WOLFGANG DOEBLIN

Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__204__1_0>

A Monsieur J Hadamard

Hommage très respectueux

W. Doeblin

SÉRIE A, N° 1.775
N° D'ORDRE:
2.641

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Wolfgang DOEBLIN

1re THÈSE: — SUR LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DE MOUVEMENTS RÉGIS PAR CERTAINS TYPES DE CHAÎNES SIMPLES.

2e THÈSE: — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

SOUTENUES LE 26 MARS 1938 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN:

MM. BOREL, *Président.*
„ FRÉCHET
„ GARNIER *Examinateurs.*

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
BUCUREŞTI
1938

C. 607.

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

MM

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.
Doyen . . . . C. MAURAIN. *Professeur,* Physique du Globe.

Professeurs honoraires .

H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
Émile PICARD.
Léon BRILLOUIN.
GUILLET
PÉCHARD

FREUNDLER.
AUGER.
BLAISE.
DANGEARD.
LESPIEAU.

MARCHIS.
VESSIOT.
PORTIER.
MOLLIARD.
LAPICQUE.

PROFESSEURES

G. BERTRAND	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM	T	Physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY . . .	T	Enseignement de Physique.
Charles PÉREZ . . .	T	Zoologie.
Léon BERTRAND . .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. RABAUD	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD		Chimie minérale.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. WINTREBERT . .	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM . .	T	Botanique.
O. DUBOSCQ	T	Biologie maritime.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY . .	T	Pétrographie.
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT		Physique.
E. DARMOIS		Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND .	T	Botanique.
M. JAVILLIER		Chimie biologique.
L. JOLEAUD		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY . . .	T	Physiologie comparée.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des être organisés).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et pplications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minerale.
M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON . . .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BEGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN		Zoologie (P. C. B.).
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches.. Physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE		Géologie.
VALIRON		Mathématiques générales.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.

Secrétaire . . . . A· PACAUD.
Secrétaire honoraire . . . . . D. TOMBECK.

SUR LES PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DE MOUVEMENTS RÉGIS PAR CERTAINS TYPES DE CHAÎNES SIMPLES

PAR

W. DOEBLIN

INTRODUCTION

§ 1

Le travail qui suit contient la seconde partie des recherches faites par l'auteur sur les chaînes de Markoff dans la première moitié de l'année 1936. Les résultats de la premiere partie sont résumés dans le § 2 de l'introduction.

Dans le premier Chapitre sont étudiés les sommes $S^{(n)}$ de variables aléatoires attachées au mouvement d'un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états dans le cas où ce mouvement est régi par une chaîne simple constante de Markoff. Markoff a en 1907 démontré dans le cas dit de Markoff que ces sommes dépendent si n augmente indéfiniment d'une loi tendant après réduction vers la loi de Gauss. Dans le cas général M. Fréchet a en 1931 calculé les parties principales des moments des deux premiers ordres de $S^{(n)}$. En nous servant de l'idée du groupement des termes dûe à S. Bernstein nous montrons qu'à l'intérieur d'un groupe final la loi-limite de Laplace-Gauss est applicable, sauf dans un cas où l'influence du hasard est assez faible. On en déduit les lois-limites des $S^{(n)}$ dans le cas singulier le plus général et les parties principales des moments de $S^{(n)}$. Nous étudions ensuite les $S^{(n)}$ du point de vue de la loi forte des grands nombres et démontrons que dans le cas semi-régulier le théorème du logarithme itéré est généralement vérifié. Ces résultats sont appliqués aux fréquences.

Le second Chapitre est consacré à l'étude du schéma suivant (chaîne simple de Markoff continue) : W étant un ensemble mes (B) d'un R_n, on fait correspondre à chaque $E \varepsilon W$ et à chaque sous-ensemble $\mathcal{E}$ de W, mes (B), une grandeur $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ complètement additive par rapport à $\mathcal{E}$ et satisfaisant à $P^{(1)}(E, W) = 1$. On interprète $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ comme la probabilité pour qu'un certain point mobile passe dans une épreuve de E en $\mathcal{E}$. L'allure asymptotique des iterées $P^{(n)}$ (E, $\mathcal{E}$) et du mouvement du point mobile a été étudiée par divers auteurs dans ces cas de plus en plus étendus. Nous prolongeons cette étude dans des cas plus généraux encore en supposant vérifiée d'une part certaines conditions de mesurabilité, d'autre part que mes (W) $< \infty$ et qu'il existe un N et deux nombres positifs y, b tels que P^N (E, $\mathcal{E}$) < 1 y si mes ($\mathcal{E}$) $<$ b. Le résultat essentiel de l'analyse est qu'on a un parrallélisme presque-parfait avec le cas d'un nombre fini d'états. Il existe un nombre fini d'ensembles finals, tels que le point mobile passe presque-sûrement dans ces ensembles finals, qu'il ne peut quitter l'ensemble final dans lequel il est amené que dans des cas de probabilité nulle et qu'il passe presque-sûrement une infinité de fois par tout sous-ensemble de cet ensemble final de mesure positive. Un ensemble final se divise à son tour en un certain nombre de sous-ensembles cycliques qu'on peut ranger dans un ordre circulaire tel que le point mobile passe presque-sûrement dans chaque épreuve d'un sous-ensemble cyclique au suivant etc. Les $P^{(n)}$(E, $\mathcal{E}$) sont asymptotiquement périodiques, le calcul de leurs parties principales, ainsi que celui de certaines grandeurs importantes dans la théorie est ramené à la résolution de systèmes d'équations intégrales. M. Frechet a démontré sous l'hypothèse de l'existence d'une densité $p^{(1)}$ (E, F) avec $p^{(N)}$ (E, F) borné que les constantes fondamentales de module 1 de $p^{(1)}$ (E, F) sont des racines de l'unité; il a précisé et étendu des résultats dûs à M. Hadamard sur les fonctions fondamentales correspondant à des valeurs fondamentales de module 1. Ces résultats sont retrouvés sous nos hypothèses plus générales et interprétés par la forme de ces fonctions fondamentales et le mouvement circulaire entre les sous-ensembles cycliques. Le cas dénombrable étudié par M. Fortet ainsi que certains cas où mes (W) $= \infty$ peuvent être ramenés au cas précédent.

Comme on montre dans le Chapitre 3, les résultats établis sur les sommes de variables aléatoires dans le premier Chapitre restent presque tous valables dans ce cas.

La quatrième et dernier Chapitre traite des mouvements régis par l'équation de Smoluchowsky. MM. Kryloff et Bogoliouboff ont étudié sous certaines hypothèses les propriétés asymptotiques de solutions de cette équation en partant de théorèmes de M. Fréchet. Les résultats de ces auteurs sont retrouvés et complétés sous des hypothèses plus générales.

Les sommes de variables aléatoires sont remplacées par des intégrales attachées au mouvement aléatoire du point mobile. Sous certaines hypothèses on montre que presque-sûrement ces intégrales ont un sens. Les propriétés asymptotiques de ces intégrales pour $t \to \infty$ sont les mêmes que celles des sommes considérées dans les Chapitres précédents (loi de Gauss théorème du logarithme itéré, etc). Application en est faite à l'étude de la durée de séjour du point mobile dans un ensemble.

Nous sommes heureux de pouvoir exprimer ici à notre maître M. Fréchet toute notre respectueuse gratitude pour l'intéret avec lequel il a suivi le développement de ces travaux et pour ses conseils qui ne nous ont jamais fait défaut et qui nous ont été aussi précieux pour nos recherches proprement dites que pour le travail de rédaction.

§ 2. — Rappel de la théorie des chaînes simples à un nombre fini d'états

Envisageons un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états E_1, $E_2 \dots E_r$. Faisons une suite dénombrée d'épreuves 1,..., n,..., et supposons qu'il existe une probabilité p_{ik} bien définie pour que le système passe en une épreuve de l'état E_i à l'état E_k. Les p_{ik} symbolisent alors une chaîne simple constante. Soit $P_{ik}^{(n)}$ la probabilité de passer de E_i en E_k en n épreuves. On a

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} \quad , \quad \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} = 1 \quad , \quad P_{ij}^{(1)} = p_{ij} \ .$$

Nous dirons qu'il existe un *chemin de* E_i *en* E_j *d'ordre* m, s'il y a m états $E_{i_1} \dots E_{i_{m-1}} E_j$ tels que le produit $p_{i i_1} \dots p_{i_{m-1} j}$ soit $\neq 0$. Si $p_{ij} = 0$, nous conviendrons de dire qu'on ne peut pas passer en une épreuve de E_i en E_j.

Dans le cas particulier où tous les p_{ij} sont > 0, on montre que les $P_{ik}^{(n)} \rightarrow P_k > 0$. Ce cas, étudié d'abord par Markoff, sera appelé dans la suite *cas de* Markoff. Si les $P_{ik}^{(\nu)}$ sont tous positifs pour un certain ν suffisamment grand, les $P_{ik}^{(n)}$ tendent vers $P_k > 0$, ce cas est appelé d'après M. Fréchet le *cas positivement régulier*.

Dans le cas général, on montre qu'il existe un nombre fini ($\geqq 1$) de groupes d'états disjoints dits *groupes finals* $G_1 \ . \ G_e$, jouissant des propriétés suivantes: la probabilité pour que le système se trouve encore à la n-ieme épreuve (on suppose qu'il évolue depuis l'instant 0) à l'extérieur de l'ensemble des groupes finals tend vers 0 si n augmente indéfiniment (exponentiellement c. à. d est majorée par $ke^{-n\lambda}$, où $\lambda > 0$). Le système ne peut pas quitter le groupe final dans lequel il est amené, il passe presque-sûrement une infinité de fois par chaque état de ce groupe final. Chaque groupe final G_α se décompose en un certain nombre ($d\ (\alpha) \geqq 1$) de sousgroupes disjoints d'états $\overline{1(\alpha)} \ . \ \overline{d(\alpha)}$, qu'on peut ranger dans un ordre circulaire tel que le système se trouvant dans G_α passe nécessairement en chaque épreuve cycliquement d'un sousgroupe cyclique au suivant. Si G_α contient plusieurs sousgroupes cycliques la sous-matrice des p_{ij} correspondant à G_α sera dite cyclique.

On a

$$\begin{array}{llll}
P_{ik}^{(n)} = 0 & si\ E_i \varepsilon \overline{l'(\alpha)},\ E_k \varepsilon \overline{l(\alpha)} \text{ et } n \neq l & l' \pmod{d(\alpha)} \\
\text{„} \rightarrow P_k > 0 \text{ „ „ „ „} & \text{„ „ } n \equiv l & l' \pmod{d(\alpha)} \\
\text{„} \rightarrow 0 \quad si & E_k \bar{\varepsilon} \Sigma G_\alpha & \\
\text{„} = p_{ik} \ - \ 0\ si\ E_i \varepsilon G_\alpha & E_k \bar{\varepsilon} G_\alpha . &
\end{array}$$

Soit $Pr[i, j(\alpha)]$ la limite pour $m \rightarrow \infty$ de la probabilité pour que le système parti de E_i à l'instant 0 se trouve $m\,d(\alpha)$ épreuves après dans le sousgroupe cyclique $\overline{j(\alpha)}$ de G_α. Soit $\overline{l_n(\alpha)}$ le sousgroupe cyclique de G_α déterminé par l'équation $n = l - l_n \pmod{d(\alpha)}$. Alors

$$P_{ik}^{(n)} \approx Pr[i, l_n(\alpha)]\, P_k \quad si\ E_k \varepsilon \overline{l(\alpha)}\,.^{1)}$$

Envisageons

$$\Pi_{ik}^{(n)} = \frac{1}{n}\left[P_{ik}^{(1)} + \dots + P_{ik}^{(n)} \right], \quad \Pi_{ik} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{ik}^{(n)}$$

$$\begin{array}{ll}
\Pi_{ik} = 0 \quad si\ E_k \bar{\varepsilon} \Sigma G_\alpha & \\
\Pi_{ik} = \Pi_{kk} = \Pi_k = P_k / d(\alpha) & si\ E_i,\ E_k \varepsilon G_\alpha \\
\Pi_{ik} = Pr[i, G_\alpha]\, \Pi_k & \text{„} \quad E_k \varepsilon G_\alpha
\end{array}$$

en désignant par $Pr[i, G_\alpha]$ la probabilité pour que le système passe de E_i dans G_α.

$$Pr[i, G_\alpha] = Pr[i, 1(\alpha)] + \dots + Pr[i, d(\alpha)], \quad \sum_{\alpha=1}^{c} Pr[i, G_\alpha] = 1.$$

Nous pouvons donc écrire

$$P_{ik}^{(n)} \approx Pr^{(n)}[i, k]$$

$Pr^{(n)}[i, k]$ étant une fonction périodique de n.

Introduisons avec M. Fréchet les notations suivantes: nous dirons que nous sommes dans le *cas régulier* si les $P_{ik}^{(n)}$ tendent vers des limites P_k indépendantes de l'état initial (un seul groupe final à sousmatrice non-cyclique), dans le *cas semi-régulier* si les Π_{ik} ne dépendent pas du premier indice (un seul groupe final), dans le *cas non-oscillant* si les

---

1) Dans ce qui suit $A_n \approx B_n$ signifiera soit $A_n / B_n > 1$, soit $\lim [A_n - B_n] = 0$. Le lecteur verra immédiatement dans chaque cas dans quel sens le signe $\approx$ est employé.

$Pr^{(n)}\,[i,k]$ ne sont pas périodiques, donc constantes $= \Pi_{ik}$ (les sousmatrices des groupes finals sont non-cycliques).

La différence $P_{ik}^{(n)} - Pr^{(n)}\,[i,k]$ tend exponentiellement vers 0, donc les séries

$$S_{ik} = \sum_{t=1}^{\infty} \{ P_{ik}^{(t)} - Pr^{(t)}[i,k] \}$$

convergent. Les grandeurs $Pr[i, j(\alpha)]$, P_k, S_{ik} peuvent être calculées par des systèmes d'équations linéaires qui les déterminent sans ambiguité. On a les relations

$$\sum_{k=1}^{r} S_{ik} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{r} Pr^{(n)}\,[i,k]\, S_{kj} = 0 \qquad \text{(voir § suivant).}$$

La grandeur $n\,(\Pi_{ik}^{(n)} - \Pi_{ik})$ peut être mise sous la forme

$$S_{ik} + \psi_{ik}^{(n)} + \varepsilon_{ik}^{(n)}$$

$\varepsilon_{ik}^{(n)}$ étant un infiniment petit d'ordre exponentiel, $\psi_{ik}^{(n)}$ étant une fonction périodique de n, la période ne dépendant que de k et étant identique à celle de $Pr^{(n)}\,[k,k]$.

Si p_{0i} est la probabilité absolue d'avoir à l'instant O l'état E_i, la probabilité absolue d'avoir l'état E_i à l'épreuve n est $\sum_{j=1}^{r} p_{0j}\, P_{ji}^{(n)}$; $[p_{0i}]$ est dite une distribution stable si $\sum_{j=1}^{r} p_{0j}\, P_{ji}^{(n)}$ ne dépend pas de n, les p_{0k} sont alors de la forme

$$p_{ok} = Pr[O,\ G_\alpha]\,\frac{P_k}{d(\alpha)}\; si\; P_k \in G_\alpha \text{ et } p_{0k} = 0\; si\; E_k \bar{\in} \sum G_{''},\ Pr\,[0,\ \dot{G}_{''}]$$

étant la probabilité initiale de se trouver dans $G_{''}$.

Si nous connaissons l'état du système, soit E_i, à une certaine épreuve et son état E_k m épreuves après, avec $P_{ik}^{(m)} > 0$, alors nous pouvons calculer la probabilité pour que le système se soit trouvé à une épreuve intermédiaire en E_j, et cette probabilité est bien définie et ne dépend pas des connaissances que nous pouvons avoir sur les états que le système a pris à l'extérieur de l'intervalle de temps considéré.

A l'intérieur d'un groupe final le *principe presque-ergodique* est réalisé : si nous connaissons l'état du système à un certain instant dans le groupe final, alors la connaissance d'un état du système à un instant ultérieur ne nous donne aucun renseignement (au moins asymptotiquement) sur le mouvement du système à des épreuves très éloignées. Nous pouvons préciser ce principe dans notre cas en disant : à l'intérieur d'un groupe final si E_i et E_k sont des états pouvant être atteints à la même épreuve à partir d'un certain état du groupe final, c. à. d. si l'on a pour un j et r, $P_{jk}^{(r)} > 0$ et $P_{ji}^{(r)} > 0$, alors quel que soit E_e

$$\left| P_{ie}^{(n)} - P_{ke}^{(n)} \right| < Ce^{-\prime n}.$$

Envisageons un groupe final G_α avec $d\ (\alpha)$ sous-groupes cycliques. Considérons un système matériel auxiliaire T lié à l'ancien, soit S, évoluant à l'intérieur de G_α, par la convention: si S a été à l'épreuve $m\ d\ (\alpha) + 1$ dans E_{i_1}, à l'épreuve $m\ d\ (\alpha) + 2$ dans E_{i_2} . ., à l'épreuve $(m+1)\ d\ (\alpha)$ dans E_{i_d}, alors T a été à la $m+1^{-\text{ieme}}$ épreuve pour T dans $\bar{E}_i = E_{i_1} \dots E_{i_d}$. La donnée d'une position de T revient donc à la donnée de $d(\alpha)$ positions successives de S. Eliminons les $E_{i_1} \dots E_{i_d}$ qui correspondent à des combinaisons impossibles, c. à. d. pour lesquelles $p_{i_1\, i_2} \dots p_{i_{d-1}\, i_d} = 0$. Alors les E_i restants auront la forme suivante, si E_{i_1} appartient p. ex. au sous-groupe cyclique $1\ (\alpha)$, alors E_{i_2} appartiendra au sousgroupe cyclique suivant, etc. Si nous désignons par $q_{i\,l}$ la probabilité pour que T passe dans une épreuve de $\bar{E}_i = E_{i_1} \dots E_{i_d}$ à $\bar{E}_j = E_{j_1} \dots E_{jd}$, alors $q_{ij} = p_{i_d\, i_1} \dots p_{j_{d-1}\, j_d}$ et l'on voit qu'on peut mettre la matrice des q_{ij} sous la forme

$$\begin{vmatrix} A_1 & O & . & O \\ O & A_2 & . & O \\ . & & . & . \\ O & O & . & A_d \end{vmatrix}$$

A_1 étant p. e. la sous-matrice des q_{ij} correspondant aux états $\bar{E}_i$, $\bar{E}_j$ pour lesquels E_{i_1} et E_{j_1} appartiennent à $1\ (\alpha)$. Ces états forment un groupe final, et on se trouve comme on voit facilement à l'intérieur de ce groupe final dans le cas positivement régulier.

On voit donc qu'on peut, en utilisant la substitution d'états indiquée, ramener le cas singulier à l'intérieur d'un groupe final à un cas non-oscillant de structure très simple.

§ 3. — Les S_{ik}

Nous allons nous occuper ici des grandeurs

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_{ik}^{(n)} - Pr^{(n)} [i, k] \right\}$$

dont nous avons parlé dans le § précédent. Les S_{ik} ont été introduites pour la première fois par M. Fréchet dans le cas non-oscillant et calculées dans le cas régulier. Nous allons les calculer dans le cas général.

1. *Cas régulier.* $Pr^{(n)}[i,k]$ sera égale à P_k et nous aurons

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} (P_{ik}^{(n)} - P_k)$$

Procédons comme M. Fréchet. Ecrivons

$$P_{ik}^{(n+1)} - P_k = \sum_{j=1}^{r} (P_{ij}^{(n)} - P_j)\, p_{jk}$$

et

$$\sum_{k} (P_{ik}^{(n)} - P_k) = 0.$$

Additionnons les équations ci-dessus pour $n = 1, 2, ..$ Il vient

$$\sum_{t=1}^{n} (P_{ik}^{(t+1)} - P_k) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{t=1}^{n} (P_{ij}^{(t)} - P_j)\, p_{jk}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{n} (P_{ik}^{(t)} - P_k) = 0.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, nous obtenons le système

$$S_i \left\{ \begin{array}{l} S_{ik} - (p_{ik} - P_k) = \sum_{j=1}^{r} S_{ij}\, p_{jk} \\ \sum_{k=1}^{r} S_{ik} = 0. \end{array} \right.$$

Ces $r+1$ équations à r inconnues ne sont pas indépendantes, comme on voit en ajoutant les r premières En supprimant une de ces r premières équations, on obtient un système de r équations à r inconnues, déterminant sans ambiguité les S_{ik} $(k = 1, \ . \ , r)$. En effet supposons que pour un i, il y ait deux systèmes de solutions de S_i, S'_{ik} et S''_{ik} leur différence $y_k = S'_{ik} - S''_{ik}$ satisfera au système

$$y_k = \sum_{j=1}^{r} y_j\, p_{jk} \qquad (k = 1, .. , r)$$

$$\sum_{j=1}^{r} y_k = 1.$$

On déduit sans peine que y_k satisfait aussi à

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} y_j P_{jk}^{(n)}.$$

Comme $P_{jk}^{(n)}$ tend vers P_k, on aura $y_k = P_k \sum_{j=1}^{r} y_j = 0$.

