(4) \quad \boxed{\varpi_i = \omega_i \quad \varpi_{ij} = \omega_{ij}.}$$

Nous désignerons encore les composantes ω_i, ω_{ij} de \mathcal{F} du nom de *composantes latérales*. D'après la remarque du n^o 81 relative à l'effet des rotations Θ

sur les composantes latérales, on vérifie qu'on obtient bien la même connexion quelle que soit la famille d'ordre o choisie. D'où l'énoncé :

THÉORÈME. — *Les composantes de la connexion de V sont les composantes latérales d'ordre o de V.*

Remarquons que la condition (79.1), qui exprime que la variété V est ordinaire, entraîne celle que doivent vérifier les ϖ pour définir une connexion ponctuelle à n dimensions, à savoir

$$(5) \quad [\varpi_1 \varpi_2 \dots \varpi_n] \neq 0.$$

84. *Courbure et torsion.* — Rappelons que les équations de structure de l'espace euclidien E_p à p dimensions sont

$$[E_p] \quad \begin{cases} \Omega_s \equiv \omega'_s - [\omega_t \omega_{ts}] = 0 \\ \Omega_{st} \equiv \omega'_{st} - [\omega_{tr} \omega_{sr}] = 0 \end{cases} \quad (s, t, r = 1, 2, \dots, p).$$

Les tenseurs de torsion et de courbure de l'espace E' réalisé par V sont définis par

$$[E'_n] \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_i = \varpi'_i - [\varpi_h \varpi_{hi}] = T_{ihk}[\varpi_h \varpi_k] \\ \bar{\Omega}_{ij} = \varpi'_{ij} - [\varpi_{jh} \varpi_{ik}] - R_{ijhk}[\varpi_h \varpi_k] \end{cases} \quad (h, k, i, j = 1, 2, \dots, n)$$

et vérifient par suite, en tenant compte des équations E_{n+q} , et de (83.4),

$$(1) \quad \begin{cases} [\omega_\alpha \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}[\omega_h \omega_k] \\ [\omega_{\alpha j} \omega_{\alpha i}] = R_{ijhk}[\omega_h \omega_k] \end{cases} \quad (i, j, h, k \leq n; \alpha > n).$$

85. La connexion intrinsèque d'une variété ponctuelle Σ est un cas particulier de la précédente : c'est celui où V est la variété *orthogonale* (n° 80 c) admettant Σ comme lieu des centres ⁽¹⁾. Les repères d'ordre o de V sont alors les repères du 1^{er} ordre de Σ .

La condition $\omega_\alpha = 0$ (80.2) entraîne l'absence de torsion (84.1) et aussi le fait que E' et Σ ont même ds^2 . On vérifie bien que la connexion de V est celle de l'espace de Riemann réalisé par Σ . Le théorème de Schlaëfli ⁽²⁾ affirme que tout espace de Riemann est susceptible d'être ainsi réalisé.

86. Il peut se faire que plusieurs variétés V aient la même connexion ponctuelle intrinsèque. Soient V et V^* deux telles variétés : à tout élément S de V correspond un élément S^* de V^* , et les cartes $\gamma(S)$ et $\gamma^*(S^*)$ des deux variétés sont superposables; soit Δ^* un déplacement amenant $\gamma^*(S^*)$ sur $\gamma(S)$: le point représentatif de S^* infiniment voisin de S^* vient alors en

⁽¹⁾ Les opérations géométriques qui nous ont servi à définir la connexion V coïncident alors avec celles qui définissent la connexion intrinsèque de Σ (Cf. É. CARTAN [8]).

⁽²⁾ Cf. [2] et [11].

$m_1^* = m'$, point représentatif de son homologue S' . Si l'on fait subir Δ^* à V^* , elle vient dans une position V_1^* , Q'^* vient en Q_1^* qui passe au 2^e ordre près par $m_1^* = m'$, indépendant de la variété choisie.

Conclusion. — Il existe pour toute V^* réalisant le même espace que V , et pour tout S^* homologue de l'élément S de V un déplacement $\Delta(S^*, V^*)$ tel qu'après ce déplacement, le support de tout élément S'^* voisin de S^* vienne passer par le même point au second ordre près.

II. — Réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes à n dimensions.

87. Nous allons maintenant traiter la réciproque et démontrer la proposition suivante :

THEOREME. — *Tout espace ponctuel à connexion euclidienne à n dimensions est localement réalisable, au voisinage de chacun de ses points, par une variété d'éléments $(n^2 - n)$ -plans plongée dans l'espace euclidien à n^2 dimensions.*

C'est une généralisation du théorème de Schlaëfli, au nombre près de dimensions de l'espace où se fait la réalisation. Nous ne nous préoccupons du nombre minimum de dimensions de cet espace que dans le cas d'une connexion *générique*, où le théorème de Schlaëfli *se généralise exactement* (n° 104). D'autre part nous nous bornerons exclusivement au problème local.

La définition de la connexion induite nous donnera immédiatement un système différentiel auquel doivent satisfaire les variétés V réalisantes dans l'espace à $n + q$ dimensions. Nous montrerons que pour $q = n^2 - n$ ce système est en involution, et pour cela, nous lui appliquerons la méthode employée par M. É. Cartan dans sa démonstration au théorème de Schlaëfli. Nous montrerons ensuite qu'il suffit en général de prendre $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

88. Se donner une connexion (E'_n) c'est se donner, en fonction de n variables u_1, u_2, \dots, u_n , les composantes relatives $\varpi_i, \varpi_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ de la connexion, c'est-à-dire des formes de Pfaff $\varpi(u, du)$ que l'on peut d'ailleurs choisir de façon tout à fait arbitraire pourvu que

$$(1) \quad , [\varpi_1 \varpi_2 \dots \varpi_n] \neq 0.$$

Nous les supposons *analytiques*, c'est-à-dire que leurs coefficients seront des fonctions analytiques des u .

Elles peuvent être considérées comme les composantes relatives d'une famille de repères cartésiens \bar{R} attachés à (E'_n) . On peut sans changer E'_n les remplacer par les composantes $\varpi_i^*, \varpi_{ij}^*$ des repères \bar{R}^* qui se déduisent des \bar{R} par des rotations $\Theta(u)$ arbitraires autour de l'origine [14].

89. Réaliser localement (E'_n) par une variété V , c'est associer à tout point (u) d'un certain voisinage E'_n de l'espace (E'_n) donné, un élément q -plan $S(u)$ tel qu'une famille de repères d'ordre zéro, soit $R(u)$, de la variété engendrée par les $S(u)$, ait pour composantes latérales

$$(I) \quad \omega_i = \varpi_i, \quad \omega_{ij} = \varpi_{ij} \quad (\text{cf. } 83.4).$$

La condition (88.1) entraîne alors

$$[\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n] \neq 0 \quad (\text{cf. } 80.1),$$

et la variété V est ordinaire.