Il n'y a qu'une seule solution du système S_i. C. *q. f. d.*

2. *Cas non oscillant. Dans ce cas* $P_{ij}^{(n)} \to P_{ij}$, donc

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} (P_{ik}^{(n)} - P_{ik})$$

Si $E_i \varepsilon G_\alpha$ et $E_k \varepsilon G_\alpha$, nous sommes ramenés au cas 1), car à l'intérieur des groupes finals nous sommes dans le cas positivement regulier; si $E_i \varepsilon G_\alpha$ et $E_k \bar{\varepsilon} G_\alpha$, $S_{ik} = 0$, car tous les $P_{ik}^{(n)}$ sont nuls. Nous pouvons donc calculer les S_{ik} si $E_i \varepsilon G_\alpha$ par les systèmes

$$E_i \varepsilon G_\alpha \left\{ \begin{array}{lll} S_{ik} - (p_{ik} - P_k) = \sum_{G_\alpha} S_{ij} p_{jk} & & \\ \sum_{E_k \varepsilon G_\alpha} S_{ik} = 0. & \text{si} & E_k \varepsilon G_\alpha \end{array} \right.$$

et

$$S_{ik} = 0 \qquad \text{si} \qquad E_k \bar{\varepsilon} G_\alpha.$$

Pour déterminer les autres S_{ik} remarquons qu'on a les équations

$$(S_k^*) \qquad S_{ik} - (p_{ik} - P_{ik}) = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} S_{jk} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

qu'on obtient en passant à la limite dans

$$\sum_{t=2}^{n+1} (P_{ik}^{(t)} - P_{ik}) = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} \sum_{t=1}^{n} (P_{jk}^{(t)} - P_{jk})$$

Nous allons déterminer les S_{ik} comme solutions du système S_k^* se réduisant aux S_{ik} calculés directement plus haut lorsque $E_i \varepsilon G_\alpha$. Je dis que cette solution est unique. En effet s'il y avait pour un k deux systèmes de solutions de S_k^* satisfaisant à la condition ci-dessus, soient S_i' et S_i'' la différence $S_i' - S_i'' = y_i$ satisfera à,

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} y_j$$

et sera nulle pour $E_i \varepsilon \Sigma G_\alpha$. Les y_i satisferont aussi à

$$y_i = \sum_{i=1}^{r} P_{ij}^{(n)} y_j$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} P_{ij} y_j$$

et comme $P_{ij} = 0$ si $E_j \bar{\varepsilon} \Sigma G_\alpha$, et $y_j = 0$ si $E_j \varepsilon \Sigma G_\alpha$, $y_i = 0$. C. *q. f. d.*

3. *Cas singulier à l'intérieur d'un groupe final.* Nous aurons plusieurs sous-groupes cycliques $\bar{1}, \ldots, \bar{d}$ $(d > 1)$, et entre ces sous-groupes nous aurons le mouvement circulaire bien connu. $P_{ij}^{(n)} \rightarrow P_j$ si $E_j \varepsilon \bar{e}'$ et $E_i \varepsilon \bar{e}$, $n \equiv e' - \quad e \pmod{d}$, $P_{ij}^{(n)} = 0$ si $n \not\equiv e' \quad e \pmod{d}$.

Supposons d'abord que $E_i \varepsilon \bar{d}$ et $E_j \varepsilon \bar{e}$, alors $P_{ij}^{(n)} \rightarrow P_j$ si $n \equiv e$ $\pmod{d}$, $P_{ij}^{(n)} = 0$ si $n \not\equiv e \pmod{d}$. S_{ij} s'écrira

$$S_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_{ij}^{(nd+e)} - P_j\right)$$

Alors de

$$P_{ij}^{(nd+e+d)} - P_j = \sum_{E_k \varepsilon e} \left(P_{ik}^{(nd+e)} - P_k\right) P_{kj}^{(d)}$$

et de

$$\sum_{E_j \varepsilon \bar{e}} \left(P_{ij}^{(nd+e)} - P_j\right) = 1 - 1 = 0.$$

on déduit que les S_{ij} satisfont au système

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ij} - \left(P_{ij}^{(e)} - P_j\right) = \sum\limits_{E_k \varepsilon \bar{e}} S_{ik} P_{kj}^{(d)} \qquad\qquad (E_j \varepsilon \bar{e}) \\ \sum\limits_{E_j \varepsilon e} S_{ij} = 1 \end{array} \right.$$

et l'on montre comme au numéro 1) que la solution de ce système est unique. Envisageons maintenant les états $E_i \varepsilon \bar{e}$ et $E_k \varepsilon \bar{e}'$. Soit ρ le nombre d'épreuves séparant $\bar{e}'$ de $\bar{e}$ ($\rho = e' - e$ si $e' > e$, $= d - (e - e')$ si $e' < e$) on verra par un passage à la limite analogue à celui qui a donné le système ci-dessus que les S_{ik} sont les solutions uniques du système

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ij} - \left(P_{ij}^{(\rho)} - P_j\right) = \sum\limits_{E_k \varepsilon \bar{e}'} S_{ik} P_{kj}^{(d)} \\ \sum\limits_{E_j \varepsilon \bar{e}'} S_{ij} = 0. \end{array} \right.$$

Il ne sera point nécessaire de calculer directement par les formules ci-dessus tous les S_{ik}. Il suffira de résoudre les systèmes correspondant aux $E_i \varepsilon \bar{d}$ et $E_k \varepsilon \bar{d}$. En effet supposons que nous ayons résolu ces systèmes. Si alors $E_k \varepsilon \bar{d}$ et $E_i \varepsilon \bar{e} \neq \bar{d}$, on aura $(n > 1)$

$$P_{ik}^{(nd-e)} - P_k = \sum_{E_j \varepsilon \bar{d}} P_{ij}^{d-e} \left(P_{jk}^{(n-1)d} - P_k\right)$$

donc

$$S_{ik} = \left(P_{ik}^{(d-e)} - P_k\right) + \sum_{E_j \varepsilon \bar{d}} P_{ij}^{(d-e)} S_{jk}$$

formule qui exprime les S_{ik} pour $E_i \varepsilon \bar{e}$ et $E_k \varepsilon \bar{d}$ par les S_{ik} ($E_i \varepsilon \bar{d}$ et $E_k \varepsilon \bar{d}$).

Si maintenant $E_i \varepsilon \bar{e}$ et $E_k \varepsilon \bar{e}_1$, nous devons distinguer deux cas.

a) $e_1 > e$. Nous avons alors

$$S_{ik} = \sum_{n=0}^{\infty} (P_{ik}^{(nd+e_1-e)} - P_k)$$

et si $n \geqq 1$

$$P_{ik}^{(nd+e_1-e)} - P_k = \sum_{E_j \varepsilon \bar{d}} (P_{ij}^{nd-e} - P_j) P_{jk}^{(e_1)}$$

d'où l'on conclut que

$$S_{ik} = P_{ik}^{(e_1-e)} - P_k + \sum_{E_j \varepsilon \bar{d}} S_{ij} P_{jk}^{(e_1)}.$$

b) $e_1 \leqq e$. On a

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} (P_{ik}^{(nd+e_1-e)} - P_k)$$

et

$$P_{ik}^{(nd+e_1-e)} = \sum_{E_j \varepsilon d} (P_{ij}^{(nd-e)} - P_j) P_{jk}^{(e_1)}.$$

donc

$$S_{ik} = \sum_{E_j \varepsilon \bar{d}} S_{ij} P_{jk}^{(e_1)}.$$

Nous avons exprimé tous les S_{ij} par les S_{ij} avec $E_i \varepsilon \bar{d}$ et $E_j \varepsilon \bar{d}$.

4. *Cas singulier général.* Nous avons plusieurs groupes finals à l'intérieur desquels on ne se trouve pas forcément dans les cas positivement réguliers. Les numéros précédents nous mettent en mesure de calculer les S_{ik} lorsque E_i appartient à un groupe final Calculons d'abord ces S_{ik} et désignons les par $\overline{S_{ik}}$. Alors dans le cas général nous avons

$$P_{ij}^{(n+1)} - Pr^{(n+1)}[i, j] = \sum_k p_{ik} (P_{kj}^{(n)} - Pr^{(n)}[k, j])$$

Comme

$$S_{ij} = \sum_{1}^{\infty} (P_{ij}^{(t)} - Pr^{(t)}[i, j])$$

$$(S_j^*) \qquad S_{ij} - (p_{ij} - Pr^{(1)}[i, j]) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} S_{kj}$$

je dis que la solution de ce système, se réduisant à $\overline{S}_{ij}$ lorsque $E_j \varepsilon G_\alpha$ est unique. En effet la différence y_i de deux solutions satisferait à

$$y_i = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} y_k$$

et serait nulle pour $E_i \varepsilon \Sigma G_\alpha$. En itérant l'équation ci-dessus, il vient

$$y_i = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} y_k$$

et

$$y_i = \sum_{k=1}^{r} Pr^{(n)}[i, k] y_k$$

y_k étant nulle si $E_k \varepsilon \Sigma G_\alpha$ et $Pr^{(n)} [i, k]$ étant nul si $E_k \varepsilon \Sigma G_\alpha$, $y_i \equiv 0$. C. q. f. d.

5. Il nous sera utile pour la suite d'établir une formule généralisant une formule de M. Fréchet pour le cas non-oscillant. Procédons comme M. Fréchet. Ecrivons

$$S_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} (P_{ij}^{(t)} \quad Pr^{(t)}[i, j])$$

multiplions ces équations pour $i = 1$ . ., par $Pr^{(n)}[e, i]$ et sommons, il vient

$$\sum_{i=1}^{r} Pr^{(n)}[e, i] S_{ij} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} Pr^{(n)}[e, i] \left(P_{ij}^{(t)} - Pr^{(t)}[i, j]\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \left\{Pr^{(n+t)}[e, j] - Pr^{(n+t)}[e, j]\right\}$$

c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{r} Pr^{(n)}[e, i] S_{ij} = 0$$

ce qui était la formule que nous voulions obtenir. Dans le cas régulier elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^{r} P_i S_{ij} = 0$$

dans le cas non-oscillant

$$\sum_{i=1}^{r} P_{ei} S_{ij} = 0$$

ce qui est équivalent aux formules

$$\sum_{E_i \in G_\alpha} P_i S_{ij} = 0.$$

Dans le cas singulier à l'intérieur d'un groupe final, nous avons les *d* formules

$$\sum_{E_i \in \bar{l}} P_i S_{ij} = 0.$$

On *a* de même

$$\sum_{j=1}^{r} S_{ij} \, Pr^{(n)} [j, k] = 0.$$

CHAPITRE 1

LES VARIABLES ALÉATOIRES, CAS D'UN NOMBRE FINI D'ÉTATS

§ 1. Position du problème. Historique

Position du problème: Attribuons à chaque état E_i un nombre x_i. Soit $X_i^{(n)}$ la variable aléatoire prenant la valeur x_k si le résultat de la n^{ieme} épreuve est E_k (l'état initial étant E_i). Soit $S_i^{(n)} = X_i^{(1)} + \ldots + X_i^{(n)}$. *Il s'agit d'étudier ces variables.* Remarquons que les $X_i^{(n)}$ ne sont liés eux-mêmes en chaîne simple que si les x_i sont tous distincts. On ne peut pas conclure sans ambiguité des x_i aux E_i si les x_i ne sont pas tous distincts.

Rappel historique. C'est Markoff [2]) qui a le premier envisagé le probleme ci-dessus. Il a demontré (dans ses calculs le nombre des états est 3), sous l'hypothèse que les p_{ik} sont tous > 0, et les x_i tous distincts, que $\mathcal{E}\left[\frac{S_i^{(n)}}{n}\right]$[3]) tend vers une imite M indépendante de l'état initial, $\mathcal{E}\left[\frac{S_i^{(n)} - nM}{\sqrt{n}}\right]^2$ tend vers une limite $\sigma^2 \neq 0$ indépendante de l'état initial, et tous les moments entiers de $[S_i^{(n)} - nM] / \sigma\sqrt{n}$ tendent vers les moments correspondants de la loi de Gauss réduite, et par conséquant que la loi de probabilité de $[S_i^{(n)} - nM] / \sigma\sqrt{n}$ tend vers la loi de Gauss réduite. La démonstration utilise les fonctions génératrices, elle devient fort compliquée si le nombre des états est grand et ne se prête pas à des extensions. Cette méthode somme toute assez artificielle n'a aujourd'hui qu'un interêt historique.

Sous les mêmes hypothèses et dans le cas de deux états M. Serge Bernstein a donné en 1926 une autre démonstration directe de la loi de Gauss, en illustration de théorèmes très généraux sur les sommes de variables aléatoires enchainées.

---

[2]) Pour la bibliographie nous renvoyons le lecteur à M. Hostinsky „Méthodes générales du Calcul des Probabilités" Mémorial. Sc. Math. Fasc. 52 et à M. Fréchet „Recherches théoriques modernes" livre II. Traité de M. Borel, t. 1, fasc. III.

[3]) $E[u]$ désigne l'espérance mathématique de u.

En 1931 M. Fréchet et M. Potoček ont montré que dans le cas général $\mathcal{E}\,[S_i^n/n]$ et $\mathcal{E}\left[\frac{S_i^n - \mathcal{E}(S_i^n)}{n}\right]^2$ ont des limites M_i et W_i qu'ils ont calculées. Ils ont montré que dans le cas non oscillant $\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2$ est de la forme $n^2\,W_i + n\,V_i + R_i\,(n)$, $R_i\,(n)$ restant borné; ils ont calculé V_i et montré que dans le cas semirégulier $W_i = 0$.

Une autre démonstration de la loi de Gauss dans le cas positivement régulier fut donnée en 1936 par M. Romanowsky, qui utilise comme Markoff la méthode des moments mais qui les calcule directement d'une façon analogue à celle de M. Fréchet. [4]

Nous allons calculer les lois limites de probabilité de $S_i^{(n)}$ *dans le cas général* de même que les parties principales des moments. En outre nous allons démontrer dans certaines hypothèses le *théorème du logarithme itéré*. Nous allons appliquer ces résultats à l'étude du mouvement.

§ 2. Cas régulier. Les $X_i^{(n)}$ et les deux premiers Moments des $S_i^{(n)}$

Les $X_i^{(n)}$. Dans le cas régulier nous savons que la distribution de probabilité tend vers une distribution limite indépendante de l'état initial. Il résulte que, si $n \to \infty$, la loi de probabilité de $X_i^{(n)}$ tend vers une loi limite prenant avec probabilité P_k les valeurs x_k. (On remarquera que dans cette loi limite n'interviennent que les x_k afférants aux états du groupe final).

L'espérance mathématique de $X_i^{(n)}$ tendra vers $M = \sum_{k=1}^{r} P_k\ x_k$ et les moments

$$\mathcal{E}\,\{\,X_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[\,X_i^{(n)}]\,\}^{\alpha} \text{ tendent vers } \sum_{k=1}^{r} P_k\,(x_k - \sum_{l=1}^{r} P_l\,x_k)^{\alpha}.$$

En particulier

$$\mathcal{E}\,\{X_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[\,X_i^{(n)}]\,\}^2 \to \sum_{k=1}^{r} P_k\,(x_k - M)^2 = u^2.$$

---

[4] Depuis la rédaction de ce travail M. Schulz a publié une autre démonstration de la loi de Gauss dans le cas régulier et M. Mihoc a obtenu aussi les lois limites dans le cas d'un seul groupe final.

L'espérance mathématique de $S_i^{(n)}$. Nous avons

$$\mathcal{E}[S_i^{(n)}] = \sum_{t=1}^{n} \mathcal{E}[X_i^{(t)}] = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{n} P_{ik}^{(t)} \right) x_k$$

or

$$\sum_{t=1}^{n} P_{ik}^{(t)} = n P_k + R_{ik}^{(n)}$$

donc

$$\mathcal{E}\ [S_i^{(n)}] = n\,M + \sum_{k=1}^{r} R_{ik}^{(n)}\ x_k = n\,M + \Sigma\, S_{ik}\ x_k + O_n \qquad (1)$$

$$M = \sum_{k=1}^{r} P_k\ x_k$$

$R_{ik}^{(n)}$ tendra vers S_{ik} et $|\ R_{ik}^{(n)} - S_{ik}\ |$ sera majoré par le terme général d'une progression géométrique décroissante.

Le carré de l'écart-type de $S_i^{(n)}$. Nous supposons dans ce qui suit qu'on a choisi l'origine des x de telle sorte que $M = 0$, pour simplifier l'écriture. Occupons nous d'abord de $\mathcal{E}\ [\ S_i^{(n)}\ ]^2$

$$\mathcal{E}\ [S_i^{(n)}]^2 = \sum_{t=1}^{n} \mathcal{E}[X_i^{(t)}]^2 + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \mathcal{E}\ [X_i^{(t)} \sum_{\tau=t+1}^{n} X_i^{(\tau)}\ ]$$

remarquons que

$$\sum_{t=1}^{n} \mathcal{E}[\ X_i^{(t)}]^2 = n \sum_{k=1}^{r} P_k\ x_k^2 + \sum_{k=1}^{r} R_{ik}^{(n)}\ x_k^2$$

et

$$\mathcal{E}\ [X_i^{(t)} \sum_{\tau=t+1}^{n} X_i^{(\tau)}] = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(t)}\ x_k\ \mathcal{E}\ [\ S_k^{(n-t)}\ ] = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(t)}\ x_k \sum_{j=1}^{r} R_{kj}^{(n-t)}\ x_j\ .$$

Donc

$$\sum_{t=1}^{n-1} \mathcal{E}\ [X_i^{(t)} \sum_{t+1}^{n} X_i^{(\tau)}] = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{t=1}^{n-1} P_{ik}^{(t)}\ R_{kj}^{(n-t)} \right\} x_j\ x_k\ ,$$

nous avons

$$\sum_{t=1}^{n-1} P_{ik}^{(t)}\ R_{kj}^{(n-t)} = \sum_{t=1}^{n-1} P_{ik}^{(t)}\ S_{kj} - \sum_{t=1}^{n-1} P_{ik}^{(t)}\ (S_{kj} - R_{kj}^{(n-t)}) = \sum_{t=1}^{n-1} P_k\ S_{kj}$$

$$- \sum_{t=1}^{n-1} (P_k - P_{ik}^{(t)})\ S_{kj} - \sum_{t=1}^{n-1} P_k\ (S_{kj} - R_{kj}^{(n-t)}) + \sum_{t=1}^{n-1} (P_k - P_{ik}^{(t)})\ (S_{kj} - R_{kj}^{(n-t)}).$$

Le premier terme est égal à $(n-1)\,P_k\,S_{kj}$, le second est égal à $R_{ik}^{(n-1)}\,S_{kj}$ et tend vers $S_{ik}\,S_{kj}$, le 3° à aussi une limite, car $\sum_{m=1}^{\infty}(S_{kj}-R_{kj}^{(m)})$ converge. Soit

$$-v_{kj}=\sum_{m=1}^{\infty}(S_{kj}-R_{kj}^{(m)})$$

alors le troisième terme tend vers $P_k\,v_{kj}$, le quatrième terme tend vers zéro. Donc

$$\sum_{t=1}^{n-1}P_{ik}^{(t)}\,R_{kj}^{(n-t)}=(n-1)\,P_k\,S_{kj}+S_{ik}\,S_{kj}+P_k\,v_{kj}+O_n$$

et O_n est un infiniment petit d'ordre exponentiel. En définitive

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]^2=n\left(\sum_{k=1}^{r}P_k\,x_k^2+2\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}P_k\,S_{kj}\,x_j\,x_k\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{r}S_{ik}\,x_k^2+2\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}(P_k\,v_{kj}-P_k\,S_{kj}+S_{ik}\,S_{kj})\,x_j\,x_k+O_n.$$

Considérons maintenant $\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}-\mathcal{E}\,(S_i^{(n)})]^2=\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]^2-[\mathcal{E}[S_i^{(n)}]]^2$, or $[\mathcal{E}\,(S_i^{(n)})]^2\to\left[\sum_{k=1}^{r}x_k\,S_{ik}\right]^2$. Donc dans le cas régulier

$$\mathcal{E}\,\{S_i^n-\mathcal{E}\,[S_i^n]\}^2=n\,\sigma^2$$

$$+\sum_{k=1}^{r}S_{ik}\,x_k^2+2\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}(P_k\,v_{kj}-P_k\,S_{kj}+S_{ik}\,S_{kj})\,x_j\,x_k-\left(\sum_{k=1}^{r}x_k\,S_{ik}\right)^2+O_n$$

$$\sigma^2=\sum_{k=1}^{r}P_k\,x_k\,(x_k+2\sum_{l=1}^{r}S_{ki}\,x_i).$$

En abandonnant l'hypothèse $M=0$, en tenant compte de $\sum_{i=1}^{r}S_{ki}=0$, σ^2 s'écrit

$$\sigma^2=\sum_{k=1}^{r}P_k\,(x_k-M)\,(x_k-M+2\sum_{l=1}^{r}S_{ki}\,x_i). \tag{2}$$

Nous avons donc par une méthode analogue à celle de M. Fréchet obtenu (et même précisé un peu) les premiers résultats de Markoff. La formule (2) a été donnée par M. Fréchet.

Dans le cas régulier

$$\mathcal{E}\left[\frac{S_i^{(n)}}{n}\right] \to M$$

où M *ne dépend pas de l'état initial* E_i (et même la différence $\mathcal{E}\,(S_i^{(n)} - n\,M)$ reste bornée et tend vers une limite) *et*

$$\frac{\mathcal{E}\,\{S_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]\}^2}{n} \to \sigma^2$$

où σ^2 *ne dépend pas de l'état initial* [et même la différence

$$\mathcal{E}\,\{S_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]\}^2 - n\,\sigma^2$$

reste bornée et tend vers une limite].

On remarquera que dans σ^2 n'interviennent que les x_k correspondant au groupe final unique, ceci résulte d'ailleurs directement de l'indépendance de σ^2 de l'état initial, si l'état initial se trouve dans le groupe final, les autres états n'interviennent plus.

Nous pourrions maintenant comme Romanowsky. calculer élémentairement comme plus haut les différents moments entiers de $S_i^{(n)}$ et démontrer que sauf dans le cas où $\sigma^2 = 0$ les moments de $[S_i^{(n)} - n\,M] \mid \sigma\sqrt{n}$ tendent vers les moments correspondants de la loi de Gauss. Mais ce calcul qui n'offre pas de difficulté théorique, demande des calculs très compliqués. Nous allons faire plutôt le chemin inverse : démontrer que $\frac{S_i^{(n)} - n\,M}{\sigma\sqrt{n}}$ tend vers une variable aléatoire dépendant de la loi de Gauss [5]), borner la probabilité des grandes valeur de $(S_i^{(n)} - n\,M) \mid \sigma\sqrt{n}$, et en déduire que les moments tendent aussi vers les moments de la loi de Gauss.

§ 3. — Cas régulier: $\sigma \neq 0$ la loi de Gauss

1. Une hypothèse essentielle dans ce § sera que $\sigma \neq 0$, alors l'écart-type de $S_h^{(n)}$ augmente indéfiniment. Nous allons aussi supposer ce qui ne réduit pas la généralité que $M = 0$.

Nous allons maintenant appliquer une idée qui se présente très naturellement dans l'étude des sommes de variables aléatoires enchaînées et qui est due à M. Serge Bernstein : le groupement des termes.

---

[5]) Lorsque nous dirons dans la suite qu'une variable aléatoire y_n tend vers une autre y_1 nous entendrons par là, sauf spécification contraire, que la loi de probabilité de y_n tend vers celle de y.

Nous avons $S_h^{(n)} = X_h^{(1)} + \dots + X_h^{(n)}$, groupons les $X_h^{(i)}$ en 2ρ groupes de termes consécutifs. Les groupes y_i comprendront chacun n_1 termes $X^{(i)}$ successifs et les groupes z_i chacun (en dehors du dernier) n_2 termes consécutifs, le dernier z_ϱ groupera les termes restants et l'on peut toujours s'arranger pour que le nombre des termes de z_ϱ soit $< n_1 + n_2$. Les termes z_i seront emboités entre les y_i. On aura donc

$$\begin{array}{ll} y_1 = X_h^{(1)} + \dots + X_h^{(n_1)} & z_1 = X_h^{(n_1+1)} + \dots + X_h^{(n_1+n_2)} \\ y_2 = X_h^{(n_1+n_2+1)} + \dots + X_h^{(2n_1+n_2)} & z_2 = X_h^{(2n_1+n_2+1)} + \dots X_h^{(2n_1+2n_2)}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_\varrho = X_h^{[(\varrho-1)(n_1+n_2)+1]} + \dots X_h^{[(\varrho-1)n_2+\varrho n_1]} & z_\varrho = X_h^{[\varrho n_1 + (\varrho-1) n_2 + 1)]} + \\ & + \dots + X_h^{(n)}. \end{array}$$

Nous poserons ensuite $S' = y_1 + \dots y_\varrho$, $S'' = z_1 + \dots + z_\rho$
La somme S' est formée de ρ termes y_i. Les épreuves de y_i sont séparées de ceux de y_{i-1} de n_2 épreuves. Si ce nombre n_2 est suffisamment grand, on voit facilement que l'influence de la connaissance de y_{i-1} sur la loi de probabilité de y_i est négligeable. En particulier la connaissance des valeurs précédentes influera très peu sur l'espérance mathématique et l'écart-type de y_i. Or il existe un théorème général sur les sommes de variables aléatoires enchaînées généralisant le théorème de LIAPOUNOFF C'est le lemme fondamental de M. SERGE BERNSTEIN. Il s'énonce comme suit:

2. Lemme fondamental[6]. „Soit $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $\mathcal{E}[S_n^2] = B_n$ $\mathcal{E}[u_1{}^2] + \dots + \mathcal{E}[u_n^2] = B'_n$ (on suppose toujours pour simplifier l'écriture $\mathcal{E}(u_i) = 0$). Si quel que soit l'ensemble des valeurs déjà connues de $u_1, u_2 \dots u_i \dots$ les écarts que reçoivent les espérances mathématiques de u_i et de u_i^2 ne dépassent pas respectivement α_i et β_i et en même temps l'espérance mathématique de $|u_i^3|$ reste inférieure *à* τ_i la probabilité de l'inégalité

$$z_0 \sqrt{B_n} < S_n < z_1 \sqrt{B_n}$$

aura pour limite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

---

[6] S. BERNSTEIN. Théorème limite du calcul des probabilités. Math Ann t. 97 p. 21—3.

quand

$$\frac{\sum_1^n \alpha_i}{\sqrt{B_n}} \quad \frac{\sum_1^n \beta_i}{B_n} \quad \frac{\sum_1^n \tau_i}{B_n^{3/2}} \text{ tendent vers 0".}$$

La démonstration du lemme est fort simple (voir le travail cité) **Bernstein** établit d'abord que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B'_n}{B_n} = 1$$

il pose ensuite

$$v_k = \frac{u_k}{\sqrt{B'_n}}$$

Alors on a toujours quelles que soient les valeurs de $v_{k-1} \dots v_1$ et pour $|\xi| < T$ (ξ, T certains)

$$\mathcal{E}(e^{i\xi v_k}) = 1 - \frac{\mathcal{E}[u_k^2]}{2B'_n} \xi^2 + \delta_k^n$$

où

$$|\delta_k^n| < A\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{B'_n}} + \frac{\beta'_k}{B'_n} + \frac{\tau_k}{B'^{3/2}_n}\right) = u_m^{(n)}$$

A ne dépendant que de T. On en déduit sans difficulté que

$$G_m = \mathcal{E}[e^{(i\xi \sum_1^m v_k)}] = \mathcal{E}[e^{i\xi \sum_1^{m-1} v_k} e^{i\xi v_m}] =$$

$$G_{m-1}\left[1 - \frac{\mathcal{E}(u_m^2)}{2B'_n} \xi^2\right] + \gamma_m^{(n)}$$

où $|\gamma_m^{(n)}| < \mu_m^{(n)}$. Cette équation de récurrence donne

$$G_m = E_m + E_m \sum_1^m \frac{\gamma_k^{(n)}}{E_k}$$

où

$$E_k = \left(1 - \frac{\mathcal{E}[u_1^2]}{2B'_n} \xi^2\right) \dots \left(1 - \frac{\mathcal{E}[u_k^2]}{2B'_n} \xi^2\right).$$

Comme pour $m \geqq k$, $\left|\frac{E_m}{E_k}\right| \leqq 1$ et que $\sum_1^n |\gamma_k^{(n)}| \to 0$

si $n \to \infty$, nous voyons que

$$|G_n - E_n| < \sum_1^n |\gamma_k^{(n)}| \to 0.$$

D'autre part de

$\sum_1^n \tau_i = 0\,(B_n'^{3/2})$ on déduit que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \mathcal{E}\,[u_i^2]\,/\,B_n' \right\} \to 0$; il suit

$$\lim_{n \to \infty} E_n = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Par conséquent dans tout intervalle fini la fonction caractéristique de $\Sigma\, v_k$ tend vers la fonction de la loi de Gauss réduite ; comme $\frac{B_n'}{B_n} \to 1$ il suit que la fonction caractéristique de $\frac{\sum u_k}{\sqrt{B_n}} = \sum v_k \sqrt{\frac{B_n'}{B_n}}$ tend aussi vers la fonction caractéristique de la loi de Gauss et l'on sait que cela suffit (et est d'ailleurs nécessaire) pour entraîner l'énoncé du théorème. c. q. f. d.

3. Nous allons maintenant montrer qu'en choisissant judicieusement les n_1, et n_2, on peut faire que les conditions du lemme s'appliquent aux y_i, les y_i seront alors ce que Bernstein appelle des variables aléatoires *presque indépendantes.*

Si nous connaissons $y_{i-1}, \ldots y_1$ nous avons sur y un renseignement au plus égal à celui que nous possédons lorsque nous connaissons l'état du système corespondant à la dernière épreuve de y_{i-1}. Désignons donc par $\mathcal{E}^{(j)}(y_i)$ l'espérance mathématique de y_i lorsque nous connaissons cet état et que cet état est p. ex. E_j. Nous avons

$$\mathcal{E}^{(j)}(y_i) = \sum_k P_{jk}^{n_2}\,\mathcal{E}_k(y_i) = \sum_k P_k\,\mathcal{E}_k(y_i) + \\ + \sum_k (P_{jk}^{n_2} - P_k)\,\mathcal{E}_k(y_i),$$

où $\mathcal{E}_k(y_i)$ est l'espérance mathématique de y_i si l'état réalisé à la première épreuve correspondant à y_i est E_k. Or nous savons (§ 2) que $\mathcal{E}_k(y_i)$ reste bornée, et $\sum\limits_k P_k\,\mathcal{E}_k(y_i)$ est nulle $(M = 0)$.

Comme $\left| P_{jk}^{n_2} - P_k \right| < k\, e^{--\lambda n_2}$, on a $\left| \mathcal{E}^{(j)}(y_i) -- \mathcal{E}(y_i) \right| < \alpha_i < k'\, e^{-\lambda n_2}$ k' étant une certaine constante. De la même façon on montre que $\beta_i < k'' n_1\, e^{-\lambda n_2}$. Quant à τ_i remarquons qu'on a si k_2 est le maximum des $|\ x_i\ |$

$$\tau_i < 2\, k_2\, n_1\, \mathcal{E}\,(y_i^2)$$

et

$$\mathcal{E}\,[S']^2 = \sum_1^{\varrho} \mathcal{E}\,(y_i^2) + \sum_1^{\varrho-1} \mathcal{E}\,(y_i \sum_{i+1}^{n} y_j).$$

On voit sans difficulté que $\sum_{1}^{\varrho-1} \mathcal{E}\,(y_i \sum_{i+1}^{n} y_j) \rightarrow 0$, si n_2 augmente de façon que $\rho\, e^{-\lambda n_2} \rightarrow 0$, (en effet $\mathcal{E}\,(y_i \sum_{i+1}^{n} y_j) = \mathrm{O}\,(e^{-\lambda n_2})$).

De plus

$$\mathcal{E}\,(y_i^2) = n_1\, \sigma^2 + l_i(n_1)$$

$l_i\,(n_1)$ étant borné. Donc

$$\mathcal{E}\,[\mathrm{S}']^2 = \rho\,[n_1\, \sigma^2 + l\,(n_1)] + \mathrm{O}\,(\rho\, e^{-\lambda n_2}).$$

Prenons p. e.

$$n_1 = n^{\frac{1}{3}} \qquad\qquad n_2 = n^{\frac{1}{18}}$$

(plus exactement nous prendrons les parties entières de ces 2 nombres mais cela n'a aucune importance). Alors $\rho \approx n^{\frac{2}{3}}$ et

$$\mathcal{E}\,(\mathrm{S}')^2 \approx n\sigma^2 \cdot$$

Les 3 conditions du lemme sont satisfaites, car si $n > n_0$

$$\sum \alpha_i < k'\, e^{-\lambda n_2}\, \rho \rightarrow 0, \qquad\qquad \sum \beta_i < k_2\, \rho\, n_1\, e^{-\lambda n_2} \rightarrow 0$$

et

$$\frac{\sum \tau_i}{\mathrm{B}_n^{3/2}} < \frac{2\,k_2\, n_1\, \rho\, \mathcal{E}\,(y_i^2)}{\rho^{3/2}\, \mathcal{E}\,(y_i^2)^{3/2}} \approx \frac{2\,k_2}{\sqrt{\mathcal{E}\,(y_i^2)}} < \frac{4\,k_2}{\sigma}\, n^{-\frac{1}{6}} \rightarrow 0.$$

Donc $\frac{\mathrm{S}'}{\sigma\sqrt{n}}$ suit une loi qui tend vers la loi de Gauss réduite.

De la même façon on montrerait que $\mathrm{S}'' \mid \sigma\, n^{\frac{13}{36}}$ tend vers une variable aléatoire dépendant de la loi de Gauss réduite.

On aura $\mathrm{S}^{(n)} = \mathrm{S}' + \mathrm{S}''$.

$$\frac{\mathrm{S}^{(n)}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{S}'}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{S}''}{\sigma\sqrt{n}} \cdot$$

Dans cette somme le premier terme seul restera si $n \rightarrow \infty$, $\neq 0$ le second tend en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite vers O car $\frac{\mathrm{S}''}{\sigma\sqrt{n}}$ a un écart-type équivalent à $n^{-\frac{5}{36}} \rightarrow 0$.

Pour la loi de probabilité de $S^{(n)}$ le premier terme seul importe, ce terme tendant vers une variable Gaussienne, il résulte :

Théorème. *Dans le cas régulier, la probabilité pour que* (en abandonnant l'hypothèse $M = 0$).

$$\frac{S_i^{(n)} - nM}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_i^{(t)} - M)}{\sqrt{n}}$$

soit comprise entre a *et* b *tend* si $\sigma \neq 0$ *vers*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

§ 4. — Cas régulier, $\sigma \neq 0$, la loi de Gauss, évaluation de l'erreur

Dans ce § nous avons en vue de donner une limite supérieure de l'erreur commise en remplaçant la probabilité pour que $a\sigma\sqrt{n} < S_h^{(n)} < b\sigma\sqrt{n}$ par la probabilité donnée par la loi de Gauss. Nous allons en outre démontrer d'une façon différente que $S_h^{(n)}$ suit une loi tendant vers la loi de Gauss sans utiliser le lemme fondamental de M. Bernstein. Pour cela nous évaluerons d'abord l'erreur que nous commettons sur la loi de probabilité de S' en supposant que toutes les y_t sont indépendantes.

1. (Nous sommes obligés d'introduire ici une grande quantité de désignations, que ne nous serviront pas pour la suite). Désignons par $F(a,b)$ la probabilité pour que $a\sigma\sqrt{n} < S' < b\sigma\sqrt{n}$, en supposant les y_j liées entre elles, par $F_1(a, b)$ la même probabilité en supposant que $y_2 \ldots y_\rho$ sont indépendantes de y_1 mais liées entre elles, par $F_2(a, b)$ la même probabilité en supposant maintenant y_2 et y_1 indépendantes mutuellement et de $y_3 \cdot y_\rho$, enfin par $F_{\rho-1}(a, b)$, la probabilité en supposant toutes les y_t indépendantes.

Soit $V_j(y)$ la loi de probabilité totale de y_j. Soit Pr la probabilité d'une proposition sur $y_2 + \cdots y_\rho$ à priori, Pr_k la même probabilité lorsqu'on connaît l'état E_k réalisé à la première épreuve de y_2, enfin $Pr[E_j, y_1 = y]$ la probabilité pour qu'on ait à la première épreuve de y_2 l'état E_j, si y_1 a pris la valeur y.

$Pr[E_j, y_1 = y]$ sera une moyenne des $P_{kj}^{n_2}$, car, d'après le théorème des probabilités totales et composées, $Pr[E_j, y_1 = y]$ est égale à la somme pour $k = 1, \ldots, r$ du produit de la probabilité pour qu'on ait eu l'état E_k

à la dernière épreuve de y_1 si $y_1 = y$ et de $P^{n_2}_{kj}$. Comme $\left| P^{(n_2)}_{kj} - P^{(n_1+n_2)}_{hj} \right| < c'_1 \lambda^{n_2}$ où $\lambda < 1$, on a

$$Pr[E_j, y_1 == y] = P^{(n_1+n_2)}_{hj} + \alpha(j, y) \lambda^{n_2} \qquad \text{où} \quad |\alpha(j, y)| < c'_1.$$

D'autre part nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r} Pr\{E_j, y_1 = y\} Pr_j\{a\sigma\sqrt{n} < (y_2 + \ldots + y_\varrho) \\ &\qquad\qquad + y < b\sigma\sqrt{n}\} \, d\, V_1(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{r} [P^{n_1+n_2}_{hj} + \alpha(j, y)\lambda^{n_2}] \, Pr_j(a\sigma\sqrt{n} < (y_2 + \cdots y_\varrho) \\ &\qquad\qquad + y < b\sigma\sqrt{n}) \, d\, V_1(y) \end{aligned}$$

or

$$\sum_{j=1}^{r} P^{(n_1+n_2)}_{hj} Pr_j = Pr[\ldots]$$

Pr désignant comme convenu la probabilité à priori. Donc en remarquant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Pr[a\sigma\sqrt{n} < (y_2 + \cdots y_\varrho) + y < b\sigma\sqrt{n}] \, d\, V_1(y) = F_1(a, b)$$

il suit que

$$F(a, b) = F_1(a, b) + \eta_1(a, b) \qquad \text{avec} \quad |\eta_1(a, b)| < c'_1 \lambda^{n_2}.$$

De la même façon on démontre

$$F_1(a, b) = F_2(a, b) + \eta_2(a, b) \qquad \text{avec} \quad |\eta_2(a, b)| < c'_1 \lambda^{n_2}$$

et

$$F_{\varrho-2}(a, b) = F_{\varrho-1}(a, b) + \eta_{\varrho-1}(a, b) \qquad \text{avec} \quad |\eta_{\varrho-1}(a, b)| < c'_1 \lambda^{n_2}.$$

Donc

$$F(a, b) = F_{\varrho-1}(a, b) + \sum_{j=1}^{\varrho-1} \eta_j(a, b)$$

$$|F(a, b) - F_{\varrho-1}(a, b)| < c_1 \rho \lambda^{n_2}.$$

Dans le cas positivement régulier on aurait obtenu par la même méthode

$$F(a, b) = [1 + \eta(a, b)] F_{\varrho-1}(a, b)$$

où

$$1 + \eta(a, b) = \prod_{1}^{\varrho-1} [1 + \eta'_i(a, b)] \qquad |\eta'_i(a, b)| < k_1 \lambda^{n_2}$$

et si $\rho \lambda^{n_2} \to 0$ non seulement la différence entre $F_{\varrho-1}(a, b)$ et $F(a, b)$ tend vers zéro, mais même leur rapport tend vers 1, ce qui peut être très utile.

2. *Calcul de* $F_{\varrho-1}(a, b)$. Si ρ est suffisamment grand, $F_{\varrho-1}(a, b)$, loi de probabilité d'une somme de ρ termes indépendants suivant tous sensiblement la même loi, sera très voisine de la loi de Gauss. Nous allons prendre comme plus haut $n_1 = n^{1/3}$, $n_2 = n^{1/18}$. Alors $\rho = n^{2/3}(1 - n^{-\frac{5}{18}} + \ldots)$

L'écart-type de chaque y_i sera $\sqrt{\sigma^2 n^{\frac{1}{3}} + r_i}$ où r_i est borné. Le carré de l'écart-type total sera $(\sigma^2 n^{\frac{1}{3}} + r') n^{\frac{2}{3}} (1 - n^{-\frac{5}{18}} + \ldots) = \sigma^2 n [1 - O(n^{-\frac{5}{18}})]$.