Réaliser E'_n par V , c'est en somme associer à tout point (u) de E'_n un repère R de E_{n+q} ; or, R est défini dans E_{n+q} par les paramètres z du déplacement qui amène en R un repère de base R_0 arbitrairement choisi (cf. n° 76). Le problème se ramène donc à déterminer les z en fonction des u . Or les composantes ω de R ont des expressions bien déterminées en z (cf. n° 76) et en les portant dans (I) on obtient un système différentiel

$$\sigma(z, u) \equiv \sigma[\omega(z, dz); \varpi(u, du)]$$

aux fonctions inconnues z des n variables indépendantes u . Toute solution de ce système fournit une réalisation locale de (E'_n) .

90. Les ϖ qui figurent dans σ correspondent à un choix \bar{R} des repères de E'_n . A tout autre choix \bar{R}^* de ces repères correspondent des composantes ϖ^* et un système

$$(1) \quad \sigma^* \equiv \sigma[\omega, \varpi^*]$$

géométriquement équivalent à $\sigma(\omega, \varpi)$ en ce sens que toute variété V vérifiant l'un vérifie l'autre.

De façon plus précise, soit Θ_i la rotation (fonction des u) qui fait passer de \bar{R} à \bar{R}^* ; soit $M \vec{e}_i \vec{e}_\alpha = R(z)$ un repère quelconque de E_{n+q} . Nous réserverons désormais les lettres grecques aux indices supérieurs à n et les minuscules latines i, j, \dots , aux autres indices. Faisons subir aux vecteurs \vec{e}_i dans leur n -plan la rotation Θ_i . On obtient un repère $R(z^*)$ et soit

$$(2) \quad z^* = \Theta_i(z)$$

la transformation qui fait passer des z aux z^* .

Les relations entre les $\omega_i(z^*)$, $\omega_{ij}(z^*)$ et les $\omega_i(z)$, $\omega_{ij}(z)$ sont, d'après le n° 81, les mêmes qu'entre ϖ_i , ϖ_{ij} et ϖ_i^* , ϖ_{ij}^* . Le système transformé de σ par Θ_i est par suite

$$(3) \quad \sigma^*(z^*) \equiv \sigma[\omega(z^*), \varpi^*].$$

Si les z vérifient $\sigma(z)$, les z^* vérifient $\sigma^*(z^*)$, donc sont solutions de $\sigma^*(z)$ et les familles $R(u)$ et $R^*(u)$ sont attachées à la même variété V . Nous retrouvons

ainsi l'équivalence géométrique de σ et σ^* , mais ce qui importe pour la suite c'est la forme du transformé de σ par Θ_i .

91. Soit $\Sigma(\omega, \varpi)$, le système obtenu en adjoignant aux équations de σ celles qui s'en déduisent par dérivation extérieure. Σ est un système fermé à N fonctions inconnues z des n variables indépendantes u ⁽¹⁾.

Les notions d'égalités superflues, d'élément générique et d'élément intégral à p dimensions de Σ ont été rappelées au n° 55. On a pour Σ la condition suivante d'involution.

Condition A, nécessaire et suffisante pour que Σ soit en involution. — Pour $p \leq n - 1$, il passe, par l'élément intégral générique I_p à p dimensions de Σ , un élément intégral à $p + 1$ dimensions.

Comme dans le cas de $n = 2$, nous allons en déduire une condition plus maniable : cela reviendra en somme à donner une forme réduite simple à l'élément I_p générique ⁽²⁾.

92. Considérons les u et les z comme les coordonnées d'un point d'un espace auxiliaire à $n + N$ dimensions. Un élément intégral à p dimensions sera défini par p éléments linéaires indépendants (de même centre et en involution deux à deux). Un élément linéaire sera défini par les coordonnées (u, z) de son centre et les paramètres directeurs du, dz de sa direction. On prendra comme paramètres directeurs, au lieu de du, dz , les quantités $\varpi_i (i \leq n)$ et ω qui sont les premières indépendantes en du , les dernières indépendantes en dz et indépendantes des du .

93. *Effet des rotations Θ_i sur les éléments intégraux de Σ . — D'après le n° 90, le transformé par Θ_i de $\sigma(\omega, \varpi)$ est $\sigma(\omega, \varpi^*)$, c'est-à-dire le système σ correspondant au choix des repères \bar{R}^* déduits de \bar{R} par la rotation Θ_i . Cette propriété reste vraie pour les systèmes fermés correspondants Σ, Σ^* .*

a. Tout élément intégral I_p de Σ est transformé par Θ_i en un élément intégral I_p^ de Σ . En effet soit $\bar{\Sigma}$ le système Σ dans lequel on ne distinguerait plus les u comme variables indépendantes. I_p^* est visiblement intégral pour $\bar{\Sigma}^*$. D'autre part, Θ_i ne modifie pas les $u : I_p$ introduisant exactement $n - p$ relations entre les du , il en est de même de I_p^* . C. Q. F. D.*

b. Il en est de même du passage par Θ_i^{-1} de Σ^ à Σ . Par suite, étant donné un élément I_p , si pour Σ^* il passe par I_p^* un I_{p+1}^* , il en résulte que, pour Σ , il passe par I_p un I_{p+1} , et réciproquement.*

⁽¹⁾ $N = \frac{(n+q)(n+q+1)}{2}$.

⁽²⁾ Cf. É. CARTAN [11].

c. Étant donné un élément I_p , on peut donc, pour voir s'il passe par lui un I_{p+1} , opérer sur l'élément I_p^* qui correspond à I_p dans un Σ^* quelconque, c'est-à-dire dans un autre choix des repères de E'_n .

Considérons les n premières coordonnées $u_i (i \leq n)$ du centre de I_p et les n premiers paramètres directeurs ϖ_i d'un quelconque de ses éléments linéaires ε . Soit \bar{M} le point de E'_n de coordonnées u_i et $\bar{M}\bar{e}_i$ le repère \bar{R} correspondant. Quand ε varie dans I_p , les ϖ_i sont liés exactement par $n - p$ relations, et les points $\bar{M}_i + \varpi_i \bar{e}_i$ décrivent un p -plan (e_p) de l'espace du repère \bar{R} . Soit \bar{R}^* un repère dont les p premiers vecteurs soient dans (e_p). Il se déduit de \bar{R} par une certaine rotation Θ_i et l'on a

$$\varpi_{p+1}^* = \varpi_{p+2}^* = \dots = \varpi_n^* = 0.$$

Au lieu d'opérer sur I_p nous opérerons sur I_p^* correspondant à I_p dans le choix des repères \bar{R}^* .

d. Nous désignerons par ε_i un élément linéaire intégral dont les n premiers paramètres directeurs vérifient

$$(\varepsilon_i) \quad \varpi_i \neq 0, \quad \varpi_j = 0 \quad (j \leq n, j \neq i)$$

et nous dirons qu'un élément intégral à p dimensions est un élément I_p^0 s'il est formé de p éléments ε_i avec $i \leq p$ (deux à deux en involution). Un tel élément I_p^0 est intégral pour $\bar{\Sigma}$, et, comme il introduit exactement $n - p$ relations entre les du (à savoir $\varpi_{p+1} = \varpi_{p+2} = \dots = \varpi_n = 0$), il est intégral pour Σ .