Posons $B_n = \sum_i \{\mathcal{E}(y_i^2) - [\mathcal{E}(y_i)]^2\} = \sigma^2 n [1 - O(n^{-\frac{5}{18}})]$

$\sum_i \mathcal{E}(y_i)$ reste borné. $\mathcal{E}(|y_i^3|) < k n_1 \mathcal{E}(y_i^2) < 2 k n_1^2 \sigma^2$

(si k est le maximum des x_i).Le théorème de Liapounoff nous dit alors que la probabilité pour que $\sum y_i - \mathcal{E}[\Sigma y_i]$ soit comprise entre $a\sqrt{B_n}$ et $b\sqrt{B_n}$ est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + r_n(a, b)$$

où

$$|r_n(a, b)| = O\left(\varepsilon^3 \lg \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon^3 = \frac{\sum \mathcal{E} |y_i - \mathcal{E}(y_i)|^3}{B_n^{3/2}}$$

dans notre cas

$$\varepsilon^3 < \frac{2k}{\sigma n^{\frac{1}{6}}} \text{ donc}$$

$$r_n(a, b) = O(\lg n \,.\, n^{-\frac{1}{6}})$$

et un calcul élémentaire très facile montre aussi que

$$F_{\varrho-1}(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx+O(\lg n\,.\,n^{-\frac{1}{6}})$$

Avec les valeurs prises pour ρ, n_2 et n_1, on a

$$|F(a,b)-F_{\varrho-1}(a,b)|<\rho c_1' \lambda^{n_2}< c_1' \, n \, \lambda \sqrt[18]{n}=0\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a donc aussi

$$F(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx+O(n^{-\frac{1}{6}}\lg n).$$

En calculant de même la probabilité pour que

$$a\,\sigma\, n^{\frac{13}{36}}<S''<b\,\sigma\, n^{\frac{13}{36}}$$

on trouvera

$$Pr\left[a\,\sigma\, n^{\frac{13}{36}}<S''<b\,\sigma\, n^{\frac{13}{36}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx+0\,(n^{-\frac{1}{18}}).$$

3. Passons maintenant à l'étude de la $Pr\left[a\sigma\sqrt{n}<S<b\sigma\sqrt{n}\right]$. Les inégalités

(A) $\qquad a\sigma\sqrt{n}+\tau<S'<b\sigma\sqrt{n}-\tau$

(B) $\qquad -\tau<S''<\tau$

entraînent l'inégalité

(C) $\qquad a\sigma\sqrt{n}<S'+S''<b\sigma\sqrt{n}$

de même les inégalités (B) et (C) entraînent l'inégalité

(D) $\qquad a\sigma\sqrt{n}-\tau<S'<b\sigma\sqrt{n}+\tau.$

Désignons par P (A)... etc. la probabilité de l'inégalité (A) etc. on aura

$$P(C)\geqq P(A\,B) \qquad\qquad P(D)\geqq P(C\,B).$$

Une inégalité classique nous enseigne que

$$P(A\,B)\geqq P(A)+P(B)-1$$
$$P(C\,B)\geqq P(C)+P(B)-1$$

Donc

$$P(C)\geqq P(A)+P(B)-1 \qquad P(D)\geqq P(C)+P(B)-1$$
$$P(D)+1-P(B)\geqq P(C)\geqq P(A)+P(B)-1.$$

Nous aurons

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + O(n^{-\frac{1}{6}} \lg n) + O\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)$$

$P(B) > 1 - \frac{2\sigma^2 n^{\frac{13}{18}}}{\tau^2}$ d'après le théorème de Bienaimé-Tchebyscheff.

Si je prends $\tau = n^{\beta} n^{\frac{13}{36}}$, alors $P(B) - 1 = O(n^{-2\beta})$

et $\frac{\tau}{\sqrt{n}} = n^{\beta - \frac{5}{36}}$, prenons donc $\beta = \frac{5}{108}$, on aura $P(B) - 1 = O(n^{-\frac{5}{54}})$

et $\frac{\tau}{\sqrt{n}} = n^{-\frac{5}{54}}$; comme $\frac{5}{54} > \frac{1}{11}$ par conséquent :

$$Pr\left[a\sigma\sqrt{n} < S_h^{(n)} < b\sigma\sqrt{n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 0(n^{-\frac{1}{11}}).$$

4. Cette formule suffisante lorsque *a* et *b* sont petites ne nous enseigne rien pour la probabilité des grandes valeurs. Pour que nous ayons

$$| S^{(n)} | > \theta\sigma\sqrt{n}$$

il faut qu'on ait au moins l'une des inégalités

$$| S' | > \frac{\theta}{2} \sigma\sqrt{n'} \qquad | S'' | > \frac{\theta}{2} \sigma\sqrt{n'}.$$

Donc

$$Pr[\,| S^{(n)} | > \theta\sigma\sqrt{n}\,] < Pr[\,| S' | > \frac{\theta}{2}\sigma\sqrt{n}\,] + Pr[\,| S'' | > \frac{\theta}{2}\sigma\sqrt{n}\,].$$

Or nous avons vu que pour évaluer les $Pr[S' >]$ et $Pr[S'' >]$, il suffisait d'évaluer les mêmes probabilités lorsque les y_i (respectivement les z_i) sont supposées indépendantes et *d' y* ajouter un terme correctif qui ne peut pas dépasser $K\, n\, e^{-\lambda n^{1/18}} = 0\,(e^{-\lambda n^{1/19}})$. Dans le cas positivement régulier même, il suffit de multiplier les mêmes probabilités calculées en supposant les y_i ou z_i indépendantes par un facteur qui sera très voisin de 1 si *n* est suffisamment grand. Or pour les probabilités des grandes valeurs dans le cas de l'indépendance l'on a une bonne évaluation due à Kolmogoroff. En considérant avec Bernstein $\mathcal{E}[e^{tS_n}]$ où $t > 0$ et en appliquant le raisonnement de Tchebyscheff, il trouve

$$Pr'\{\,| S' - \mathcal{E}[S'] | > X\,\} < e^{-tX + \frac{t^2 B}{2}\left(1 + \frac{tM}{2}\right)}, \quad | t M | < 1$$

où Pr' indique que la probabilité est calculée en supposant les grandeurs indépendantes et où $B = B_n$ et M le maximum de $y_i - \mathcal{E}(y_i)]$. On *a* une formule analogue pour S″. Prenons $X = \sigma\sqrt{n} \,.\, n^i$ et

$$t = \frac{1}{\sqrt{B}} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \text{ Comme } M < k\sqrt[3]{n} \text{ on trouve}$$

$$Pr'[\,|S' - \mathcal{E}(S')| > n^i\sigma\sqrt{n}\,] < e^{-\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{B}}}\, n^i \,.\; e^{\frac{1}{2}\left[1+\frac{k}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{B}}\right)\frac{n}{\sigma}^{-\frac{1}{6}}\right]}$$

Or

$\sqrt{B} \approx \sigma\sqrt{n}$, $\mathcal{E}(S')$ reste borné K′. Donc (si $n > n_0$)

$$Pr'\{\,|S'| > 2\,n^i\sigma\sqrt{n}\,\} < e^{-n^i}.$$

Et l'on trouve de même que (pour $n > n_0$)

$$Pr'\{\,|S''| > 2\,n^i\sigma\sqrt{n}\} < \exp\left(-\,n^{i+\frac{5}{36}}\right).$$

On aura donc dans le cas positivement régulier ($n > n_6$)

$$Pr\,\{\,|S| > 4\,n^i\sigma\sqrt{n}\,\} < \exp\{\,-\,n^i\}$$

dans le cas régulier on aura

$$Pr\{\,|S| > 4\,n^i\sigma\sqrt{n}\,\} < \exp\{-\,n^i\} + 0\left(\exp\left(-\,n^{\frac{1}{19}}\right)\right).$$

Ces formules peuvent être améliorées de beaucoup. Elles suffisent pour nos buts.

§ 5. — Cas régulier, $\sigma \neq 0$. Convergence des moments

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer.

Théorème : *Dans le cas régulier si* $\sigma \neq 0$, *les moments de* $\dfrac{S_j^{(n)} - nM}{\sigma\sqrt{n}}$ *tendent vers les moments correspondants de la loi de* GAUSS *réduite.*

Démonstration. On peut supposer $M = 0$. Soit $F_n(t)$ la loi de probabilité de $S_j^{(n)} / \sigma\sqrt{n}$. $S^{(n)}$ varie de $-\,K\,n$ à $+\,K\,n$.

Nous démontrerons que

$$\int_0^\infty t^i \, d\, \mathrm{F}_n(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^i e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

et $(i > 0)$

$$\int_{-\infty}^0 |t|^i \, d\, \mathrm{F}_n(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 |t|^i e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

il en résultera le théoréme. Nous nous bornerons à $\int_0^\infty t^i \, d\, \mathrm{F}_n(t)$, la démonstration est identique pour $\int_{-\infty}^0$. Comme $\mathrm{S}_i^{(n)}$ varie de $-\mathrm{K}\, n$ à $+\mathrm{K}\, n$, nous aurons[7]

$$\int_0^\infty t^i \, d\, \mathrm{F}_n(t) = \int_0^{\frac{\mathrm{K}}{\sigma}\sqrt{n}} t^i \, d\, \mathrm{F}_n(t) = \int_0^{n^a} + \int_{n^a}^{\frac{\mathrm{K}}{\sigma}\sqrt{n}}$$

Envisageons $\int_0^{n^a}$, divisons l'intervalle d'intégration dans un grand nombre d'intervalles de même lonqueur Δ, soient

$$0, t_1, t_2, \ldots t_\mathrm{N} = n^a$$

les extrémités

$$\int_{t_e}^{t_{e+1}} t^i d\, \mathrm{F}_n(t) = \{t_e^i + i\,\theta_e\, \Delta\, [t_e + \theta'_e\, \Delta]^{i-1}\} [\mathrm{F}_n(t_{e+1}) - \mathrm{F}_n(t_e)]$$

$$\mathrm{F}_n(t_{e+1}) - \mathrm{F}_n(t_e) = \Phi(t_{e+1}) - \Phi(t_e) + 0(n^{-\frac{1}{11}})$$

où

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\int_{t_e}^{t_{e+1}} t^i d\, \Phi(t) = \{t_e^i + i\,\theta_e'''\, \Delta\, (t_e + \theta_e'''\Delta)^{i-1}\} [\Phi(t_{e+1}) - \Phi(t_e)]$$

---

[7] Nous supposoos $i \geqq 1$; si $i < 1$, il faut modifier très légèrement le raisonnement.

$$\left| \int_{t_e}^{t_{e+1}} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) - \int_{t_e}^{t_{e+1}} t^i \, d\Phi(t) \right| < 2 i \Delta t_{e+1}^{i-1} \left[\Phi(t_{e+1}) - \Phi(t_e) \right] + t_{e+1}^i \, 0 \left(n^{-\frac{1}{11}}\right).$$

$$\left| \int_0^{n^a} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) - \int_0^{n^a} t^i \, d\Phi(t) \right| < 2 i \Delta \int_0^{\infty} t^{i-1} \, d\Phi(t) + n^{ia} \, n^a \, \frac{1}{\Delta} \, 0 \left(n^{-\frac{1}{11}}\right).$$

Si nous prenons $(i+2)\, a < \frac{1}{11}$, $\Delta = n^{-a}$, alors

$$\int_0^{n^a} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) \to \int_0^{n^a} t^i \, d\Phi(t) \to \int_0^{\infty} t^i \, d\Phi(t).$$

Evaluons

$$\int_{n^a}^{\infty} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) = \int_{n^a}^{\frac{\mathrm{K}\sqrt{n}}{\sigma}} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) < \left[\frac{\mathrm{K}\sqrt{n}}{\sigma}\right]^i \mathrm{Pr}\left[\mathrm{S}_j^{(n)} > n^a \sigma \sqrt{n}\right].$$

Or nous avons vu dans le § précédent que

$$\mathrm{Pr}\left[\mathrm{S}^{(n)} > \sigma \sqrt{n} \; n^a\right] < \exp\left[-\frac{n^{\alpha}}{4}\right] + 0\left\{\exp\left[-n^{\frac{1}{19}}\right]\right\}$$

donc

$$\int_{n^a}^{\infty} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) \to 0 \text{ quel que soit } a > 0$$

et

$$\int_0^{\infty} t^i \, d\mathrm{F}_n(t) \to \int_0^{\infty} t^i \, d\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^i e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

c. q. f. d.

§ 6. — Cas positivement régulier, analyse du cas où $\sigma = 0$

1. Nous avons obtenu dans les paragraphes précédents un certain nombre de résultats sur les variables aléatoires $\frac{S_h^{(n)} - nM}{\sigma\sqrt{n}}$ si $\sigma \neq 0$. Pour être complet il nous faut voir ce qui arrive si $\sigma = 0$. σ ne dépendant que des valeurs des x_i dans le groupe final nous pouvons nous borner dans ce qui suit au cas positivement régulier c. à. d. supposer qu'avec probabilité 1 on se trouve à l'instant initial dans le groupe final. Nous supposerons pour simplifier l'écriture $M = 0$. Alors nous savons que

$$\mathcal{E}[S^{(n)}] = 0, \quad \mathcal{E}[S^{(n)}]^2 \to l$$

en nous bornant aux $S^{(n)}$ (distribution initiale, distribution stable). Il suit que $S^{(n)}$ reste borné au sens de Bernoulli en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite (Théorème de Tschebyscheff).

Deux cas sont à distinguer: $l = 0$ et $l \neq 0$.

$l = 0$. Alors

$$\mathcal{E}[S^{(n)}]^2 \to 0 \qquad \mathcal{E}[S^{(n)}]^2 = \mathcal{E}[S^{(n-1)}]^2 + 2\,\mathcal{E}[S^{(n-1)} X^{(n)}] + \mathcal{E}[X^{(n)}]^2.$$

Les deux premiers termes tendent vers 0, car $|\mathcal{E}[S^{(n-1)} X^{(n)}]| < \sqrt{\mathcal{E}(S^{(n-1)})^2 . \mathcal{E}[X^{(n)}]^2}$, il faut donc que $\mathcal{E}[X^{(n)}]^2$ tende aussi vers 0. Or $\mathcal{E}[X^{(n)}]^2$ est égal quel que soit n à $\sum P_i\, x_i^2$ (et $P_i > 0$).

Ceci devant être égal à zéro, nous concluons que si $l = 0$, tous les x_i sont nuls.

2. $l \neq 0$. Ce cas est plus difficile à traiter. Effectuons le groupement de termes suivant

$$y_0 = X^{(1)} + \dots + X^{(m)} \qquad\qquad z_0 = X^{(m+1)} + \dots X^{(2m)}$$

. . . .

$$y_i = X^{(2im+1)} + \dots + X^{(2i+1)m} \qquad\qquad z_i = X^{(2i+1)m+1} \dots + X^{(2i+2)m}$$

. . . .

$$y_\varrho = X^{(2\varrho m+1)} + \dots X^{(2\varrho+1)m}.$$

Soit $S_\varrho = S^{[(2\varrho+1)m]}$ $S_1^\varrho = y_0 + y_1 + \dots + y_\varrho$ $S_2^\varrho = z_0 + \dots + z_{\varrho-1}$.

Nous avons $$S_\varrho = S_1^\varrho + S_2^\varrho.$$

Prenons m très grand mais fixe, suffisamment grand pour que

$$\mathcal{E}(y_i^2) = l + \varepsilon_m = l_m > \frac{3}{4}\,l$$

et pour que

$$\mathcal{E}(y_i \sum_{j=i+1}^{\infty} y_j) = \mu_m \qquad\qquad |\mu_m| < \frac{l}{4}.$$

$$\mathcal{E}[S_i^\varrho]^2 \approx \rho\,(l_m + \mu_m) \to \infty$$

si ρ augmente. Les § précédents nous enseignent que $\dfrac{S_1}{\sqrt{\rho\,(l_m + \mu_m)}}$ tend vers la loi de Gauss. Pour que

$$S_\varrho = S_1^\varrho + S_2^\varrho$$

reste borné, il faut qu'en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite on puisse écrire $S_2^\varrho = - S_1^\varrho + \sigma_\varrho \quad (\sigma_\varrho = S_\varrho)$, σ_ϱ étant borné.

La connaissance de valeurs de S_1^ϱ nous fixe donc en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite sur la valeur de la somme S_2^ϱ à une quantité aléatoire bornée près. Or la connaissance des valeurs de S_1^ϱ nous indique moins sur S_2^ϱ, que la connaissance de tous les y_i composant S_1^ϱ et cette dernière connaissance nous donne un renseignement au plus équivalent à celui fourni par la connaissance des états réalisés aux épreuves extrêmes des y_i c'est à dire des états réalisés aux épreuves d'ordre $(2i+1)\,m$ et $(2i+2)\,m+1$.

Supposons maintenant que nous connaissons non seulement la valeur de S_1^ϱ mais aussi les états que le système a pris à ces épreuves extrêmes des y. Les termes z sont emboités dans les y. La loi de probabilité des z_i est bien déterminée par la connaissance du dernier état de y_i et du premier état de y_{i+1}, c'est à dire par la connaissance des états du système aux épreuves d'ordre $(2i+1)\,m$ et $(2i+2)\,m+1$. Désignons par $[z]_j^k$, ce qui devient z lorsqu'on sait qu'à l'épreuve $(2i+1)m$ on ait eu l'état E_j, à l'épreuve $(2i+2)\,m+1$ l'état E_k. Les $[z_i]_{j_i}^{k_i}$ sont indépendants l'un de l'autre. Si S_1^ϱ est donc connu et de plus les états extrêmes de y, alors nous pouvons écrire

$$S_2^\varrho = [z_0]_{j^0}^{k^0} + \,..\, + [z_{\varrho-1}]_{j\,\varrho-1}^{k\,\varrho-1}$$

S_1^ϱ devient la somme de ρ quantités bornées indépendantes et cette somme doit être de la forme $S_1^\varrho + \sigma_\varrho$, σ_ϱ étant borné, en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite. Or on sait que la condition nécessaire et suffisante pour cela est que

$$\sum_{i=0}^{\varrho-1} \mathcal{E}\left\{[z_i]_{j_i}^{k_i} - \mathcal{E}[z_i]_{j_i}^{k_i}\right\}^2$$

reste borné quel que soit ρ en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite. D'autre part les $[z_i]_j^k$ suivant tous la même loi quel que soit i, désignons par δ_j^k l'écart-type de $[z_i]_j^k$. Il n'y a qu'un nombre fini r^2 de combinaisons j, k possibles, soit n_{jk} le nombre des $[z_i]_j^k$, alors

$$\sum_0^{\varrho-1} \mathcal{E}\left\{[z_i]_{j_i}^{k_i} - \mathcal{E}[z_i]_{j_i}^{k_i}\right\}^2 = \sum_{j,k} n_{jk}^\varrho (\delta_j^k)^2.$$

Comme $\sum_{j,k} n^{\rho}_{jk} = \rho$, il y a toujours au moins un des n^{ρ}_{jk} qui augmente indéfiniment avec probabilité positive. Pour celui il faut, pour que $\sum_{j,k} n^{\rho}_{jk} (\sigma^{k}_{j})^2$ reste borné, que σ^{k}_{j} soit nulle. Or remarquons que les valeurs S^{ρ}_{1} pour lesquelles un n^{ρ}_{jk} est $<$ L ont une probabilité qui tend vers 0, si ρ augmente indéfiniment. En effet on peut supposer que m soit suffisamment grand pour que $P^{m}_{ij} P^{m+1}_{jk} > \frac{1}{2} P_j P_k > 0$ Alors désignons par $[A_i]^{k}_{j}$ l'événement consistant dans ce que à l'épreuve $(2i+1)\,m$ l'état E_j soit réalisé et à l'épreuve $(2i+2)\,m+1$ l'état E_k. Or quels que soient les $[A_{i-1}]^{k_{i-1}}_{j_{i-1}}$ réalisés précédemment la probabilité de $[A_i]^{k}_{j}$ est $> \frac{1}{2} P_j P_k$. La probabilité pour que l'événement $[A_i]^{k}_{j}$ ne soit réalisé pour aucun i compris entre i_1 et i_2 est donc inférieure à $(1 - \frac{1}{2} P_j P_k)^{i_2 - i_1}$ et tend donc vers zéro avec $(i_2 - i_1)^{-1}$. Il suit que l'événement $[A_i]^{k}_{j}$ est réalisé en dehors de cas de probabilité nulle une infinité de fois. Donc si ρ tend vers l'infini en dehors de valeurs de S^{ρ}_{1} ayant une probabilité totale tendant vers zéro, tous les $n^{\rho}_{jk} \to \infty$ presque sûrement. Donc *tous les σ^{k}_{j} sont nuls.*

3. Interprétons ce résultat: les σ^{k}_{j} sont les écarts-types des z_i lorsque l'on connait l'état immédiatement avant et l'état immédiatement après les épreuves correspondantes à z_i. Nous voyons donc que $X^{1}_{j} + \dots + X^{m}_{j}$ est bien déterminé si nous connaissons l'état du système à l'épreuve $m+1$, donc à fortiori à l'épreuve m. Ceci est vrai pour tout m suffisamment grand, or il est facile de l'étendre à tout m entier ; en effet supposons que

$$X^{(1)}_{j} + \dots + X^{(m_1)}_{j}$$

soit encore aléatoire lorsque nous connaissons l'état du système à l'épreuve d'ordre m_1; soit E_{k_1} un état avec $P^{m_1}_{jk_1} > 0$. Nous avons

$$X^{(1)}_{j} + \dots + X^{(m)}_{j} = \varphi_j\,(m, k)$$

c. à. d. cette somme est une fonction bien determinée de m, et de l'état E_k à l'épreuve d'ordre m, pour m suffisamment grand. D'autre part il existe pour tout m suffisamment grand un chemin de E_j à E_k allant de E_j à E_{k_1} en m_1 épreuves et de E_{k_1} en E_k en $m - m_1$ épreuves. Si $m - m_1$ est suffisamment grand les valeurs de $X^{(1)}_{j} + \dots + X^{(m)}_{j}$ et de $X^{(1)}_{k_1} + \dots$

$+ X_{k_1}^{(m-m_1)}$ ne sont pas aléatoires si l'on connaît l'état E_k réalisé à la dernière épreuve. Or le long du chemin considéré l'on a

$$\varphi_j\,(m, k)) = X_j^{(1)} + \dots + X_j^{(m)} = X_j^{(1)} + \dots\ X_j^{(m_1)} + X_{k_1}^{(1)} + X_{k_1}^{(m-m_1)}.$$

Comme une quantité non aléatoire ne peut pas être la somme d'une quantité aléatoire et d'une autre quantité non aléatoire: *quel que soit* m $X^{(1)}+\dots+X^{(m)}$ *est bien déterminé si l'on connait l'état initial et l'état à l'épreuve d'ordre* m. Mais il pourrait paraître que les $\varphi_j\,(m, k)$ dependent de m. Il est facile de démontrer que cela n'est pas le cas. Pour cela considérons le $\varphi_j\,(m, j)$. Il faut évidemment pour que cette quantité soit définie qu'il existe un chemin d'ordre m de E_j en E_j. Les $\varphi_j\,(m, j)$, si $m \rightarrow \infty$, sont bornés car les $X_j^{(1)} + \dots + X_j^{(m)}$ sont bornés en dehors de cas de probabilité nulle, et la probabilité pour que l'état réalisé à l'épreuve m soit E_j tend vers $P_j > 0$. D'autre part les $\varphi_j\,(m, j)$ ne dépendent pas du chemin suivi pour aller de E_j en E_j. Considérons alors un chemin quelconque de E_j en E_j d'ordre m; soit $\varphi_j\,(m, j)$ la valeur de $X^{(1)} + \dots + X^{(m)}$ correspondante à ce chemin, on a évidemment $X^{(1)} + \dots X^{(m)}$ prise ρ fois le long du chemin considéré — $\varphi_j(\rho m, j) = \rho\,\varphi_j\,(m, j)$. Ceci devant être borné, il faut que $\varphi_j\,(m, j) = 0$ quels que soient m et j. Maintenant supposons qu'il existe un $\varphi_j\,(m, k)$ dépendant de m, alors il y aura deux chemins d'ordres m_1 et m_2 de E_j en E_k avec des $\varphi_j\,(m, k)$ differents; considérons un chemin fixe d'ordre m_3 de E_k en E_j, on aura

$$\varphi_j\,(m_1, k) + \varphi_k\,(m_3, j) = \varphi_j\,(m_1 + m_3, j) = 0 = \varphi_j\,(m_2, k) + \varphi_k\,(m_3, j)$$

donc

$$\varphi_j\,(m_1, k) = \varphi_j\,(m_2, k) = \varphi_{jk}\,;$$

on aura

$$\varphi_{jj} = 0 \text{ et}$$
$$\varphi_{jk} = \varphi_{jj_1} + \varphi_{j_1\,j_2} + \dots + \varphi_{jek}$$
$$\varphi_{kj} = -\varphi_{kj}.$$

On voit d'ailleurs sans peine que si $X_{i_1} + X_{i_2} + \dots + X_i = 0$ le long de tout chemin fermé les $X^{(1)} + \dots X^{(m)}$ sont des fonctions bien déterminées de l'état initial et de l'état final. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème : *Dans le cas positivement régulier pour que l'écart-type de* $S_i^{(n)}$ *reste borné, il faut et il suffit que, après soustraction d'une constante* M *de chaque* x_i, *la somme des* x_i *prise le long d'un chemin fermé quelconque soit identiquement nulle.*

Nous voyons que si $\sigma = 0$, S_i^n *prendra avec probabilité* $P_{ik}^{(n)}$ *la valeur* $nM + \varphi_{ik}$ *et si* n *augmente indéfiniment*

$$S_i^{(n)} - nM$$

prendra à la limite avec probabilité P_k *les valeurs* φ_{ik}. Dans ce cas donc la loi de probabilité de $S_i^{(n)} - nM$ dépend d'une façon essentielle du premier indice.

$$\mathcal{E}[S_j^{(n)} - nM] \to \sum_{k=1}^{r} (x_k - M) S_{jk} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_{jk} P_k - \sum_{k=1}^{r} x_k S_{jk}$$

$$\mathcal{E}[S_j^n - nM]^2 \to \sum_{k=1}^{r} P_k \varphi_{jk}^2 .$$

4. Donnons un exemple de ce cas : Prenons par exemple trois états, supposons qu'on passe nécessairement de E_1 à E_2, mais qu'on puisse aller de E_2 à E_3 et à E_1, enfin à partir de E_3 on peut rester à E_3 ou aller à E_1. La matrice des p_{ij} aura la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & 0 & p_{33} \end{vmatrix} .$$

On vérifie facilement qu'on est dans le cas positivement régulier (la matrice est indécomposable, et non cyclique), affectons à E_1 la valeur 1, à E_2 la valeur -1 et à E_3 la valeur 0, alors $\varphi_{12} = -1$,

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{33} = 0, \ \varphi_{13} = -1, \ \varphi_{23} = 0, \ \varphi_{21} = 1, \ \varphi_{31} = 1, \ \varphi_{32} = 0.$$

On peut évidemment construire des exemples plus compliqués.

Mais il *y* a un cas où l'on a nécessairement $\varphi_{jk} = 0$. C'est le cas de Markoff. En effet si $p_{ii} > 0$, alors il existe un chemin de l'état E_i à E_i ne passant pas par d'autres états. Apres réduction d'une constante M des x_i, la somme des $x_i - M$ prise le long d'un chemin fermé doit être nulle, or prise le long de $E_i E_i$ cette somme se réduit à $x_i - M$. Donc tous les $x_i = M$; On n'a pas $l \neq 0$. Ceci explique que Markoff qui suppose aussi que les x_i sont différents (et $p_{ij} > 0$) n'a pas eu à s'occuper du cas où σ égale 0.

§ 7. — Cas d'une matrice indécomposable et cyclique. Les X_j^n et les $S_j^{(n)}$

Le cas positivement régulier correspond à une matrice $\| p_{ij} \|$ indécomposable et non cyclique. Supposons maintenant que la matrice des p_{ij} est toujours indécomposable mais qu'elle est cyclique. Elle admettra alors d ($d > 1$) sous-groupes cycliques. D'après ce que nous savons sur le mouvement circulaire entre ces sous-groupes cycliques, on doit s'attendre à ce que les $X_j^{(n)}$ suivent une loi asymptotiquement périodique en n avec période d, et que cette periode s'éliminera en général pour les sommes $S_j^{(n)}$. C'est cela que nous allons vérifier et préciser dans ce qui suit.

1. *Les* $X_j^{(n)}$. Supposons que nous partons de l'état E_j dans $\bar{l}$, alors nous serons à l'épreuve n dans le sous-groupe $\bar{l}_n$ [$n \equiv l_n - l$ (mod d)] et

$$P_{jk}^{(n)} \to P_k > 0 \text{ si } E_k \in \bar{l'} \text{ et } n \equiv l' - l \pmod{d}$$

$$P_{jk}^{(n)} \equiv 0 \qquad \text{„} \qquad n \not\equiv l' - l \pmod{d}$$

$X_j^{(n)}$ est une variable aléatoire qui prend la valeur x_k si E_k est réalisé à l'épreuve n, cette réalisation ayant la probabilité $P_{jk}^{(n)}$. Il suit qu'á chaque épreuve les seules valeurs possibles poûr $X_j^{(n)}$ sont les valeurs correspondantes aux états du sous-groupe l_n. Asymptotiquement si $n \to \infty$, $X_j^{(n)}$ prendra avec probabilité P_k les valeurs x_k ($E_k \in \bar{l}_n$), $\bar{l}_n$ variant périodiquement avec n. Donc

$$\mathcal{E}[X_j^{(n)}] \approx \sum_k P_k\, x_k \equiv M_{l_n} \qquad \text{où } E_k \in \bar{l}_n$$

$$\mathcal{E}\{X_j^n - \mathcal{E}[X_j^{(n)}]\}^2 \approx \sum_k P_k(x_k - M_{\bar{l}_n})^2 \quad \text{„}$$

2. *Les* $\bar{X}_j^n$. Utilisons maintenant l'artifice que nous avons indiqué dans le § 2 de l'Introduction et qui consistait somme toute à considérer non pas chaque état isolémént, mais l'ensemble des états pris par le système en d épreuves successives. Posons

$$\theta_i = E_{i_1} \dots E_{i_d}.$$

La matrice des τ_{ij} correspondant aux θ_i se décomposera en d sousmatrices correspondant aux groupes finals de θ_i et ces groupes finals se distinguerons par le sous-groupe cyclique auquel appartient le premier état E_{i_1}, car nous savons qu'on ne peut pas passer de l'état $\theta_i = E_{i_1} \dots E_{i_d}$ où $E_{i_1} \in \bar{l}, \dots E_{i_d} \in \overline{l-1}$ à l'état $\theta_j = E_{j_1} \dots E_{jd}$

où $E_{i_1} \in \bar{l_1}, \dots E_{jd} \in \overline{l_1 - 1}$ avec $l_1 \neq l$.

Nous ne nous occuperons ici que des θ_i de la forme

$$\theta_i = E_{i_1} \dots E_{i_d} \quad \text{où } E_i \in \bar{1}, \dots E_{i_d} \in \bar{d} \tag{1}$$

et étant réalisables ($p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{d-1} i_d} > 0$). Alors à ces θ_i correspondent des probabilités de passage $\tau_{ij}^{(m)}$ et on s'y trouve dans le cas positivement régulier ($\tau_{ij}^{m} \rightarrow \mathrm{P}_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j\ d-1\ jd}$).

Si nous affectons à chaque état E_i un nombre x_i, nous faisons correspondre à chaque θ_i le nombre $\overline{x}_i = x_{i_1} + \ldots x_{i_d}$, et nous aurons à étudier les

$$\overline{\mathrm{X}}_j^{m} = \mathrm{X}_{jd}^{(m-1)\,d+1} + \ldots \mathrm{X}_{jd}^{md}$$

c'est à dire les variables aléatoires égales à $\overline{x}_i$ si θ_i est réalisé à la m-ième épreuve à partir de l'état θ_j. Nous pouvons appliquer aux $\overline{\mathrm{X}}_j^{(m)}$ les résultats démontrés dans le cas positivement régulier. Il suit que la loi de probabilité de $\overline{\mathrm{X}}_j^{(n)}$ tend vers une limite indépendante de l'état initial θ_j (mais on suppose toujours que θ_j est de la forme (1)). A la limite $\overline{\mathrm{X}}_j^{(m)}$ prendra avec probabilité $\tau_i = \mathrm{P}_{i_1} p_{i_1\ i_2} \cdots p_{i\ d-1\ i_d}$ la valeur

$$x_{i_1} + \cdots x_{i_d} = \overline{x}_i.$$

L'espérance mathématique de $\overline{\mathrm{X}}_j^{(m)}$ tendra vers une limite que nous désignerons par M d

$$\mathcal{E}\,[\,\overline{\mathrm{X}}_j^{(m)}\,] \rightarrow \mathrm{M}\ d = \sum_{i_1,\ i_2 \ldots, i_1} \mathrm{P}_{i_1}\ p_{i_1 i_2} \cdot\ \cdot p_{i_{d-1} i_d} (x_{i_1} + \ldots + x_{i_d})$$

$$= \sum \mathrm{P}_{i_1} x_{i_1} + \cdots + \sum \mathrm{P}_{j_1} x_{j_1}$$

Chaque somme étant étendue aux états d'un sous-groupe $\overline{l}$ différent.

3. *Les* $\overline{\mathrm{S}}^{(m)}$. Soit

$$\overline{\mathrm{S}}^{(m)} = \overline{\mathrm{X}}^{(1)} + \ldots + \overline{\mathrm{X}}^{(m)}$$

alors nous savons que $\mathcal{E}\,[\,\overline{\mathrm{S}}^{m}\,] = d\,m\,\mathrm{M} + r\,(m)$, $d\,\mathrm{M}$ étant indépendant de la distribution initiale des θ_i et $r\,(m)$ tendant vers une limite qui dépend de la distribution initiale. Enfin, ou $\mathcal{E}\,[\,\overline{\mathrm{S}}^{(m)} - d\,m\,\mathrm{M}\,]^2$ reste borné, ou $\mathcal{E}\,[\,\overline{\mathrm{S}}^{m} - d\,m\,\mathrm{M}]^2 = \sigma^2\,m\,d + l\,(m)$, σ né dépendant pas de la distribution initiale et $l\,(m)$ tendant vers une limite. Dans ce dernier cas $\dfrac{\overline{\mathrm{S}}^{(m)} - d\,m\,\mathrm{M}}{\sigma\sqrt{m\,d}}$ tend vers une variable aléatoire dépendant de la loi de Gauss réduite si m tend vers l'infini et les moments de $\dfrac{\overline{\mathrm{S}}^{(m)} - d\,m\,\mathrm{M}}{\sigma\sqrt{m\,d'}}$ tendent vers les moments correspondants de la loi de Gauss. Tout ceci indépendemment de la distribution initiale. Dans le cas où $\sigma = 0$ la somme des valeurs de $\overline{\mathrm{X}}_j - d\ \mathrm{M}$ prises le long d'un chemin fermé quelconque est nulle et les $\overline{\mathrm{S}}_j^{(m)} - d\,\mathrm{M}$ sont bien déterminés si l'on connaît l'état initial et l'état à la dernière épreuve correspondant à $\overline{\mathrm{S}}_j^{(m)}$,

4. *Passage aux* $S_i^{(n)}$. Remarquons qu'on a

$$\bar{S}_j^{(m)} = X_{jd}^{(1)} + \dots + X_{jd}^{(m\,d)}$$

E_{jd} étant le dernier état de θ_j et appartient au sous-groupe $\bar{d}$.

On a donc

$$\bar{S}_j^{(m)} = S_{jd}^{(md)}$$

et les énoncés ci-dessus sur les $\bar{S}_j^{(m)}$ deviennent des énoncés sur les S_{jd}^{md} où $E_{jd} \in \bar{d}$. Supposons maintenant que $E_l \in \bar{l}$, et soit n quelconque

$$n = d - l + m\,d + n_1 < , (0 \leq n_1 < d),$$

alors

$$S_i^{(n)} = X_i^{(1)} + \dots X_i^{(d-l)} + X_i^{(d-l+1)} + \dots + X_i^{(md+d-l+1)} + \dots + X_i^{(n}$$

or $X_i^{(d-l+1)} + \dots + X_i^{(md+d-l)}$ est une $\bar{S}^{(m)}$, car à l'épreuve $d - l$ le système est dans $\bar{d}$.

Dans la somme $S_i^{(n)}$ la partie différente de $\bar{S}^{(m)}$ est négligeable devant $\bar{S}^{(m)}$; si $R_i^{(n)}$ est cette partie, on a $|R_i^{(n)}| < 2\,d\,k$, où k est le maximum des x_i. Il suit d'abord que

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}] = n\,M + r_i\,(n)$$

$r_i\,(n)$ étant borné, mais ne tendant pas nécessairement vers une limite.

On *a* en effet

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}] = \mathcal{E}\,[X_i^{(1)}] + \dots + \mathcal{E}[X_i^{d-l}] + \mathcal{E}\,[\bar{S}^m] + \mathcal{E}\,[X_i^{(md+d-l+1)}]$$
$$+ \dots + \mathcal{E}\,[X_i^n]$$

et il résulte de ce que nous savons sur $\mathcal{E}\,[\bar{S}^m]$, $(\mathcal{E}[\bar{S}^m - m\,d\,M]$ tend vers une limite) que $\mathcal{E}\,[S_i^n] - n\,M$ sera en général asymptotiquement périodique avec période d.

En ce qui concerne

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M]^2 = \mathcal{E}\,[R_i^{(n)} - (n_1 + d - l)M + \bar{S}^{(m)} - m\,d\,M]^2 = \sigma^2\,d\,m + l\,(m)$$
$$+ \mathcal{E}\,[R_i^{(n)} - (n_1 + d \quad l)\,M]^2 + 2\,\mathcal{E}\,[(R_i^{(n)} - (n_1 + d - l)\,M)\,(\bar{S}^m \quad mdM)]$$

on voit sans peine que $\mathcal{E}\,[(R_i^{(n)} - (n_1 + d \quad l)\,M)\,(\bar{S}^m - mdM)]$ reste borné et le second terme est évidemment aussi borné. Donc

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M]^2 = \sigma^2\,n + l_i'\,(n)$$

$l_i'\,(n)$ étant borné et asymptotiquement périodique avec période d.

Si $\sigma = 0$, les conditions que cela impose aux $\bar{S}_i^m$ se transforment évidemment dans les mêmes conditions pour les $S_i^{(n)}$: après réduction d'une constante de chacun des x_i, la valeur de la somme des x_i prise le long d'un chemin fermé est nulle etc. Si $\sigma \neq 0$, $R_i^{(n)}$ étant borné, il suit immédiatement que la loi de $[S_i^{(n)} - n\,M] / \sigma \sqrt{n}$ tend vers la loi de Gauss réduite, de même les moments de $[S_i^{(n)} - n\,M] / \sigma \sqrt{n}$ tendront vers les moments correspondants de la loi de Gauss.

Nous venons de voir que les principaux résultats démontrés dans les § précédents pour le cas positivement régulier s'étendent sans difficulté au cas d'une matrice indécomposable quelconque: c'est à dire au cas où nous sommes à l'intérieur d'un groupe final. On aurait d'ailleurs pu — et c'est comme cela que nous avions procédé — démontrer tous ces résultats sans faire intervenir l'artifice du § 1 de l'introduction. On aurait démontré d'abord directement (voir le § suivant) que $\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}] \approx n\,M$, que l'écart type est soit borné, soit de la forme $\sigma \sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, σ ne dépendant pas de l'état initial, en suite on aurait fait les mêmes raisonnements que dans les § précédents, seulement au lieu de la propriété ergodique serait intervenue ce que nous avons appelé la presque-ergodicité; si nous connaissons l'état initial la connaissance d'un second état du système à une autre épreuve ne nous indique plus rien sur les probabilités des positions ultérieures (au moins asymptotiquement).

§ 8. — Cas d'une matrice indécomposable cyclique. Les deux premiers moments des $S_i^{(n)}$

Nous avons vu dans le § dernier que, sauf dans un cas singulier que nous avons élucidé complètement, la loi limite de $S_i^{(n)}$ et ses moments pouvaient s'exprimer très facilement par les limites de $\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}] / n$ et de $\mathcal{E}\,[S_i^n - \mathcal{E}\,(S_i^n)]^2 / n$. Nous avons montré que ces limites existent et comme nous avons ramené le cas cyclique au cas positivement régulier nous avons donné par cela un moyen de calculer ces quantités. Mais il vaut mieux de les calculer directement sans utiliser les résultats du numéro précédent, car nous obtiendront ainsi une nouvelle confirmation de l'existence de ces limites.