D'après (c), étant donné un élément I_p , il existe un système Σ^* dans lequel l'élément I_p^* transformé de I_p est de la forme I_p^0 (1).

94. Nous pouvons maintenant établir les conditions suivantes d'involution, dont il nous suffira d'utiliser le caractère suffisant :

Conditions B (suffisantes pour que Σ soit en involution). — a. Par le point intégral générique passe un élément linéaire intégral. b. Pour le repère générique de E'_n et l'élément I_p^0 générique, où $p \leq n - 1$, il existe un élément ε_{p+1} en involution avec I_p^0 .

1° La condition (B, a) n'est autre que la condition A relative au point intégral.

2° Si les conditions (B, b) sont vérifiées, les conditions A relatives aux éléments I_p à $p \geq 1$ dimensions sont vérifiées.

Soit en effet un élément I_p intégral de Σ . Il lui correspond, dans un certain système Σ^* relatif à des repères \bar{R}^* , un élément I_p^* de la forme I_p^0 (93 d).

(1) Il existe même une infinité de Σ^* , du moins pour $p \leq n - 2$. En effet la rotation Θ_i de (c) n'est pas complètement déterminée : Θ_p étant une rotation conservant (e_p), on peut remplacer Θ_i par $\Theta_p \Theta_i$.

Si B est vérifiée, ou bien il passe par I_p^* un élément I_{p+1}^* , donc par I_p un I_{p+1} , ou bien on a l'une ou l'autre des circonstances suivantes :

α . \bar{R}^* n'est pas générique, c'est-à-dire vérifie une condition d'égalité.

β . \bar{R}^* ne vérifie aucune égalité, mais I_p^* est un I_p^0 vérifiant une condition particulière d'égalité.

La circonstance (α) entraîne que I_p est un élément intégral de Σ pour lequel les ϖ_i sont liés par une certaine relation d'égalité qui n'est pas nécessaire pour que I_p soit intégral : I_p n'est pas générique.

La circonstance (β) entraîne que I_p^* vérifie une égalité superflue, et l'existence d'une telle égalité est conservée par Θ_i^{-1} : I_p n'est pas générique.

En définitive, si B est vérifiée, ou bien il passe par I_p un I_{p-1} , ou bien I_p n'est pas générique, et ceci pour $p \leq n - 1$: A est vérifiée. C. Q. F. D.

95. *Définition analytique des ε_i .* — Les paramètres directeurs d'un élément linéaire étant définis à un facteur près, nous prendrons comme paramètres directeurs d'un élément ε_i les quantités suivantes :

$$(\varepsilon_i) \quad \varpi_i = \omega_i = 1, \quad \varpi_j = \omega_j = 0 \quad (j \neq i, j \leq n); \quad \omega_s = a_{si} \quad (s = \alpha, \alpha i, \alpha \beta).$$

Nous considérerons (*cf.* É. Cartan [11]) les $a_{\alpha h}$, $a_{\alpha i h}$ comme les composantes de vecteurs \vec{a}_h , \vec{a}_{ih} par rapport à q vecteurs unitaires rectangulaires \vec{u}_α d'un espace euclidien auxiliaire à q dimensions :

$$(1) \quad \vec{a}_h = a_{\alpha h} \vec{u}_\alpha; \quad \vec{a}_{ih} = a_{\alpha i h} \vec{u}_\alpha.$$

96. *Expression analytique de la condition B.* — 1° Remarquons d'abord que la condition (B, a) est vérifiée. En effet, tout point (u, z) est intégral; le point de coordonnées u reste par hypothèse dans un domaine E'_n où $[\varpi_1, \dots, \varpi_n] \neq 0$. D'après la forme de σ , on peut donc prendre arbitrairement les ϖ , c'est-à-dire les du , pour un élément linéaire intégral passant par (u, z) : d'où l'existence d'éléments introduisant $n - 1$ relations entre les du . C. Q. F. D.

2° *Condition (B, b).* — Les équations de fermeture de Σ sont (*cf.* n° 84)

$$(1) \quad \begin{cases} (1) & [\omega_\alpha \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}[\omega_h \omega_k], \\ (2) & [\omega_{\alpha j} \omega_{\alpha i}] = R_{ijhk}[\omega_h \omega_k]. \end{cases}$$

On cherche un ε_{p+1} en involution avec p éléments $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ donnés. C'est-à-dire qu'on se donne les $\vec{a}_h, \vec{a}_{ih}, a_{\alpha \beta h}$ pour $h \leq p$ et qu'on cherche les vecteurs $\vec{a}_{p+1}, \vec{a}_{i(p+1)}$, et les $a_{\alpha \beta(p+1)}$ qui définissent ε_{p+1} .

Les équations du premier degré σ laissent ces quantités arbitraires pour ε_{p+1} . Seules, les équations (1) et (2) leur imposent des conditions. Elles équivalent

aux relations suivantes, où interviennent des produits scalaires de vecteurs :

$$(U_p) \quad \begin{cases} (3) & \overrightarrow{a_h} \overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}} - \overrightarrow{a_{p+1}} \overrightarrow{a_{ih}} = T_{ih\overline{p+1}} [i, h] \\ (4) & \overrightarrow{a_{jh}} \overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}} - \overrightarrow{a_{j\overline{p+1}}} \overrightarrow{a_{ih}} = R_{ijh\overline{p+1}} [ij, h] \end{cases} \quad (h \leq p; i, j \leq n).$$

Remarquons que les $a_{\alpha\beta\overline{p+1}}$ restent *arbitraires*. On a un système (U_p) aux vecteurs inconnus $\overrightarrow{a_{p+1}}, \overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$ ($i \leq n$), les autres vecteurs étant donnés.

97. *Étude du système U_p .* — PROPRIÉTÉ I. — *Le système U_p est compatible si les np vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}$ sont linéairement indépendants* (condition suffisante). En effet :

1° Choisissons arbitrairement $\overrightarrow{a_{1\overline{p+1}}}$. Les équations $[12, h]$ de $(U_p, 4)$ définissent alors les projections de $\overrightarrow{a_{2\overline{p+1}}}$ sur les p vecteurs $\overrightarrow{a_{1h}}$. Ces vecteurs sont indépendants par hypothèse. Donc les $[12, h]$ sont compatibles : prenons pour $\overrightarrow{a_{2\overline{p+1}}}$ un vecteur quelconque vérifiant les $[12, h]$.

2° Les vecteurs $\overrightarrow{a_{1\overline{p+1}}}, \overrightarrow{a_{2\overline{p+1}}}$ étant ainsi choisis, les équations $[13, h]$ et $[23, h]$ définissent les projections de $\overrightarrow{a_{3\overline{p+1}}}$ sur les $\overrightarrow{a_{1h}}, \overrightarrow{a_{2h}}$, et sont compatibles puisque ces $2p$ derniers vecteurs sont indépendants. D'où $\overrightarrow{a_{3\overline{p+1}}}$ avec un certain degré d'arbitraire.

3° On continuera ainsi de proche en proche. Les $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$ étant supposés choisis pour $i \leq m$, les équations $[i, \overline{m+1}, \overline{p+1}]$ pour $i \leq m$ définissent les projections de $\overrightarrow{a_{\overline{m+1}\overline{p+1}}}$ sur les $\overrightarrow{a_{ih}}$ et sont compatibles par suite de l'indépendance des $\overrightarrow{a_{ih}}$. D'où $\overrightarrow{a_{\overline{m+1}\overline{p+1}}}$.

4° En opérant ainsi pour toutes les valeurs de $m \leq n-1$, on épuise les équations $[ij, h]$. En effet, toutes les $[ij, h]$ pour lesquelles $i < j$ sont alors vérifiées, et d'autre part les équations $[ji, h]$ et $[ij, h]$ sont identiques et les $[ii, h]$ s'évanouissent.

5° Restent les équations $(U_p, 3)$. Elles donnent alors les projections du vecteur $\overrightarrow{a_{p+1}}$ sur les np vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}$ et sont compatibles (indépendance des $\overrightarrow{a_{ih}}$). D'où $\overrightarrow{a_{p+1}}$ (avec un certain degré d'arbitraire si $q > np$). Toutes les équations de U_p sont alors vérifiées. C. Q. F. D.

PROPRIÉTÉ II. — *Si les $\overrightarrow{a_{ih}}$ sont indépendants et si le nombre q des dimensions de l'espace des u_α vérifie*

$$(2) \quad q \geq n(p+1),$$

on peut prendre les vecteurs $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$ indépendants entre eux et indépendants des $\overrightarrow{a_{ih}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{a_{i, p+1}}$ est arbitraire : on peut le prendre extérieur au np -plan des $\overrightarrow{a_{ih}}$ puisque $np < q$. Supposons la propriété vraie pour $i \leq m$, et les vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}, \overrightarrow{a_{i, p+1}}, \dots, \overrightarrow{a_{m, p+1}}$ indépendants; ils forment un hyperplan (e) à $np + m$ dimensions. Le vecteur $\overrightarrow{a_{m+1, p+1}}$ est assujéti seulement à avoir une projection donnée sur certains vecteurs de (e) , et peut donc être pris extérieur à (e) tant que (e) ne remplit pas tout l'espace des u_x ; ce qui a lieu pour $m \leq n - 1$, car alors $np + m < q$, et la propriété s'étend jusqu'à $m + 1 = n$.

C. Q. F. D.

98. *Application à la condition B.* — Elle est vérifiée si tous les systèmes U_p sont compatibles pour $p \leq n - 1$. Pour pouvoir appliquer la condition suffisante (97. I), il faut que les $n(n - 1)$ vecteurs de I_{n-1}^0 puissent être indépendants, c'est-à-dire que

$$q \geq n(n - 1).$$

1° LEMME. — Si $q = n(n - 1)$ l'élément I_p^0 générique a , pour $p \leq n - 1$, ses vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}$ linéairement indépendants.

a. La propriété est vraie pour l'élément I_1^0 générique, puisqu'en un point (u, z) les $\overrightarrow{a_{i1}}$ ($h = 1$) sont arbitraires.

b. Supposons-la vraie pour l'élément I_p^0 générique, et considérons l'élément I_{p+1}^0 générique. L'élément I_p^0 qu'il contient est lui-même générique (sinon il entraînerait une égalité superflue pour I_{p+1}^0), et, d'après notre hypothèse de récurrence, il a ses vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}$ ($h \leq p$) indépendants. Par suite, d'après (97. II), qui est vraie tant que p vérifie (97. 2), les vecteurs $\overrightarrow{a_{ih}}, \overrightarrow{a_{i, p+1}}$ des I_{p+1}^0 passant par lui peuvent être pris indépendants; toute relation entre ces vecteurs constituerait pour I_{p+1}^0 une égalité superflue; donc, pour l' I_{p+1}^0 générique, la propriété est encore vraie.

c. La récurrence précédente démontre le lemme pour l'élément I_{p+1}^0 tant que p vérifie (97. 2), c'est-à-dire pour $p \leq n - 2$, soit $p + 1 \leq n - 1$.

C. Q. F. D.

2° *Conclusion.* — Il résulte du lemme et de (97. I) que la condition B est vérifiée. Le système Σ est en involution, à la condition suffisante que $q = n(n - 1)$, d'où le théorème de réalisation que nous avons en vue (n° 87).

Remarquons qu'aucune restriction à l'existence d' I_{p+1} passant par un I_p donné n'est introduite par le choix des u du centre de I_p (1). On peut donc affirmer l'existence d'une réalisation au voisinage de tout point du domaine E'_n considéré.

(1) Il n'en était pas ainsi pour $n = 2, q = 1$ (Chap. IV).

Remarquons aussi qu'aucune restriction n'est introduite par le choix des repères de E'_n .

99. *Degré d'arbitraire de la solution générale.* — D'après la théorie des systèmes en involution [17], l'intégrale générale de Σ dépend d'autant de fonctions arbitraires des u , qu'il y a de paramètres arbitraires pour les éléments intégraux à n dimensions passant par l'élément intégral générique à $n - 1$ dimensions.

Ce nombre est celui des I_n passant par l'élément I_{n-1}^0 générique. Or tout I_n passant par I_{n-1}^0 est de la forme I_n^0 (1). Le nombre des I_n^0 passant par I_{n-1}^0 se déduit aisément des opérations du n° 97 :

a. Le vecteur \vec{a}_{1n} est arbitraire : cela donne q paramètres arbitraires.

Le vecteur \vec{a}_{pn} ($2 \leq p \leq n$) est donné par ses projections sur les vecteurs \vec{a}_{ih} où $i \leq p - 1$, $h \leq n - 1$, qui sont au nombre de $(n - 1)(p - 1)$, d'où, pour \vec{a}_{pn} ,

$$q - (p - 1)(n - 1) = (n - 1)(n - p + 1) \text{ paramètres arbitraires.}$$

Les vecteurs \vec{a}_n dépendent donc de ν paramètres arbitraires, avec

$$\nu = \sum_{p=1}^{p=n} (n - 1)(n - p + 1) = (n - 1) \sum_{p'=1}^{p'=n} p' = \frac{n(n^2 - 1)}{2}.$$

b. Le vecteur \vec{a}_n est donné par ses projections sur les $n(n - 1)$ vecteurs \vec{a}_{ih} , où $i \leq n$, $h \leq n - 1$. Il est bien déterminé.

c. Les $a_{\alpha\beta n}$ sont tous arbitraires, et sont au nombre de $\nu_1 = \frac{q(q - 1)}{2}$.