$\mathcal{E}\,[S_j^{(n)}]$

Nous avons

$$\mathcal{E}\,[S_j^{(n)}] = \sum_{t=1}^{n} \mathcal{E}\,(X_j^{(t)}) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{n} P_{ji}^{t} \right) x_i = n \sum_{i=1}^{r} \Pi_{ji}^{(n)}\ x_i$$

$$n\,\Pi_{ji}^{(n)} = n\,\Pi_i + R_{ji}^{(n)} + \psi_{ji}^{(n)}$$

$$R_{ji}^{(n)} = \sum_{1}^{n} (P_{ji}^{t} - Pr^{t}\,[j,i]) = S_{ji} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\Psi'^{(n)}_{ji}$ est d'après le § 1 de l'introduction une fonction périodique de n avec période d.

$$\Psi'^{(n)}_{ji} = \mathrm{P}r^{(1)}\,[j,i] + \ldots + \mathrm{P}r^{(n_1)}[j,i] - n_1\,\Pi_i \qquad n \equiv n_1 \,(\mathrm{mod}\ d)$$

$$\Pi_i = \frac{\mathrm{P}_i}{d}.$$

Comme $\mathrm{R}^{(n)}_{ji}$ converge vers S_{ji}, il suit que

$$\mathcal{E}[\mathrm{S}^n_j] = n\,\mathrm{M} + \sum_{i=1}^{r}[\mathrm{S}_{ji} + \Psi'^{(n)}_{ji}]\,x_i + 0_n = n\mathrm{M} +$$

$$\sum_{i=1}^{r}(\mathrm{S}_{ji} + \Psi'^{(n)}_{ji})\,(x_i - \mathrm{M}) + 0_n$$

car $\sum_{i=1}^{r}\mathrm{S}_{ji} = 0$ et, comme il résulte de l'expression de $\Psi'^{(n)}_{ji}$,

$$\sum_{i=1}^{r}\Psi'^{(n)}_{ji} = 0.$$

Nous pouvons mettre la partie périodique de n sous une autre forme. Soit

$$\overline{\mathrm{M}}_{\varrho} = \sum_{i}\mathrm{P}_i\,x_i \qquad (\mathrm{E}_i \varepsilon \bar{\rho}).$$

Comme le système issu de $\mathrm{E}_j \varepsilon \bar{l}$ sera à l'épreuve n dans le sous-groupe $l'_n\,[n \equiv l'_n - l\,(\mathrm{mod}\ d)]$, il suit, en tenant compte des valeurs de $\mathrm{P}r^{(t)}\,[j,i]$, que

$$\sum_{i=1}^{r}\Psi'_{ji}(n)\,x_i = (\overline{\mathrm{M}}_{l'+1} - \mathrm{M}) + (\overline{\mathrm{M}}_{l'+2} - \mathrm{M}) + \ldots + (\overline{\mathrm{M}}_{l+n_1} - \mathrm{M})$$

où $n \equiv n_1$ (mod d) et nous pouvons écrire

$$\mathcal{E}[\mathrm{S}^n_j] \longrightarrow n\,\mathrm{M} + (\overline{\mathrm{M}}_{l+1} - \mathrm{M}) + \ldots (\overline{\mathrm{M}}_{l+n_1} - \mathrm{M}) + \sum_{i=1}^{r}\mathrm{S}_{ji}(x_i - \mathrm{M})$$

Posons $\mathrm{S}'^{(n)}_j = \sum \mathrm{X}'^{t}_j$ où $\mathrm{X}'^{t}_i = x'_i - \overline{\mathrm{M}}_{l'_t} = x'_i$ si à l'épreuve t à partir de E_j l'état $\mathrm{E}_i \varepsilon \overline{l'_t}$ est réalisé. Quelles relations y a-t-il entre $\mathrm{S}^{(n)}_j$ et $\mathrm{S}'^{(n)}_j$?

Nous avons

$$\mathrm{X}'^{t}_j = \mathrm{X}^{(t)}_j - \overline{\mathrm{M}}_{l'_t} \quad \text{où } t = l'_t - l\,(\mathrm{mod}\ d)$$

donc

$$\mathrm{S}^{(n)}_j = \mathrm{S}'^{(n)}_j + \sum_{t=1}^{n}\mathrm{M}_{e'_t} = \mathrm{S}'^{(n)}_j + n\,\mathrm{M} + (\overline{\mathrm{M}}_{l+1} - \mathrm{M}) + \ldots + (\overline{\mathrm{M}}_{l+n_1} - \mathrm{M})$$

ou

$$\mathrm{S}^{(n)}_j = \mathrm{S}'^{(n)}_j + \mathcal{E}\,[\mathrm{S}^n_j] - \sum_{i=1}^{r}\mathrm{R}^{(n)}_{ji}(\mathrm{X}_i - \mathrm{M}).$$

Si nous voulons calculer la partie principale de

$$\mathcal{E}\{S_j^{(n)} - \mathcal{E}[S_j^{(n)}]\}^2$$

comme $\Sigma R_{ji}^{(n)}(x_i - M)$ reste fini, nous pourrons nous borner à calculer la partie principale de $\mathcal{E}[S_j'^{n}]^2$. Remarquons encore que

$$\mathcal{E}[S_j'^{(n)}] = \sum_{i=1}^{r} R_{ji}^{(n)}(x_i - M) \to \sum_{i=1}^{r} S_{ji}(x_i - M) = \sum_{i=1}^{r} S_{ji}\ x_i'$$

et passons à

$$\mathcal{E}[S_j'^{n}]^2$$

$$\mathcal{E}[S_j'^{(n)}]^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}[X_j'^{(t)}]^2 + 2\sum_{t=1}^{n-1} \mathcal{E}[X_j'^{(t)} \sum_{\tau=t+1}^{n} X_j'^{(\tau)}]$$

$$\Sigma\,\mathcal{E}[X_j'^{(t)}]^2 \text{ est égal à } \Sigma\, P_{ji}^{(t)}\, x_i'^2 \text{ donc}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \mathcal{E}[X_j'^{(t)}]^2 \approx n\sum_{i=1}^{r} \Pi_i\ x_i'^2$$

$$\mathcal{E}[X_j'^t \sum X'^\tau] = \sum_{i=1}^{r} P_{ji}^{(t)}\ x_i' \quad \mathcal{E}[S_i'^{(n-t)}] = \sum_{i=1}^{r} P_{ji}^{(t)}\ x_i'\left(\sum_{k=1}^{r} R_{ik}^{(n-t)}\ x_k'\right).$$

$$R_{ik}^{(n-t)} = S_{ik} + O\left(\frac{1}{(n-t)^2}\right),\ \sum_{t=1}^{n} P_{ji}^{(t)} \approx n\,\Pi_i.$$

Il résulte sans peine que

$$\sum_{t=1}^{n-1} \mathcal{E}[X_j'^{(t)} \sum_{\tau=t+1}^{n} X_j'^{(\tau)}] \approx n\sum_{i,k} \Pi_i\, S_{ik}\, x_i'\, x_k'$$

par conséquent

$$\mathcal{E}[S_j'^{(n)2}]\,/\,n \longrightarrow \sigma^2 = \sum_i \Pi_i\ x_i'^2 + 2\sum_{i,k} \Pi_i\, S_{ik}\ x_i'\ x_k'.$$

Si nous groupons tous les états de $\overline{1}$ . . et désignons par $\sum_1 \ldots$ des sommes étendues à $\overline{1}$ etc.:

$$\sigma^2 = \sum_{i\in\overline{1}} \Pi_i(x_i - \overline{M}_1)^2 + \ldots \sum_{i\in\overline{d}} \Pi_i\,(x_i - \overline{M}_d)^2 +$$

$$\sum_{l=1}^{d}\sum_{\varrho=1}^{d}\left[\sum_{i\in\overline{l}}\ \sum_{k\in\overline{\varrho}} \Pi_i\, S_{ik}\,(x_k - \overline{M}_\varrho)(x_i - \overline{M}_l).\right]$$

Considérons la somme

$$\sum_{i \varepsilon l} \sum_{k \varepsilon \varrho} \Pi_i S_{ik} (x_k - \overline{M}_\varrho) (x_i - \overline{M}_l)$$

elle se réduit à $\sum_{i \varepsilon l} \sum_{k \varepsilon \varrho} \Pi_i S_{ik} \, x_i \, x_k$, car on a $\sum_{k \varepsilon \overline{\varrho}} S_{ik} = 0$ et

$$\sum_{i \varepsilon l} \Pi_i S_{ik} = 0.$$

Il résulte que

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i \, x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \Pi_i S_{ik} \, x_i \, x_k - \frac{\overline{M}_1^2 + \cdot \cdot \cdot + \overline{M}_d^2}{d}$$

§ 9. — Cas d'une matrice indécomposable: Théorème du logarithme itéré

1. *Introduction.* Nous avons démontré que si nous nous trouvons à l'intérieur d'un groupe final, alors quel que soit l'état initial, la probabilité pour que

$$\left| \frac{S_i^{(n)} - n M}{n} \right| > \varepsilon > 0$$

tend vers zéro si n tend vers l'infini. $\left(\text{Car } \mathcal{E} \left[\frac{S_i^{(n)} - n M}{\sqrt{n}} \right]^2 \text{ est borné} \right)$.

Donc à l'intérieur d'un groupe final la loi des grands nombres est applicable. Nous avons de plus étudié d'une façon assez complète les $S_i^{(n)}$ du point de vue Bernoullien, c'est à dire nous avons étudié la loi de probabilité de $S_i^{(n)}$ pour des n très grands, mais déterminés.

Maintenant nous allons étudier les $S_i^{(n)}$ du point de vue des probabilités dénombrables. Nous n'allons plus nous demander si une certaine propriété est satisfaite pour un n particulier, mais nous allons considérer tous les n et nous demander si une propriété est satisfaite pour un nombre fini de n ou pour un nombre infini de n.

En particulier nous allons nous occuper de la question suivante. Pour chaque n isolément si $n \geqslant \infty$ la loi des grands nombres s'applique, la probabilité pour que $\left| \frac{S_i^{(n)}}{n} - M \right| > \varepsilon > 0$ tend vers zéro quel que soit ε. Mais si nous considérons tous les n à partir d'un certain rang N, il pourrait se produire que quel que soit N on ait au moins une fois dans le courant des épreuves à partir de N, $\left| \frac{S_i^{(n)}}{n} - M \right| > \varepsilon$, et alors on aurait évidemment $\left| \frac{S_i^{(n)}}{n} - M \right| > \varepsilon$ une infinité de fois. Les indices n pour les quels $\left|\frac{S_i^{(n)}}{n} - M\right| > \varepsilon$ formeraient une suite infinie dont la „densité“ par rapport à tous les n serait évidemment nulle. Dans ce cas, bien que la loi des grands nombres soit applicable, la loi forte des grands nombres ne le serait pas (M. Cantelli à qui l'on doit cette question a baptisé cette loi d'un nom qui nous parait mieux indiquer de quoi il s'agit „la legge uniforme dei grandi numeri“ : la loi uniforme des grands nombres).

Dans le cas qui nous occupe nous verrons que non seulement la loi forte des grands nombres sera applicable, mais qu'on peut la préciser d'une façon très exacte.

Nous avons deux cas à distinguer : $\sigma = 0$, alors $S_i^{(n)} - nM$ est déterminé par la connaissance des états extrêmes, et $S_i^{(n)} - nM$ est borné, donc $\left|\frac{S_i^{(n)} - nM}{n}\right| < \frac{k}{n}$ et la loi forte des grands nombres s'applique. Le cas restant est plus intéressant : $\sigma \neq 0$. Alors on a le

2. ***Théorème.*** *A l'intérieur d'un groupe final si $\sigma \neq 0$, la probabilité pour qu'on ait pour au moins un* $n > N$

$$|S_i^{(n)} - nM| > \sqrt{2\sigma_i^2 n\,(lg_2 n + c\, lg_3 n)}$$

sera $= 1$ *si* $c < \frac{1}{2}$, *tendra vers* 0 *si* $c > \frac{3}{2}$

($lg_2 n = lg\, lg\, n$, $lg_3 n = lg . lg_2 n$). Le théorème ci-dessus s'appelle théorème du logarithme itéré.

3. Donnons une *esquisse de la démonstration*, qui est assez longue, en essayant de faire ressortir les idées principales qui sont les mêmes pour toutes les démonstrations du théorème du logarithme itéré.

Nous montrerons d'abord (lemme I) que si pour un $n < n_p$ $|S_n - nM|$ est très grand, alors on a une probabilité assez grande pour que $|S_{n_p} - n_p M|$ soit aussi très grand. Il résultera que si nous montrerons que pour une certaine suite croissante n_p ($p = 1, 2 \ldots$) on a à partir d'un certain rang $|S_{n_p} - n_p M| < \varphi(n_p)$ avec probabilité très voisine de 1, on aura aussi $|S_n - nM| < \varphi(n_p)$ ($n < n_p$) avec probabilité très voisine de 1.

Nous évaluerons ensuite la probabilité pour que $|S_n - nM| > \varphi(n)$ (lemme II).

Enfin le lemme III nous donnera un critère suffisant (et sous certaines hypothèses (lemme III') nécessaires) pour qu'un événement se réalise avec probabilité 1 ou 0 une infinité de fois dans une série d'expériences.

En appliquant les lemmes II et III aux variables $|S_{n_p} - n_p M|$, n_p

étant convenablement choisi, on vérifiera que la probabilité pour qu'on ait pour au moins un $p > p_0$.

$$\left| S_{n_p} - n_p M \right| > \sqrt{2\sigma^2 n_{p-1}(lg_2 n_{p-1} + c\, lg_3 n_{p-1})} - B$$

B étant une certaine constante, tend vers O avec $^1/_{p_0}$, et l'on en déduira que la probabilité pour qu'on ait pour au moins un $n > N$

$$\left| S_n - n M \right| > \sqrt{2\sigma^2 n\, (lg_2 n + c\, lg_3 n)}$$

tend vers O avec $\frac{1}{N}$ si $c > \frac{3}{2}$.

Enfin pour montrer que si $c \leq \frac{1}{2}$, on ait avec probabilité 1 une infinité de fois

$$\left| S_n - n M \right| > \sqrt{2\sigma^2 n\, (lg_2 n + c\, lg_3 n)'}$$

on montrera qu'il existe une suite d'indices n'_p très rapidement croissante, pour laquelle on ait avec probabilité 1 en vertu du lemme III′ une infinité de fois

$$\left| S_{n'_p} \quad n'_p M \right| > \sqrt{2\sigma^2 n'_p (lg_2 n'_p + \frac{1}{2}\, lg_3 n'_p)}$$

ce qui démontrera le théorème.

Pour le lemme I ainsi que pour la démonstration propre du théorème nous suivrons autant que possible la marche qu'a suivie M. Cantelli dans son mémoire „Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri e sulla generalisazzione di un fondamentale teorema del Sig. Paul Lévy"[8], où il généralise dans le cas des variables indépendantes sous certaines hypothèses les résultats de M. Paul Lévy dans le cas Bernoullien. Toutefois dans la partie $c \leq \frac{1}{2}$, nous allons modifier un peu le raisonnement de M. M. Cantelli et Lévy pour employer un raisonnement de M. Kolmogoroff, qui nous parait préférable.

4. *Démonstration et énoncé du lemme.* I. Nous supposerons ici pour simplifier l'écriture $M = 0$. D'autre part comme dans tout ce qui suit l'état initial n'a aucune importance (l'état initial est dans le groupe final) nous supprimerons l'indice en bas dans $S_i^{(n)}$. Nous poserons

$$S(r, n) = X^{(r+1)} + \ldots + X^{(r+n)} = S^{(r+n)} - S^{(r)}.$$

---

[8] Giorn. Ist. Ital. Att. t. 4, p. 327—350, 1933.

Quel que soit l'état à l'instant r, il existe un $\bar{n}$ tel que pour tout $n > \bar{n}$ on ait

$$\Pr\left[\frac{S(r,n)}{\sqrt{n}.\sigma} > 0\right] > \frac{1}{2^{1+\gamma}} \qquad \gamma > 0$$
$$\Pr\left[\frac{S(r,n)}{\sqrt{n}.\sigma} < 0\right] > \frac{1}{2^{1+\gamma}}$$

car $\frac{S(r,n)}{\sqrt{n}.\sigma}$ tend vers la loi symétrique de GAUSS, uniformément par rapport à r.

A fortiori, il existe un $\bar{n}$ tel que pour tout $n > \bar{n}$ et pour un nombre quelconque $B > 0$ on ait

(1)
$$\Pr\left[S(r,n) > -B\right] > \frac{1}{2^{1+\gamma}} \qquad \gamma > 0.$$
$$\Pr\left[S(r,n) < B\right] > \frac{1}{2^{1+\gamma}}$$

Démontrons que les formules (1) sont valables également pour tout $n \leq \bar{n}$, donc toujours, si les nombres B sont convenablement choisis. Désignons par A le maximum de $\mathcal{E}\,[S(r,n)]^2$ pour $n \leq \bar{n}$, et lorsqu'on fait varier l'état à l'instant r. Le théorème de Tchebycheff nous enseigne

(2)
$$\Pr[S(r,n) > -B] \geqq 1 - \frac{A}{B^2} \qquad n \leq \bar{n}$$

nous pouvons déterminer B de façon que $1 - \frac{A}{B^2} > 2^{-1-\gamma}$, et on a un résultat analogue pour la seconde formule de (1).

On peut donc quel que soit $\gamma < 0$ déterminer un B de telle sorte que pour tout n on ait (1).

Ceci établi considérons la suite.

(3)
$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}, \ldots$$

et la suite adjointe

(4)
$$S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots S^{(n)}.$$

Après n épreuves successives pour déterminer les $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, les variables $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$ prennent un certain système de n valeurs. Pour chacun de ces systèmes possibles considérons la valeur absolue maxima. Ce sera une variable aléatoire Y_n. Nous allons borner la probabilité pour que $Y_n > N_n$. On a évidemment

(5)
$$\Pr[|Y_n| \geqq N_n] = \Pr[Y_n \geqq N_n] + \Pr[Y_n \leqq -N_n]$$

(6)
$$\Pr[|Y_n| \geqq N_n] \geqq \Pr[|S^{(n)}| \geqq N_n]$$

cherchons une borne inférieure de

$$Pr\left[S^{(n)} \geq N_n - B\right]$$

on a

$$Pr\left[S^{(n)} \geq N_n - B\right] \geq Pr\left[Y_n \geq N_n\right] \sum_{i=1}^{n} p_i \, Pr'\left[S^{(n)} - S^{(i)} \geq - B\right]$$

où p_i désigne la probabilité qu'on a $S_n^{(i)} \geq N_n$ mais $S^{(1)} < N_n, \ldots S^{(i-1)} < N_n$ sachant que $Y_n \geq N_n$ et $Pr'\left[S^{(n)} - S^{(i)} \geq \quad B\right]$ la probabilité pour que $S^{(n)} - S^{(i)} = S(i, n-i) \geq - B$ sachant que $S^{(1)} < N_n, \ldots S^{(i-1)} < N_n, S^{(i)} \geq N_n$

$$Pr'\left[S(i, n-i) > - B\right] > \frac{1}{2^{1+\gamma}}$$

$$Pr\left[S^{(n)} \geq N_n - B\right] \geq Pr\left[Y_n \geq N_n\right] . \sum p_i \frac{1}{2^{1+\gamma}} = Pr\left[Y_n \geq N_n\right] \frac{1}{2^{1+\gamma}}$$

on trouve par conséquent

$$Pr\left[Y_n \geq N_n\right] \leq 2^{1+\gamma} Pr\left[S^{(n)} \geq N_n \quad B\right]$$

et d'une façon analogue

$$Pr\left[Y_n \leq - N_n\right] \leq 2^{1+\gamma} Pr\left[S^{(n)} \leq - N_n + B\right].$$

En sommant ces deux inégalités on trouve en tenant compte de (5) et (6)

$$Pr\left[\,|S^{(n)}| \geq N_n\right] \leq Pr\left[\,|Y_n| \geq N_n\right] \leq 2^{1+\gamma} Pr\left[\,|S^{(n)}| \geq N_n - B\right]$$

Nous avons obtenu le

Lemme I. *Quel que soit l'état initial, il existe un nombre positif fixe* B *tel que pour* n *quelconque et pour* $N_n > B$, *on ait*

$$Pr\left[\,|S^{(n)}| \geq N_n\right] \leq Pr\left[\,|Y_n| \geq N_n\right] \leq 2^{1+\gamma} Pr\left[\,|S^{(n)}| \geq N_n - B\right].$$

5. ***Lemme II.*** *Quel que soit l'état initial, si* z_n *est un infiniment grand de l'ordre de* $\sqrt{\lg_2 n}$, *alors nous pouvons écrire*

$$Pr\left[\frac{|S^{(n)}|}{\sqrt{2\sigma^2 n}} \geq z_n\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z_n} e^{-z_n^2} (1 + \mu_n)$$

où $\mu_n \to 0$ si $\frac{1}{n} \to 0.$

Nous savons en effet qu'on peut écrire

$$Pr\left[a < \frac{S^{(n)}}{\sigma \sqrt{n}} < b\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{Z^2}{2}} dz + 0(n^{-\frac{1}{11}})$$

$$Pr[\,|S^{(n)}| \geqq a \sqrt{2 n \sigma^2}\,] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a\sqrt{2}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 0(n^{-\frac{1}{11}})$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a\sqrt{2}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-a^2} \left(1 - \frac{\gamma n}{\sqrt{2 a^2}}\right), 0 < \gamma < 1, a > 0$$

et en remarquant que si z_n est infiniment grand comme $\sqrt{lg_2 n}$ alors

$$Pr[\, S^{(n)} > \sqrt{2\sigma^2 n}\, z_n] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z_n} e^{-z_n^2} \left(1 \quad \frac{\gamma n}{2 z_n^2} + 0(n^{-\frac{1}{11}})\, z_n e^{z_n^2}\right)$$

$$\frac{\gamma n}{2 z_n^2} \to 0, \quad 0(n^{-\frac{1}{11}})\; z_n e^{-z_n^2} \to 0$$

il en résulte le lemme.