Conclusions. — 1° Les fonctions z constituant l'intégrale générale dépendent de $\nu + \nu_1$ fonctions arbitraires des u .

2° Mais les variétés V correspondant à des solutions distinctes en z ne sont pas toutes distinctes : à une même variété V correspondent une infinité de solutions en z provenant des rotations Θ_α du repère $R(z)$ (cf. n° 81). Ces rotations dépendent de

$$\nu_1 = \frac{q(q - 1)}{2} \text{ paramètres.}$$

et les solutions en z attachées à une même variété V dépendent de ν_1 fonctions arbitraires des u . Il en résulte la proposition suivante :

(1) Il n'en est pas de même, pour $p \leq n - 2$, des I_{p+1} passant par I_p^0 .

Les variétés réalisantes dépendent de

$$\nu = \frac{n(n^2 - 1)}{2},$$

fonctions arbitraires des u .

100. *Classe des espaces à connexion euclidienne.* — On peut étendre aux espaces à torsion la définition de la classe des espaces de Riemann (*cf.* [3] et [9]); ce sera *le plus petit entier r* tel que l'espace donné E'_n soit réalisable par une variété d'éléments r -plans plongée dans l'espace euclidien à $n+r$ dimensions ⁽¹⁾.

D'après ce qui précède, la classe ne saurait dépasser $n(n-1)$. D'autre part, si l'on désigne par X et Y_q le nombre de fonctions arbitraires des u dont dépendent respectivement un espace E'_n et une variété à n dimensions d'éléments q -plans ⁽²⁾, on trouve que

$$Y_q \geq X \quad \text{entraîne} \quad q \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ainsi, *dans le cas général*, la classe est au moins égale à $\frac{n(n-1)}{2}$, mais pourrait

⁽¹⁾ Indiquons rapidement ici une généralisation aux espaces à torsion des conditions de Ricci [3] pour qu'un espace de Riemann soit de classe 1. Des conditions nécessaires s'obtiennent en étudiant les variétés V'_{n-1} à $n-1$ dimensions d'éléments linéaires de l'espace à n dimensions. Ainsi, pour une V'_{n-1} à courbure et torsion non nulles, dans le cas général où il n'existe pas de λ_i tels que

$$(1) \quad \lambda_i R_{ijhk} = 0,$$

on peut mettre les composantes relatives sous la forme

$$\omega_{ni} = \gamma_{ih} \omega_h, \quad \omega_n = a_h \omega_{nh},$$

et on trouve les conditions suivantes qui généralisent celles de Ricci (*cf.* [9]).

1° La courbure et la torsion sont de la forme

$$(2) \quad R_{ijhk} = \gamma_{jh} \gamma_{ik} - \gamma_{jk} \gamma_{ih},$$

$$(3) \quad T_{ihk} = a_j R_{ijhk}.$$

2° Les dérivées absolues des γ et des a vérifient

$$(4) \quad \gamma_{ih,k} - \gamma_{ik,h} = T_{jkh} \gamma_{ij},$$

$$(5) \quad a_{k,h} - a_{h,k} = \gamma_{hk} - \gamma_{kh}.$$

Ces conditions sont suffisantes parce que les composantes relatives (de la V'_{n-1}) obtenues à partir de γ et de a vérifient alors les équations de structure de l'espace euclidien. La réalisation est unique si les γ et les a sont définis de façon unique par (2) et (3).

Les espaces à parallélisme absolu donnent lieu à une étude analogue [où n'interviennent d'ailleurs plus que des équations linéaires, et non quadratiques comme (2)]. D'autre part au point de vue géométrique, la connexion induite sur une V'_{n-1} donne lieu à certaines remarques simples. En particulier, les V'_{n-1} à parallélisme absolu ont un cône directeur et, pour tout cycle élémentaire d'origine S , le vecteur de torsion est parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice parallèle à S ; sa direction ne dépend pas du cycle choisi.

⁽²⁾ On peut remarquer au passage que $Y_{n(n-1)} - X = \nu$.

peut-être ne pas dépasser cette valeur; le théorème suivant va montrer qu'elle ne la dépasse effectivement pas. Il s'applique *aux espaces génériques*, c'est-à-dire aux espaces où la courbure et la torsion ne vérifient aucune condition particulière d'égalité (rappelons qu'il en est ainsi en général pour les connexions euclidiennes à courbure *et torsion*, les identités de Bianchi faisant intervenir les dérivées covariantes).

101. THÉORÈME. — *Tout espace ponctuel générique à connexion euclidienne à n dimensions est localement réalisable par une variété d'éléments $\frac{n(n-1)}{2}$ plans plongée dans l'espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.*

Il s'agit en somme de montrer que si $q = \frac{n(n-1)}{2}$ le système U_p générique du n° 96 est compatible pour $p \leq n-1$. Nous écrivons ici ce système en faisant intervenir les composantes des vecteurs \vec{a} . Nous allons d'abord établir un lemme relatif à des formes linéaires étroitement liées aux premiers membres de U_{n-1} .

102. LEMME 1. — *Le déterminant des $\frac{n(n^2-1)}{2}$ formes linéaires [aux $\frac{n(n^2-1)}{2}$ variables $x_\alpha, x_{\alpha i}$]*

$$\begin{cases} X_{hi} = a_{\alpha h} x_{\alpha i} - a_{\alpha ih} x_\alpha, \\ X_{hij} = a_{\alpha ih} x_{\alpha j} - a_{\alpha jh} x_{\alpha i}, \end{cases} \quad \text{où } h \leq n-1; i, j \leq n; n < \alpha \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

n'est pas identiquement nul par rapport aux a .

Considérons $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs rectangulaires \vec{u}_α de l'espace euclidien à $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensions, et posons

$$a_{\alpha h} \vec{u}_\alpha = \vec{a}^h, \quad a_{\alpha ih} \vec{u}_\alpha = \vec{a}_i^h, \quad x_{\alpha i} \vec{u}_\alpha = \vec{x}_i, \quad x_\alpha \vec{u}_\alpha = \vec{x}.$$

Les formes X font intervenir des produits scalaires des \vec{x} et des \vec{a} ; le lemme revient à affirmer qu'il existe des vecteurs \vec{a} tels que le système

$$(A) \quad \begin{cases} (A_{ih}) & \vec{a}^h x_i = \vec{a}_i^h x \\ (A_{ijh}) & \vec{a}_i^h x_j = \vec{a}_j^h x_i \\ (A_{nh}) & \vec{a}^h x_n = \vec{a}_n^h x \\ (A_{nih}) & \vec{a}_i^h x_n = \vec{a}_n^h x_i \end{cases} \quad (i, j, h \leq n-1)$$

ait pour unique solution $\vec{x} = \vec{x}_i = \vec{x}_n = 0$. Nous allons d'abord définir certaines conditions destinées à être imposées aux \vec{a} , conditions dont l'utilité se révélera par la suite. Puis, nous montrerons qu'il existe des vecteurs \vec{a} vérifiant ces conditions, et qu'enfin ces conditions, jointes au système (A), entraînent $\vec{x} = \vec{x}_i = \vec{x}_n = 0$. Le lemme sera bien alors démontré.

Pour cette démonstration, nous abandonnerons la convention relative à la suppression du signe \sum de sommation (la somme des termes $a_i b_i$ ne sera plus représentée par $a_i b_i$ mais par $\sum a_i b_i$). D'autre part, nous ne ferons varier les indices i, j, h que jusqu'à $n - 1$ (inclus), l'indice n jouant dans la suite un rôle particulier. Ces dispositions ne sont adoptées que pour le présent n° 102.

1° Conditions (a) à imposer aux \vec{a} . — 1° Les $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs \vec{a}_i^h où $h \leq i \leq n - 1$ sont indépendants. On les désignera aussi par \vec{A}_α .

2° Les \vec{a}_i^j vérifieront

$$(1) \quad \vec{a}_i^j = \lambda(i, j) \vec{a}_j^i,$$

avec

$$(2) \quad \lambda(i, j) \lambda(j, i) = 1,$$

les λ vérifiant d'autre part les inégalités

$$(1') \quad \lambda(i, j) \lambda(j, h) \lambda(h, i) \neq 1 \quad \text{pour } i \neq j \neq h \neq i.$$

3° Les \vec{a}^h et \vec{a}_n^h seront liés par

$$(3) \quad \vec{a}_n^h = \lambda(h) \vec{a}^h$$

avec

$$(3') \quad \lambda(h) \neq \lambda(k) \neq 0 \quad \text{pour } h \neq k.$$

4° Enfin, on aura

$$(4) \quad \vec{a}^h = \sum_i \beta_i^h \vec{a}_i^h$$

et, si l'on désigne par $\|\beta_i^h\|$ le déterminant des β_i^h , et que l'on pose

$$(5) \quad \gamma_i^h = \beta_i^h [\lambda(h) - \lambda(i)].$$

les β_i^h devront vérifier les inégalités

$$(4') \quad \|\beta_i^h\| \neq 0,$$

$$(5') \quad \|\gamma_i^h\| \neq 0.$$

b. Possibilité d'un tel choix des \vec{a} . — On peut d'abord choisir pour les \vec{a}_i^h où $h \leq i \leq n-1$, $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs indépendants arbitraires, soient \vec{A}_x . Les autres vecteurs \vec{a} sont alors définis par le choix des λ et des β .

On prendra successivement, pour $i=1, 2, \dots, n-2$ et $j > i$, des nombres $\lambda(i, j) \neq 0$ arbitraires, d'où, par (2), les $\lambda(j, i)$, tout $\lambda(i, j)$ devant toutefois différer des produits $\lambda(i, h)\lambda(h, j)$ résultant des λ précédemment définis ($h < i$). De la sorte, les $\lambda(i, j)$ vérifient (1'); et les relations (1) donnent alors les vecteurs \vec{a}_h^i , où $h < i$.

On peut ensuite choisir arbitrairement les $\lambda(h) \neq 0$ vérifiant (3'); le déterminant $\|\beta_i^h\|$ n'est pas identiquement nul, par rapport aux β_i^h , non plus que $\|\gamma_i^h\|$ si du moins $n \geq 3$. Car $\|\gamma_i^h\|$ a sa diagonale principale formée de zéros, mais tous ses autres éléments peuvent prendre des valeurs arbitraires (1). Donc $\|\beta_i^h\| \|\gamma_i^h\| \neq 0$, et l'on peut choisir les β_i^h de façon que ce produit ne soit pas nul, donc que (4') et (5') soient vérifiés.

Un tel choix des β donne les vecteurs \vec{a}^h , et les $\lambda(h)$ donnent alors les a_n^h . Toutes les conditions (a) sont bien vérifiées par les vecteurs \vec{a} ainsi définis.

c. Le système (A) et les conditions (a) entraînent $\vec{x} = \vec{x}_i = \vec{x}_n = 0$. — En effet :

1° Les $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ équations (A_{ijh}) , où $i \neq j \neq h \neq i$, entraînent la relation

$$(6) \quad \vec{a}_j^h \vec{x}_i = 0.$$

Car, d'après ces équations et les relations (1), on a

$$\vec{a}_j^h \vec{x}_i = \vec{a}_i^h \vec{x}_j = \lambda(i, h) \vec{a}_h^i \vec{x}_j = \lambda(i, h) \vec{a}_j^h \vec{x}_h = \lambda(i, h) \lambda(j, i) \vec{a}_i^h \vec{x}_h = \lambda(i, h) \lambda(j, i) \vec{a}_h^i \vec{x}_i$$

et finalement

$$\vec{a}_j^h \vec{x}_i = \lambda(i, h) \lambda(j, i) \lambda(h, j) \vec{a}_j^h \vec{x}_i.$$

ce qui, en tenant compte de (1'), donne bien (6).

(1) $\gamma_i^h = (\gamma_i^h)_0$ donne, d'après (5), $\beta_i^h = \frac{(\gamma_i^h)_0}{\lambda(h) - \gamma(i)}$, les λ étant les valeurs qui viennent d'être choisies. Pour $n \geq 3$, il existe des termes γ_i^h , où $h \neq i$. Pour $n = 2$, le déterminant se réduit à $\gamma_1^1 = 0$.

2° En opérant d'une manière analogue sur les équations (A_{ih}) et (A_{nih}) , on trouve (1), d'après (1), (3) et (3') et pour $i \neq h$,

$$(7) \quad \vec{a}_i^h \vec{x}_n = 0,$$

$$(8) \quad \vec{a}_i^h \vec{x} = 0,$$

$$(9) \quad \vec{a}^h \vec{x}_i = 0.$$

3° Les équations (A_{nh}) , (A_{nii}) et (A_{ii}) entraînent, d'après (3), (4) et (5'),

$$(10) \quad \vec{a}^i \vec{x}_i = 0,$$

$$(11) \quad \vec{a}_i^i \vec{x}_n = 0,$$

$$(12) \quad \vec{a}_i^i \vec{x} = 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} \vec{a}_n^i \vec{x} &= \lambda(i) \vec{a}^i \vec{x} = \sum_j \lambda(i) \beta_j^i \vec{a}_j^i \vec{x} = \sum_j \lambda(i) \beta_j^i \vec{a}^j \vec{x}_j, \\ \vec{a}^i \vec{x}_n &= \sum_j \beta_j^i \vec{a}_j^i \vec{x}_n = \sum_j \beta_j^i \vec{a}_n^i \vec{x}_j = \sum_j \lambda(j) \beta_j^i \vec{a}^j \vec{x}_j \end{aligned}$$

et les (A_{ni}) deviennent alors

$$\sum_i \beta_j^i [\lambda(j) - \lambda(i)] \vec{a}^i \vec{x}_j = \sum_j \gamma_j^i \vec{a}^j \vec{x}_j = 0.$$

D'où, d'après $\|\gamma_j^i\| \neq 0$, les relations (10), qui, par une seconde application des (A_{nii}) et (A_{ii}) , donnent (11) et (12).