6. ***Théorèmes sur les séries à termes aléatoires positifs et enchaînés.*** Considérons une série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ de termes aléatoires positifs enchaînés d'une façon quelconque. Nous définirons la probabilité P de convergence de cette série avec Kolmogoroff par

$$1 - P = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} Pr\left[\sum_{i=n+1}^{m} u_i > \varepsilon\right].$$

Démontrons d'abord le théorème,

***Théorème*:** *Pour qu'une serie à termes aléatoires positifs converge avec probabilité 1, il suffit que la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}(u_i)$ *converge.*

Démonstration. La probabilité pour que $\sum_{i=n+1}^{m} u_i > \varepsilon$ est, d'après l'inégalité de Tchebycheff appliquée aux $\mathcal{E}(u_i)$, plus petite que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{E}(u_i) \mid \varepsilon$$

comme $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{E}(u_i)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} Pr\left[\sum_{i=n+1}^{m} u_i > \varepsilon\right] = 0.$$

En particulier en considérant une série formée de termes $u_i = 1$, si un certain événement A_i arrive à la i-ième épreuve, $= 0$ dans le cas contraire, on obtient un lemme que M. Cantelli a tiré d'une inégalité de Boole.

Lemme III. *Si nous considérons une suite illimitée d'événements dépendants ou indépendants*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

respectivement de probabilités

$$Pr\,[A_1], \ldots, Pr\,[A_n] \ldots$$

et si la série de termes général $Pr\,[A_n]$ *est convergente, alors la probabilité de la réalisation d'une infinité d'événements* A_i *est nulle.*

Si nous disons que deux suites $\{u_i\}$ et $\{\bar{u}_i\}$ sont équivalentes (notion due à Khintchine), si la probabilité pour qu'on n'ait qu'un nombre fini de fois $u_i \neq \bar{u}_i$ est 1, alors une condition suffisante pour cette équivalence est évidemment $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Pr\,[u_i \neq \bar{u}_i] < \infty$.

Théorème I: *Pour qu'une série à termes aléatoires positifs* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *converge avee probabilité 1, il suffit que la suite* u_i *soit équivalente à la suite* $\bar{u}_i$ *où* $\bar{u}_i = u_i$ *si* $u_i \leq 1$, $= 0$ *si* $u_i > 1$, *et que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}\,[\bar{u}_i] < \infty\,.$$

Le théoréme I n'est en général que suffisant, il existe pourtant des cas très importants où il est aussi nécessaire, tel est p. e. le cas des u_i indépendants. Plus généralement on démontre sans trop de difficulté le

Critère : S'il existe un n *et un* $\lambda > 1$ *tel que le rapport entre la probabilité conditionnelle* $Pr_{i-1}\,[a < u_i < b]$ (probabilité évaluée lorsque les $u_1 \ldots u_{i-1}$ sont connus) *et la probabilité à priori est pour* $i > n$ *comprise entre* $\frac{1}{\lambda}$ *et* λ *(a et* b *quelconques), alors si les conditions du théorème I ne sont pas satisfaites, la serie* $\Sigma\, u_i$ *diverge avec probabilité 1.*

On peut affaiblir notablement les hypothèses de ce critère. On vérifie facilement le

Lemme III'. *Si (les notations étant celles du lemme III) la probabilité conditionnelle* $Pr_{i-1}\,[A_i\,]$ *ne se distingue de la probabilité à priori que d'une quantité* $< \varepsilon_i$ *avec* $\Sigma\, \varepsilon_i$ *convergente, alors si*

$$\Sigma\, Pr\,[A_i]$$

diverge, la probabilité de la réalisation d'une infinité d'événements de la suite $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *est* 1.

Les critères ci-dessus peuvent s'interpréter comme critères de convergence absolue d'une série à termes aléatoires.

Démonstration de la première partie du théorème $\left(c > \frac{3}{2}\right)$.

Soit n_p le plus grand entier $\leq e^{\frac{p}{lg p}}$

$$n_p = e^{\frac{p}{lg p}} - \varepsilon_p$$

posons

$$\psi_n = \sqrt{2\sigma^2 n\,(lg_2 n + c\, lg_3 n)}.$$

Calculons

$$(7) \quad Pr\left[\,|\,S^{(n_p)}\,| \geqq \psi_{n_{p-1}} - B\right] \equiv$$

$$Pr\left[\frac{S^{n_p}}{\sqrt{2\sigma^2 n_p}} \geqq \sqrt{\frac{2\sigma^2 n_{p-1}}{2\sigma^2 n_p}(lg_2 n_{p-1} + c\, lg_3 n_{p-1})} - \frac{B}{\sqrt{2\sigma^2 n_p}}\right]$$

$$(\psi_{n_{p-1}} > B)$$

$$\frac{n_{p-1}}{n_p} = 1 - \frac{1}{lgp} + \varepsilon'_p$$

$$lg_2 n_{p-1} = lg\ p - lg_2\ p + \varepsilon''_p \quad , \quad lg_3 n_{p-1} = lg_2 p + \varepsilon'''_p$$

ε'_p étant un infiniment petit d'ordre supérieur à $\frac{1}{lgp}$ et ε''_p et ε'''_p deux infiniments petits si $p \to \infty$. Le rapport $\frac{B}{\sqrt{2\sigma^2 n_p}}$ sera infiniment petit d'ordre $e^{-\frac{p}{2\, lg\, p}}$.

Considérons (7), le lemme II sera applicable

$$Pr\left[\,|\,S^{(n_p)}\,| \geqq \psi_{n_{p-1}} - B\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p(logp)^{c-\frac{1}{2}}}(1 + \mu'_p).$$

On obtient de résultats analogues pour $Pr\left[S^{(n_p)} > \psi_{n_{p-1}}\right]$. Donc en vertu du lemme I :

$$(8) \quad Pr\left[\,|\,Y_{n_p}| > \psi_{n_{p-1}}\right] = \frac{s_p}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p\,(lg\,p)^{c-\frac{1}{2}}}(1 + y''_p)$$

$$\left[y''_p \to 0,\ 1 < s_p < 2^{1+\gamma}\right].$$

Or pour $c > \frac{3}{2}$ le second membre de (8) est le terme général d'une série convergente. Donc d'après le lemme III, si $p \to \infty$ le probabilité de l'infinité d'inégalités

$$|\,Y_{n_r}| < \psi_{n_{r-1}} \qquad (r = p, p+1 \ldots) \quad ,$$

tend vers 1 si $p \to \infty$.

En outre pour tout $n_{r-1} < n \leq n_r$, on a en tenant compte de la définition de Y_n et de l'expression de ψ_n

$$|S^{(n)}| \leq |Y_{n_r}| \text{ et } \psi_{n_{r-1}} < \psi_n.$$

Nous avons donc démontré que si $N \rightarrow \infty$, la probabilité pour qu'on ait pour au moins un $n > N$ $(M = 0)$

$$|S^{(n)}| > \sqrt{2\sigma^2 n(lg_2 n + c\, lg_3 n)}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{N}$ si $c > \frac{3}{2}$. Ce qui était la première partie du théorème. Remarquons qu'on aurait pu aussi ecrire au lieu de

$$\sqrt{2\sigma^2 n(lg_2 n + c\, lg_3 n)}$$

l'expression

$$\sqrt{2\, B_i^{(n)}(lg_2 B_i^{(n)} + c\, lg_3 B_i^{(n)})}$$

$B_i^{(n)} = \mathcal{E}\left\{S_i^{(n)} - \mathcal{E}[S_i^{(n)}]\right\}^2$, l'énoncé aurait été le même.

8. *Démonstration de la deuxième partie du théorème* $\left(c \leq \frac{1}{2}\right)$.

Soit n_p maintenant le plus grand entier compris dans $e^{2p\, lg_2 p}$

$$n_p = e^{2p\, lg_2 p} - \varepsilon_p \qquad 0 < \varepsilon_p < 1$$

$$r_p = n_p - n_{p-1} = n_p\left(1 - \frac{1+\varepsilon'_p}{lg^2 p}\right) \qquad \varepsilon'_p \rightarrow 0$$

cherchons la probabilité pour que

$$|S^{(n_p)} - S^{(n_{p-1})}| \geqq \psi_{n_p} + 2\psi_{n_{p-1}}$$

c'est à dire:

$$\Pr\left[\frac{S^{n_p} - S^{n_{p-1}}}{\sqrt{2\sigma^2(n_p - n_{p-1})}} \geqq \sqrt{\frac{n_p}{n_p - n_{p-1}}(lg_2 n_p + c\, lg_3 n_p)} + \right.$$

$$\text{(9)} \qquad \left. + 2\sqrt{\frac{n_{p-1}}{n_p - n_{p-1}}(lg_2 n_{p-1} + c\, lg_3 n_{p-1})}\right]$$

$$\frac{n_p}{n_p - n_{p-1}} = \frac{n_p}{r_p} = 1 + \frac{1+\varepsilon''_p}{lg^2 p} \qquad \frac{n_{p-1}}{n_p - n_{p-1}} = \frac{n_{p-1}}{n_p}\,\frac{n_p}{n_p - n_{p-1}}$$

$$= \frac{1}{(lg\, p)^2}(1 + \varepsilon'''_p)$$

$$lg_2 n_p = lg\, p + lg_3 p + lg\, 2 + \varepsilon^{IV}_p$$

$$lg_3 n_p = lg_2 p + \varepsilon^{V}_p$$

les $\varepsilon^1_p \ldots \varepsilon^V_p$ étant des infiniment petits si $p \rightarrow \infty$.

On voit que le deuxième radical est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{lgp}$. On peut appliquer aux $S^{n_p} - S^{n_{p-1}}$ le lemme II.

$$S^{n_p} - S^{n_{p-1}} = X^{(n_{p-1}+1)} + \dots + X^{(n_p)}$$

est une somme S^{r_p} particulière. On trouve donc par des calculs simples pour (9)

$$\frac{1}{2\,e^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{p\,lg_2 p\,.\,(lg p)^{c+\frac{1}{2}}}(1+\mu_p) \qquad \mu_p \to 0\,.$$

Pour $c \leq \frac{1}{2}$, le terme ci-dessus est le terme général d'une série divergente. Nous ne pouvons pas en déduire immédiatement qu'on aura une infinité de fois $|S^{n_p} - S^{n_{p-1}}| \geq \psi_{n_p} + 2\psi_{n_{p-1}}$. Pour le démontrer nous allons considérer la suite d'événements

$$(A_p) \qquad |S^{(n_{2p})} - S^{(n_{2p-1})}| \geq \psi_{n_{2p}} + 2\psi_{n_{2p-1}}\,.$$

Ces événements ne sont pas indépendants, mais comme les épreuves correspondant à $S^{n_{2p}} - S^{n_{2p-1}}$ sont distantes de plus de r_{2p-1}épreuves de celles correspondant à $S^{(n_{2p-2})} - S^{(n_{2p-3})}$, le théorème presque-ergodique nous enseigne : (l'état initial des $S^{(n)}$ étant connu) que la probabilité de A_p lorsqu'on connait les résultats des épreuves ayant déterminées $A_1 \dots A_{p-1}$ se distingue de moins de $K\lambda^{r_{2p-1}}$ de la probabilité a priori, où $\lambda < 1$. La série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \lambda^{r_{2p-1}}$ est convergente, nous pouvons donc appliquer le lemme III' aux A_p. Il résulte qu'on a avec probabilité 1 une infinité de fois

$$|S^{n_{2p}} \quad S^{n_{2p-1}}| \geq \psi_{n_{2p}} + 2\psi_{n_{2p-1}}\,.$$

Comme on a d'autre part avec probabilité 0 (première partie du théorème) une infinité de fois $|S^{n_{2p-1}}| > 2\psi_{n_{2p-1}}$, il suit qu'on a avec probabilité 1 une infinité de fois

$$|S^{(n_{2p})}| \geq \psi_{n_{2p}} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On voit facilement que le théorème du logarithme itéré reste encore valable dans le cas où il n'existe qu'un seul groupe final — cas semi régulier — si $\sigma \neq 0$.

§ 10. — Cas général : Loi de probabilité limite des $S_i^{(n)}$ et les moments

Supposons que nous avons plusieurs groupes finals G_{a_1}, G_{a_2}, ... G_{a_l}, avec les probabilités limites $Pr\,[i, G_a]$ pour que le système parti de l'état initial E_i passe finalement à l'intérieur de G_a.

Nous avons calculé la loi de probabilité limite de $S_i^{(n)}$ lorsque E_i appartient à un groupe final. Nous avons vu que si nous désignons par M_a et σ_a^2 les parties principales de $\frac{\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]}{n}$ et de $\mathcal{E}\left[\frac{S_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]}{\sqrt{n}}\right]^2$, alors si $\sigma_a \neq 0$, $\frac{S_i^{(n)} - n\,M_a}{\sqrt{n}}$ tend vers la loi de Gauss avec l'écart type σ_a, et si $\sigma_a = 0$, $S_i^{(n)} - n\,M_a$ restait borné. (E_i appartenant toujours à G_a).

1. Maintenant prenons un état E_i initial quelconque. Fixons m tel que $\sum_{E_k \epsilon G_a} P_{ik}^{(m)} > Pr\,[i, G_a] - \varepsilon$ $(a = a_1, \ldots, a_l)$ et considérons $S_i^{(n)}$; $S_i^{(n)}$ se décompose en deux sommes $S_i^{(m)}$ et $X_i^{(m+1)} + \ldots X_i^{(n)}$. Si à l'instant $(m+1)$ le système se trouve dans G_a, alors si n est suffisamment grand

$$\frac{X_i^{(m+1)} + \ldots + X_i^{(n)}}{n - m}$$

est, sauf dans des cas de probabilité arbitrairement petite, compris entre $M_a - \mu$ et $M_a + \mu$ ($\mu > 0$ quelconque). Si n augmente, m restant fixe, alors, $S_i^{(m)}$ étant borné, $S_i^{(m)}\,/\,n$ tend vers zéro et $\frac{n - m}{n} \rightarrow 1$; nous pouvons par conséquent prendre n suffisamment grand pour que, si le système à l'épreuve m se trouve dans G_a, on ait, en dehors de cas de probabilité $< \varepsilon$,

$$M_a - \mu < S^{(n)} \mid n < M_a + \mu$$

ε et μ étant arbitrairement petits. Remarquons que nous nous trouvons à l'épreuve m à l'intérieur des groupes finals avec probabilité plus grande que $1 - l\,\varepsilon$, et, à l'interieur de G_a, avec probabilité $> Pr\,[i, G_a] - \varepsilon$. Il suit, ε et μ pouvant être rendus arbitrairement petits si n et m augmentent, que la loi de probabilité de $S_i^{(n)} \mid n$ tend vers une loi limite prenant avec probabilité $Pr\,[i, G_a]$ les valeurs M_a. Les espérances mathématiques des puissances de $S_i^{(n)} \mid n$ tendent vers les espérances respectives de la loi limite (car $S_i^{(n)} \; n$ reste borné). Donc

$$\mathcal{E}\,[\,S_i^{(n)} \mid n\,] \rightarrow \sum_a P\,r\,[i, G_a\,]\,M_a = M_i$$

$$\mathcal{E}\left[\,\frac{S_i^{(n)}}{n} - M\,\right]^2 \rightarrow \sum_a P\,r\,[\,i, G_a\,]\,(M_a - M_i\,)^2 = W_i^2\;.$$

On vérifie sans peine que $\mathcal{E}\;[\,S_i^{(n)}] - n\,M$ reste borné et est asymptotiquement périodique et que

$$n\left\{\mathcal{E}\left[\,\frac{S_i^{(n)}}{n} - M\,\right]^2 - \sum_a P\,r\,[\,i, G_a\,](M_a - M)^2\right\}$$

reste aussi borné et est asymptotiquement périodique[9]).

2. Considérons maintenant le cas où tous les $M_a = M$, (où **au moins** $P\,r\,[\,i, G_a\,] = 0$ pour $M_a \neq M_i$). Alors

$$\frac{1}{n}\,S_i^{(n)} - M_i$$

tend vers zéro en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite : La loi des grands nombres s'applique aux $S_i^{(n)}$. Nous pouvons raisonner comme ci-dessus sur les $\sum_t (X^{(t)} - M_i)$. Désignons par $F_i^{(n)}$ (X) la probabilité pour que $\frac{S_i^{(n)} - M\,n}{\sqrt{n}} < x$, on trouve sans aucune difficulte que $F_i^{(n)}\,(x)$ tend vers $F_i\,(x)$.

$$F_i\,(x) = \sum_a{}^{(1)} P\,r\,[\,i, G_a\,]\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a}\int_{-\infty}^{X} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_a^2}}\,d\,t$$

$$+ \sum_a{}^{(2)} P\,r\,[\,i, G_a\,]\,\frac{|\,x\,| + x}{2\,x}$$

$\sum_a{}^{(1)}$ étant étendue à ceux des groupes finals pour lesquels $\sigma_a \neq 0$ et $\sum_a{}^{(2)}$ aux autres. (On a $\frac{|\,x\,| + x}{x} = 1$ si $x > 0$, $= 0$ si $x < 0$).

3. Nous avons trouvé la loi limite de probabilité de $S_i^{(n)}$ dans le cas général.

Il y a trois cas possibles : 1. Les moyennes M_a *des groupes finals* G_a *qu'on peut atteindre de* E_i *sont différentes, alors* $S_i^{(n)} \mid n$

---

[9]) **Voir numéro 5.**

tend vers une loi discontinue prenant avec probabilité $\mathrm{Pr}\,[i, G_a]$ la *valeur* M_a.

2. *Les moyennes* M_a *sont toutes égales à* M, *un des* σ_a *correspondant à un* $\mathrm{Pr}\,[i, G_a] > 0$ *est non nul et alors* $(S_i^{(n)} - n M) \mid \sqrt{n}$ *suit une loi qui tend vers une limite de la forme* $F_i(x)$.

3. *Tous les* σ_a *correspondants aux groupes* G_a *atteignables de* E_i *sont nuls, et les* M_a *correspondantes à ces groupes sont égales à* M, *alors*

$$S_i^{(n)} - n M$$

reste borné et on vérifie que sa loi de probabilité est asymptotiquement périodique.

4. Al'intérieur des groupes finals et pour le cas 1) $(M_\alpha \neq M_\beta)$ nous avons vu que les parties principales des moments tendaient vers les moments des lois limites. Nous allons montrer que cela est vrai encore pour les parties principales dans le second cas, on le vérifie aussi immédiatement dans le troisième cas. Plaçons nous dans le cas 2) et bornons p. e. l'erreur commise en évaluant la probabilité $a\sqrt{n} < S_i^{(n)} - nM < b\sqrt{n}$ par la formule $F_i(b) - F_i(a)$. En remarquant que la probabilité pour qu' à l'épreuve d'ordre $m = n^{\frac{1}{12}}$ on soit à l'extérieur des groupes finals est $< k\,\lambda^{\sqrt[12]{n}}$, que si à l'instant m le système est dans G_α $\dfrac{\sum_{t=m+1}^{n}(X^t - M_\alpha)}{\sqrt{n - m}}$ suit une loi de GAUSS à une erreur d'ordre inférieur à $n^{-\frac{1}{11}}$ près, il résulte assez immédiatement que l'erreur commise sur les probabilités $a\sqrt{n} < S_i^{(n)} - n\,M < b\sqrt{n}$, en les évaluant par la loi limite est de la forme $0\left(n^{-\frac{1}{11}}\right)$. Pour les grandes valeurs soit $\bar{\sigma}$ le maximum des σ_α, on a si E_i appartient à un groupe final

$$\mathrm{P}r\left[\left|S_i^{(n)} - n\,M\right| > \bar{\sigma}\sqrt{n}\,.\,n^i\right] < e^{-\frac{n^i}{4}} + 0\left(\exp.\left\{-n^{-\frac{1}{11}}\right\}\right).$$

D'autre part la probabilité pour qu'on soit à l'instant $\sqrt{n}$ encore à l'extérieur de $\Sigma\,G_\alpha$ est $< k\,\lambda^{\sqrt{n}}$. On en déduit sans peine que

$$\mathrm{P}r\left[\ S_i^{(n)} - n\,M \mid < \bar{\sigma}\sqrt{n}\ n^i\right] < e^{-\frac{n^i}{4}} + 0\left(\exp\left\{\ n^{\frac{1}{11}}\right\}\right).$$

De cela résulte comme dans le § 5 que aussi dans le cas 2) les valeurs principales des moments tendent vers les moments des lois limites.
En particulier dans le cas 2)

$$\frac{\mathcal{E}\,[S_i^n - n\,M]^2}{n} \to \sum_\alpha \mathrm{P}r\,[i, G_\alpha]\,\sigma_\alpha^2$$

Nous avons donné l'expression des σ_α^2 dans le § précédent.