4° Les relations (9) et (10) entraînent, d'après (4),

$$\sum_i \beta^h \vec{a}_j^i \vec{x}_i = 0,$$

c'est-à-dire, pour chaque vecteur \vec{x}_i , $(n-1)$ équations homogènes aux $(n-1)$

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a}_i^h \vec{x}_n &= \vec{a}_n^h \vec{x}_i = \lambda(h) \vec{a}^h \vec{x}_i = \lambda(h) \vec{a}_i^h \vec{x} = \lambda(h) \lambda(i, h) \vec{a}_i^h \vec{x} \\ &= \lambda(h) \lambda(i, h) \vec{a}^i \vec{x}_h = \frac{\lambda(h)}{\lambda(i)} \lambda(i, h) \vec{a}_n^i \vec{x}_h = \frac{\lambda(h)}{\lambda(i)} \lambda(i, h) \vec{a}_h^i \vec{x}_n, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\vec{a}_i^h \vec{x}_n = \frac{\lambda(h)}{\lambda(i)} \vec{a}_i^h \vec{x}_n,$$

et, d'après (3'),

$$\vec{a}_i^h \vec{x}_n = 0.$$

D'où

$$\vec{a}_i^h \vec{x} = \vec{a}^h \vec{x}_i = 0.$$

produits scalaires $\vec{a}'_j \vec{x}_i$; comme d'après (4'), $\|\beta_j^k\| \neq 0$, on en déduit

$$(13) \quad \vec{a}'_j \vec{x}_i = 0.$$

5° Les équations $(A_{j,i})$ donnent alors

$$(14) \quad \vec{a}^k_j \vec{x}_i = 0,$$

d'où, d'après (2),

$$(15) \quad \vec{a}'_i \vec{x}_i = 0.$$

Conclusion. — Les vecteurs \vec{x}_i ont d'après (6), (13), (14), (15) leurs projections nulles sur tous les \vec{A}_α (cf. a, 1°); de même pour x_n , d'après (7), (11) et pour \vec{x} d'après (8), (12). Donc

$$\vec{x} = \vec{x}_i = \vec{x}_n = 0.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — La méthode tombe en défaut pour $n = 2$, parce que $\|\gamma_i^k\| \equiv 0$ dans ce cas. On devait d'ailleurs s'y attendre (n° 54). Pour $n = 3$, la démonstration est valable, mais les permutations d'indices de $(c, 1^\circ)$ n'ont plus lieu.

103. Il résulte du lemme I que les $P = p \frac{n(n+1)}{2}$ formes X (soit $X_{(p)}$) correspondant à $h \leq p$ sont indépendantes pour des a génériques, d'où :

LEMME II. — *Il existe (au moins) un déterminant d'ordre P de ces P formes $X_{(p)}$ qui n'est pas identiquement nul par rapport aux a .*

104. *Application aux systèmes U_p .* — Si $q = \frac{n(n-1)}{2}$, le système U_p peut s'écrire

$$U_p \begin{cases} X_{hi} = T_{ih\overline{p+1}} \\ X_{hj} = R_{jh\overline{p+1}} \end{cases} \quad (h \leq p; i, j \leq n);$$

en posant, dans les $X_{(p)}$ du n° 103,

$$x_\alpha = a_{\alpha\overline{p+1}}, \quad x_{\alpha i} = a_{\alpha i\overline{p+1}}.$$

Nous désignerons désormais par le symbole général $a_{(p)}$ les $a_{\alpha h}$, $a_{\alpha i h}$ pour lesquels $h \leq p$, et par $\Pi_{(p)}$ les composantes de la courbure et de la torsion qui figurent dans les U_k , où $k \leq p$.

Parmi les déterminants de U_p , choisissons-en un qui ne soit pas identiquement nul par rapport aux $a_{(p)}$ et désignons-le par Δ_p . (L'existence en est assurée par le lemme II.) Si U_p est attaché à un élément intégral I_p^0 , les $a_{(p)}$ vérifient les systèmes U_1, U_2, \dots, U_{p-1} (nécessaires et suffisants). Nous désignerons par $\Delta_p(I_p^0)$ la valeur que prend alors Δ_p .

Nous allons démontrer que, si l'espace E'_n est générique, le déterminant $\Delta_p(I_p^0)$ n'est pas nul pour l'élément I_p^0 générique et le repère générique de E'_n , et ceci quel que soit $p \leq n - 1$.

a. La proposition est vraie pour $p = 1$. En effet, pour l' I_1^0 générique, les $a_{(1)}$ sont arbitraires et $\Delta_1 \neq 0$ entraîne $\Delta_1(I_1^0) \neq 0$.

b. Nous allons montrer que, si la propriété est vraie jusqu'à l'indice $p - 1$ inclus, elle l'est encore pour l'indice p . Tout d'abord U_{p-1} est alors compatible et il existe des éléments intégraux I_p^0 .

1° L'élément I_p^0 générique contient des éléments $I_1^0, I_2^0, \dots, I_{p-1}^0$, qui sont eux-mêmes génériques. D'après l'hypothèse de récurrence, les déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}$ correspondants ne sont pas nuls : on les prendra pour déterminants principaux des systèmes U_1, U_2, \dots, U_{p-1} . De la sorte on peut définir l'élément I_2^0 générique par les paramètres $a_{(1)}$ de son I_1^0 , qui sont tous arbitraires, et par un certain nombre de paramètres $a_{x_2}, a_{x_{i2}}$, à indices bien déterminés, qui sont les inconnues non principales de U_1 , et comme telles laissées arbitraires par U_1 ; de même pour I_3^0 , etc.

Finalement, l'élément I_p^0 générique sera défini par un certain nombre de ses $a_{(p)}$, à indices bien déterminés, que nous représenterons par \tilde{a}_p , et qui peuvent prendre des valeurs absolument arbitraires. Les autres $a_{(p)}$ sont des fonctions rationnelles bien déterminées de ces \tilde{a}_p et des $\Pi_{(p-1)}$.

2° Il en résulte que le déterminant $\Delta_p(I_p^0)$ est, pour l'élément I_p^0 générique, une fonction rationnelle bien déterminée des variables indépendantes \tilde{a}_p et $\Pi_{(p-1)}$

$$\Delta_p(I_p^0) \equiv g[\tilde{a}_p, \Pi_{(p-1)}].$$

S'il est nul pour l' I_p^0 générique, c'est que $g \equiv 0$ par rapport aux \tilde{a}_p pour les valeurs que prennent les Π dans l'espace donné (quel que soit d'ailleurs le point de cet espace ou le repère choisi). Si cela ne se produit pas quels que soient les Π voisins de ces valeurs, c'est-à-dire si $g \neq 0$ (par rapport aux \tilde{a} et aux Π), les Π vérifient une égalité superflue, et l'espace E'_n n'est pas générique (1).

3° Or g n'est pas identiquement nulle. En effet, on peut choisir les \tilde{a} et les Π de façon que les $a_{(p)}$ prennent des valeurs arbitraires données à l'avance. Il suffit pour cela de se donner des $a_{(p)}$ arbitraires et d'en déduire les \tilde{a} (qui sont certains $a_{(p)}$ bien déterminés) et les Π qui s'en déduisent par U_1, U_2, \dots, U_{p-1} .

(1) Le fait que $g \neq 0$ suffit à montrer qu'il existe certains domaines pour les variables Π où la proposition est vraie; la démonstration se réduit alors au 3°. Mais cela ne suffit pas pour affirmer que les espaces pour lesquels la proposition n'est pas démontrée vérifient des conditions d'égalité, car la fonction g n'est déterminée que dans l'hypothèse de récurrence.

On peut donc choisir les \tilde{a} et les Π de façon que $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p \neq 0$, puisque ces déterminants ne sont pas identiquement nuls par rapport aux a . On a alors $g \neq 0$. Donc $g \neq 0$. C. Q. F. D.

c. La récurrence s'étend jusqu'à $p = n - 1$ (c'est-à-dire tant que $\Delta_p \neq 0$), et la proposition est démontrée.

105. *Conclusion.* — L'inégalité $\Delta_p \neq 0$ entraîne la compatibilité de U_p ; la proposition précédente a donc pour conséquence immédiate le fait que la condition B est vérifiée pour un espace E'_n générique, d'où l'involution de Σ et le théorème d'existence du n° 100.

Degré d'arbitraire de la solution générale. — D'après la théorie des systèmes en involution et l'étude que nous venons de faire des systèmes U_p (systèmes polaires), la solution générale géométrique dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions arbitraires de $n - 1$ arguments (¹). C'est le degré d'arbitraire d'une correspondance ponctuelle entre une variété ponctuelle à $n - 1$ dimensions donnée, et une variété ponctuelle à $n - 1$ dimensions arbitraire plongée dans l'espace à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.

BIBLIOGRAPHIE.

Pour éviter des répétitions (en particulier au sujet de [8], [11], [14], [15], [17]), nous avons rassemblé ici les titres des différents Ouvrages ou Mémoires cités au cours du texte, où ils sont représentés par leur numéro d'ordre entre crochets. L'Ouvrage [17], dont M. Élie Cartan m'avait obligeamment communiqué le manuscrit, est encore sous presse. Il traite de la théorie des systèmes en involution, théorie dont les bases sont posées dans [4].

1. GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827 (trad. fr. : *Nouv. Ann. de Math.*, 1852).
2. SCHLAEFELI, *Nota alla memoria del Sig. Beltrami* (*Annali di Matem.*, 2^e série, t. 3, 1871-1873, p. 178-193).
3. RICCI, *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (*Annali di Matem.*, 2^e série, t. 12, 1884, p. 135-168).
4. É. CARTAN, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (*Ann. Éc. Norm.*, 3^e série, t. 18, 1901, p. 241-311).
5. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1913).
6. É. CARTAN, *Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* :
 - a. *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion* (t. 174, 1922, p. 593);
 - b. *Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité* (*ibid.*, p. 738).
7. GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, Hermann, 1922).

(¹) C'est ([17] et n° 99) le nombre des paramètres $\omega_\alpha, \omega_{\alpha_i}$ laissés arbitraires, pour l'élément intégral I_{n-1} , par le système U_{n-2} générique; il n'y a pas de fonction arbitraire de n arguments parce que U_{n-1} a une solution unique (lemme I).

8. É. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace* (*Bull. Sc. math.*, t. 48, 1924, p. 294-320).
9. É. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann* (*Mém. Sc. Math.*, IX, 1925).
10. M. JANET, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 5, 1926, p. 38-73).
11. É. CARTAN, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 6, 1927, p. 1-7).
12. É. CARTAN, *La géométrie des groupes de transformations* (*J. Math. pures et appl.*, t. 6, 1927, p. 1-119).
13. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (Leipzig, Teubner, 1934).
13. É. CARTAN, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (*Exposés de Géométrie*, Paris, Hermann, 1935).
15. É. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile* (*Cahiers scientifiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1937).
16. O. GALVANI, *Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* :
 - a. *Sur la réalisation de certains espaces à parallélisme absolu par des congruences de droites* (t. 214, 1942, p. 337);
 - b. *Sur les connexions euclidiennes à courbure non nulle réalisable par des congruences de droites* (*ibid.*, p. 733);
 - c. *Sur la réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes à deux dimensions les plus générales* (t. 216, 1943, p. 23);
 - d. *Sur la réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes et affines à n dimensions* (*ibid.*, p. 519);
 - e. *Sur la connexion ponctuelle des congruences d'éléments linéaires* (t. 218, 1944, p. 264).
17. É. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, Hermann, paraîtra prochainement).
18. O. GALVANI, *La réalisation des espaces ponctuels à connexion affine et la géométrie des groupes de Lie* (*J. Math. pures et appl.*, paraîtra prochainement).

Vu et approuvé :

Paris, le 7 juillet 1944.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GILBERT GIDEL.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	I
CHAPITRE I. — <i>La connexion intrinsèque induite sur une surface. Principes généraux de définition d'une connexion induite.</i>	5
CHAPITRE II. — <i>La connexion ponctuelle intrinsèque d'une congruence d'éléments linéaires.</i> ...	9
I. Éléments linéaires et congruences	9
II. Définition de la connexion induite	12
III. Cas particuliers	15
CHAPITRE III. — <i>Propriétés géométriques de la connexion d'une congruence d'éléments linéaires.</i>	16
I. Courbure et torsion	16
II. Pseudo-lignes. Droites et géodésiques	28
III. Congruences à cône directeur	37
CHAPITRE IV. — <i>Réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes à deux dimensions.</i>	45
I. Généralités	45
II. Connexions à courbure	51
III. Cas du parallélisme absolu	58
CHAPITRE V. — <i>Les connexions ponctuelles euclidiennes à n dimensions.</i>	71
I. Les variétés à n dimensions d'éléments q-plans de E_{n+q}	71
II. Réalisation des connexions ponctuelles euclidiennes à n dimensions	76
BIBLIOGRAPHIE	91