5. Nous avons dit que

$$\frac{1}{n}\left\{\mathcal{E}\,[S_i^n - M_i\,n]^2 - n^2\,W_i^2\right\}$$

est asymptotiquement périodique ; vérifions cela. Désignons par $\mathcal{E}_k^t$ l'espérance mathématique sous l'hypothèse que le système entre à la $t^{\text{ième}}$ épreuve dans le groupe final G_α $(E_k \varepsilon G_\alpha)$ par l'état E_k.

Alors $\bar{\mathcal{E}}_j^{(n)}$ désignant l'espérance mathématique sous l'hypothèse que le système se trouve à la n^e épreuve dans E_j

$$\mathcal{E}\,[\,S_i^{(n)} - n\,M_i]^2 = \sum_{E_k\,\varepsilon\,\Sigma G_\alpha}\Big[P_{ik}^{(1)}\,\mathcal{E}_k^{(1)}\,[\,S_i^{(n)} - n\,M_i]^2$$

$$+\ldots+\sum_j P_{ij}^{n-1}\,p_{jk}\,\mathcal{E}_k^{(n)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2\Big]$$

$$+\sum_j P_{ij}^{(n)}\,\bar{\mathcal{E}}_j^{(n)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2$$

les E_j désignant les états à l'extérieur des groupes finals. Le dernier terme tend exponentiellement vers zéro et peut donc être négligé. Pour $\mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2$ $(E_k\,\varepsilon\,G_\alpha)$ écrivons

$$\mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2 = \mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_\alpha]^2 + 2\,n\,(M_\alpha - M_i)\,\mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_\alpha]$$

$$+\,n^2\,(M_\alpha - M)^2.$$

Nous avons

$$\mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(n)} - n\,M_\alpha]^2 = \mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(t)} - t\,M_\alpha]^2 + 2\,\mathcal{E}_k^{(t)}\,[S_i^{(t)} - t\,M_\alpha]\,\mathcal{E}\,[S_k^{(n-t)} -$$

$$-\,(n-t)\,M_\alpha] + \mathcal{E}\,[S_k^{(n-t)} - (n-t)\,M_\alpha]^2.$$

Le premier terme est majoré par $4\,t^2\,k^2$ si k est le maximum des X_i, le second est le produit d'un terme borné $\mathcal{E}\,[S_k^{(n-t)} - (n-t)\,M_\alpha]$ par un terme majoré par $2\,t\,k$, le troisième ne se distingue que d'une quantité bornée de $(n-t)\,\sigma_\alpha^2$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{E}_k^t\,[S_i^n - n\,M_\alpha]^2 = n\,\sigma_\alpha^2 + R_k^{(t)}$$

$R_k^{(t)}$ étant majoré par une expression de la forme C t^2, $R_k^{(t)}$ ne donnera pour $\mathcal{E}\,[S_i^n - n\,M_i]^2$ qu'une contribution bornée, car

$$\sum_{t=2}^{\infty}\ \sum_{E_j\bar{\varepsilon}\Sigma G_\alpha} P_{ij}^{(t-1)}\,p_{jk}\,t^2 \leq \sum_{t=2}^{\infty}\ \sum_{E_j\bar{\varepsilon}\Sigma G_\alpha} P_{ij}^{(t-1)}\,t^2$$

converge. Donc comme

$$\sum_{E_k \varepsilon G_\alpha} [P_{ik}^{(1)} + \dots + \sum_j P_{ij}^{(n-1)} p_{jk}] = \sum_{E_k \varepsilon G_\alpha} P_{ik}^{(n)} \dashrightarrow Pr\,[i, G_\alpha]$$

$$\left| \sum_{E_k \varepsilon G_\alpha} P_{ik}^{(n)} - Pr\,[i, G_\alpha] \right| < k\,\lambda^n$$

nous aurons

$$\sum_{E_k \varepsilon G_\alpha} \left[P_{ik}^{(1)} \mathcal{E}_k^{(1)} [S_i^n - n\,M_\alpha]^2 + \dots \right] = Pr\,[i, G_\alpha]\, n\, \sigma_\alpha^2 + R$$

R étant borné. Considérons maintenant

$$\sum_{E_k \varepsilon G_\alpha} \left[P_{ik}^{(1)} \mathcal{E}_k^{(1)} (S_i^n - n\ M_\alpha) + \dots + \sum_j P_{ij}^{(n-1)} p_{jk} \mathcal{E}_k^{(n)} (S_i^n - n\,M_\alpha) \right].$$

Ceci est précisément le développement de l'espérance mathématique du produit

$$(S_i^{(n)} - n\,M_\alpha)\,\theta_\alpha^{(n)}$$

où $\theta_\alpha^{(n)} = 0$ si à la n-ième épreuve le système se trouve à l'extérieur de G_α, $= 1$ si à la n-ième épreuve le système se trouve dans G_α.

On a en désignant par $P^{(m)}\,[i, G_\alpha]$ la probabilité pour que le système se trouve après m épreuves à partir de l'état E_i dans G_α

$$\mathcal{E}\,[(S_i^{(n)} - n\,M_\alpha)\,\theta_\alpha^{(n)}] = \sum_{t=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{r} P_{i\rho}^{(t)} P^{(n-t)} [\rho, G_\alpha]\,(x_\rho - M_\alpha) =$$

$$= \sum_{E_{\rho \varepsilon} G_\alpha} \Pi_{i\rho}^{(n)}\, n\,(x_\rho - M_\alpha) + \sum_{E_\rho \bar{\varepsilon} \Sigma G_\alpha} (x_\rho - M_\alpha) \sum_{t=1}^{n} P_{i\rho}^{(t)} P^{(n-t)} [\rho, G_\alpha].$$

$$\sum_{t=1}^{n} P_{i\rho}^{(t)}\, P^{(n-t)}\,[\rho, G_\alpha] = S_{i\rho}\, Pr\,[\rho, G_\alpha] + 0\,\left(\frac{1}{n}\right) (\rho\ \bar{\varepsilon}\ G_\alpha)$$

et $\Pi_{i\rho}^{(n)}\, n = n\,\Pi_{i\rho} + S_{i\rho} + \psi_{i\rho}^{(n)} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$, (introduction § 2, exposé § 6).

$$\sum_{E_{\rho \varepsilon} G_\alpha} \Pi_{i\rho}\,(x_\rho - M_\alpha) = Pr\,[i, G_\alpha] \sum_{E_{\rho \varepsilon} G_\alpha} \Pi_\rho\,(x_\rho - M_\alpha) = 0$$

Le carré de l'écart-type est donc égal à

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2 = n^2 \sum Pr\,[i, G_\alpha]\,(M_\alpha - M_i)^2 + n \sum Pr\,[i, G_\alpha]\,\sigma_\alpha^2 +$$

$$2n \sum_\alpha (M_\alpha - M_i) \sum_{E_{\rho \bar{\varepsilon}} \Sigma G_\alpha} S_{i\rho}\, Pr\,[\rho, G_\alpha]\,(x_\rho - M_\alpha) +$$

$$2n \sum_\alpha (M_\alpha - M_i) \sum_{E_{\rho \varepsilon} G_\alpha} (S_{i\rho} + \psi_{i\rho}^{(n)})\,(x_\rho - M_\alpha) + R_i(n).$$

$R_i\,(n)$ restant borné. Nous pouvons écrire, quel que soit ρ

$$\sum_\alpha (M_\alpha - M_i)\, Pr\,[\rho, G_\alpha]\,(x_\rho - M_\alpha) = (M_\rho - M_i)\,(x_\rho - M_\rho) - W_\rho^2.$$

Par conséquent

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2 = n^2\,W_i^2 + n\sum_{\alpha} Pr[i, G_\alpha]\,\sigma_\alpha^2 - 2\,n\sum_{\varrho=1}^{r} S_{i\varrho}\,W_\varrho^2$$

$$+ 2\,n\sum_{\varrho=1}^{r}\left(S_{i\varrho} + \psi_{i\varrho}^{(n)}\right)(x_\varrho - M_\varrho)\,(M_\varrho - M_i) + R_i(n)$$

et on vérifie sans peine que dans le cas 2) $\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2$ se réduit à $n\sum_{\alpha} Pr\,[i, G_\alpha]\,\sigma_\alpha^2$. La partie périodique $\Sigma\ \psi_{i\varrho}^{(n)}\,(x_\varrho - M_\varrho)\,(M_\varrho - M_i)$ sera nulle en dehors du cas 2) dans le cas non oscillant et accidentellement dans d'autres hypothèses.

On voit par exemple en tenant compte de la forme de $\psi_{i\partial}^{(n)}$ que la partie périodique est une combinaison linéaire à coefficients périodiques en n des $\overline{M}_{l\,(\alpha)} - M_\alpha$ où $\overline{M}_{l\,(\alpha)} = \sum_{E_{k \varepsilon l\,(\alpha)}} x_k\,P_k$. Il suffit que tous les $\overline{M}_{l\,(\alpha)}$ soient $=$ M_α pour qu'elle s'annulle.

La partie principale de $\mathcal{E}\left[S_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]\right]^2$ est la même que celle de $\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2$ car

$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)} - n\,M_i]^2 = \mathcal{E}\,\{S_i^{(n)} - \mathcal{E}\,[S_i^{(n)}]\}^2 + \{\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}] - n\,M_i\}^2$$

et
$$\mathcal{E}\,[S_i^{(n)}] - n\,M_i \text{ est borné}$$

6. Dans le cas 2) et 3) la loi des grands nombres est applicable, et la loi forte des grands nombres l'est aussi. Dans le cas 3) $S_i^{(n)} - n\,M_i$ reste presque sûrement borné dans le courant des épreuves et dans le cas 2), soit $\bar{\sigma}$ le maximum des σ_α avec $Pr\,[i, G_\alpha] > 0$.

Alors la probabilité de la réalisation d'une des inégalités

$$|S_i^{(n)} - n\,M_i| > \sqrt{2\bar{\sigma}^2\,n\,(lg_2\,n + 2\,lg_3\,n)}$$

pour $n > N$, tend vers zéro si $N \to \infty$.

Mais aussi dans le cas 1) on a une certaine sorte de loi des grands nombres. MM De Finetti et Khintchine (dans certains travaux) disent que la „loi des grands nombres“ est applicable si

$$\lim_{\to 0}\ \overline{\lim_{m \to \infty}}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ Pr\left\{\left|\frac{S_i^{(n)}}{n} - \frac{S_i^{(m)}}{m}\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Cette loi des grands nombres est vérifiée ici, comme on constate sans peine.

§ 11. — Retour à l'étude du mouvement. Les fréquences

Nous avons rappelé dans l'introduction les résultats démontrés dans l'exposé sur le mouvement de notre système. Nous avons démontré que ce système passe nécessairement à l'intérieur d'un groupe final et qu'il effectue à l'intérieur de ce groupe un mouvement circulaire entre les sous-groupes cycliques. Nous avions évalué la probabilité pour qu'à l'instant n le système se trouve dans un état déterminé. Maintenant nous allons nous occuper des fréquences de cet état dans le mouvement. Nous désignerons par $m_i^{(n)}(j)$ le nombre des réalisations de l'état E_j dans n épreuves à partir de l'état E_i. Etudions la loi de probabilité de $m_i^{(n)}(j)$ Les $m_i^{(n)}(j)$ seront évidemment des $S_i^{(n)}$ particuliers pour lesquels $x_k = 0$ et $x_j = 1$.

Nous pouvons donc appliquer aux $m_i^{(n)}(j)$ les résultats démontrés plus haut pour les $S_j^{(n)}$. Commençons d'abord par le

Cas d'une matrice indécomposable. Il résulte alors que

$$\mathcal{E}\,[m_i^{(n)}(j)] = \Pi_j n + k_i^{(n)}(j)$$

$k_i^{(n)}(j)$ étant asymptotiquement périodique

$$\mathcal{E}\left[\frac{m_i^{(n)}(j) - \Pi_j n}{\sqrt{n}}\right]^2 \rightarrow \sigma_j^2 .$$

Nous avons vu dans le § 8 l'expression de σ^2. Si nous transportons les valeurs des x_i dans la dernière formule du § 8 il vient sans difficulté

$$\sigma_j^2 = \frac{P_j(1 - P_j + 2S_{jj})}{d}$$

$\sigma_j \neq 0$. Si cette expression n'est pas nulle, alors nous savons que si n tend vers l'infini $\frac{m_i^{(n)}(j) - \Pi_j n}{\sigma_j \sqrt{n}}$ suit une loi tendant vers la loi de Gauss réduite. La fréquence de l'état E_j en n épreuves sera donc si n est très grand en dehors de cas de probabilité très petite très voisine de Π_j (loi de grands nombres) et l'écart $m_i^{(n)}(j) - \Pi_j n$ suivra une loi tendant vers une loi de Gauss avec écart-type $\sigma_j \sqrt{n}$. La probabilité pour que pour au moins un $n > N$ l'écart $\frac{m_i^{(n)}(j)}{n} - \Pi_j$ de la fréquence avec la fréquence moyenne où théorique soit plus grand que

$$\sqrt{\frac{2\sigma_j^2}{n}(lg_2 n + c\, lg_3 n)}$$

tend vers zéro si $c > \frac{3}{2}$, et est égale à 1 si $c \leq \frac{1}{2}$.

Cette dernière proposition établit nettement le caractère de stabilité à la Poisson du mouvement dans le cas $\sigma_j \neq 0$. Ensemble avec les autres résultats ces propositions permettent de caractériser d'une façon assez complète le mouvement de ce système à l'intérieur du groupe final (si les σ_j sont $\neq 0$).

Nous devons maintenant envisager le cas :

$$\sigma_j = 0.$$

Comme $P_j > 0$, il faut que $1 - P_j + 2 S_{jj} = 0$. Nous avons analysé le cas où $\sigma_j = 0$ dans le § 6. Nous avons vu que pour qu'on se trouve dans ce cas, il faut et il suffit qu'après soustraction d'une constante, dans notre cas $= \Pi_j$ de chaque x_i la somme des x_i le long de chaque chemin fermé soit nulle. Dans notre cas cela demande évidemment que si nous partons de l'état E_j le nombre des réalisations de E_j dans $n\, d$ épreuves soit avec probabilité > 0 égal à $n\ \Pi_j\, d = n P_j$ si $P_{jj}^{nd} > 0$. Ce nombre devant être un nombre entier quel que soit $n > n_0$, il faut que $P_j = 1$, fait qu'on aurait pu démontrer aussi de beaucoup d'autres manières. Or pour que $P_j = 1$, il faut qu'il n'existe pas d'autres états dans le sous-groupe de E_j que E_j. En vertu de l'allure cyclique du mouvement, l'état E_j sera obtenu exactement m fois en $m\, d$ épreuves à partir de n'importe quel état (du groupe final), $m_i^{(n)}(j)$ sera une quantité bien déterminée si nous connaissons l'état initial E_i et n, il n'est pas besoin de connaitre l'état final. L'écart-type sera identiquement nul et la loi forte des grands nombres et la stabilité à la Poisson sera encore plus rigoureuse que dans le cas $\sigma_j \neq 0$, puisque le nombre des réalisations en $n\, d$ épreuves sera exactement n.

Ayant ainsi étudié le mouvement à l'intérieur du groupe final, passons au

Cas général. Si nous partons d'un état d'un groupe final, alors nous restons dans le groupe final et l'étude ci-dessus s'applique. Partons donc d'un état E_i à l'extérieur des groupes finals. Un autre état à l'extérieur E_j ne sera obtenu qu'un nombre fini de fois dans le mouvement à partir de l'état E_j et l'espérance mathématique du nombre de réalisations de E_j à partir de E_i sera S_{ij}. On pourra évidemment interpréter $\Sigma\, S_{ij}$ étendue à tous les états à l'extérieur des groupes finals comme l'espérance mathématique de la durée de séjour du système à l'extérieur des groupes finals. Prenons maintenant un état E_j de G_α. Le système parti de E_i arrivera avec probabilité $P\, r\, [i, G_\alpha]$ dans G_α, et s'il arrive en G_α la fréquence à partir de ce moment suivra les lois que nous avons déterminées ci-dessus. L'espérance mathématique du nombre des réalisations de E_j divisé par n tend vers

$$Pr\,[i, G_\alpha]\,\Pi_j$$

et l'écart type de $\frac{m_i^{(n)}(j)}{n}$ tend vers

$$Pr\,[i, G_\alpha]\,[1 - Pr\,[i\,G_\alpha]]\,\Pi_j^2 \,.$$

La loi de probabilité de $\frac{m_i^{(n)}}{n}$ prendra à la limite avec probabilité $1 - Pr\,[i, G_\alpha]$ le valeur 0 et avec probabilité $Pr\,[i, G_\alpha]$ la valeur Π_j. Le seul cas où l'écart-type de $\frac{m_i^{(n)}(j)}{n}$ tend vers zéro sera le cas où soit $Pr\,[i, G_\alpha] = 0$, alors l'état E_j ne sera pas obtenu de tout à partir de E_i, où $Pr\,[i, G_\alpha] = 1$, alors le système passe nécessairement dans G_α et y aura un mouvement comme nous l'avons décrit.

CHAPITRE 2

LE CAS CONTINU; LES PROBABILITÉS

§ 1. – Position du problème. Rappel historique

Position du problème. Nous avons considéré dans le premier Chapitre un cas particulier du problème général suivant.

On considère un ensemble abstrait quelconque. En désignant les éléments de cet ensemble comme points abstraits, envisageons un point mobile suivant un mouvement aléatoire dans cet ensemble. Sa position sera répérée dans des instants qu'on appelle épreuves. Supposons qu'à chaque point E et à chaque sous-ensemble $\mathcal{E}$ (ou au moins à une certaine famille additive de sous-ensembles contenant l'ensemble nul et l'ensemble abstrait lui-même, famille d'ensembles qu'on appellera avec M. Fréchet ensembles probabilisables) on fasse correspondre une probabilité bien définie $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ pour que le point mobile passe dans une épreuve de E en $\mathcal{E}$. Il s'agit d'étudier le mouvement de ce point mobile.

Nous ne pouvons pas résoudre ce problème dans sa généralité. Dans ce Chapitre nous allons nous occuper d'un cas particulier assez important.

Nous supposons d'abord que l'ensemble W dans lequel se meut le point mobile est un ensemble d'un espace euclidien R_n à n dimensions, mesurable (Borel) et de mesure positive. La fonction complètement additive d'ensemble $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ sera supposée définie pour chaque point E de W et pour chaque ensemble $\mathcal{E} \subset W$ mesurable (B). En fonction de E elle sera supposée aussi mesurable (B). Alors la probabilité de passer en n épreuves de E en $\mathcal{E}$ sera exprimée par l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes-Radon

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \int_W P^{(n-1)}(F, \mathcal{E})\, P^{(1)}(E, d\,\mathcal{A}_F)$$

limite de $\sum \frac{i}{m} P^{(1)}(E, \mathcal{A}_{i,m})$, $\mathcal{A}_{i,m}$ étant l'ensemble des points F de W avec $\frac{i}{m} \leq P^{(n-1)}(F, \mathcal{E}) < \frac{i+1}{m}$. On a les égalités

$$P^{(n+m)}(E, \mathcal{E}) = \int_W P^{(n)}(F, \mathcal{E})\, P^{(m)}(E, d\,\mathcal{A}_F)$$

$$P^{(n)}(E, W) = 1.$$

La fonction $P^{(n)}$ (E, $\mathcal{E}$) sera encore complètement additive, et sera la somme (pour E fixe) de 3 fonctions d'ensembles complètement additives d'une fonction d'ensemble absolument continue (distribution de masses avec densité finie) d'une fonction d'ensemble à dérivée presque partout nulle, continue (distribution de masses dans des ensembles de mesure nulle avec densité infinie) et d'une fonction d'ensemble à dérivée presque partout nulle, discontinue (distribution de masses dans des points formant un ensemble dénombrable[10]).

Désignons par $p^{(n)}$ (E, F) la dérivée de cette première partie, c'est à dire la densité de la distribution de masses $P^{(n)}$(E, $\mathcal{E}$) au point F. Nous supposons que $p^{(n)}$ (E, F) existe presque partout et soit mesurable (L) en fonction du couple E, F.

Les hypothèses faites ci-dessus ne suffisent pas pour entamer l'étude du mouvement du point mobile. Nous allons donc faire encore les hypothèses suivantes.

I. $$0 < \text{mes}\,(W) < \infty.$$

II. Il y a un nombre entier positif N et deux nombres positifs arbitrairement petits mais fixes η et b, tels que uniformément par rapport à E, si $\mathcal{E}$ est de mesure $< \eta$, alors

$$P^{(N)}(E, \mathcal{E}) < 1 - b.$$

Ces hypothèses seront supposées partout dans ce Chapitre sauf spécification contraire.

L'hypothése II entraîne qu'on a aussi, uniformément par rapport à E et $\mathcal{E}$, pour $n > N$, si mes ($\mathcal{E}$) $< \eta$

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < 1 - b.$$

Rappel historique. Les probabilités en chaîne dans le cas continu ont été examinées pour la première fois par M. B. Hostinsky en 1928 sous l'hypothèse de l'existence d'une densité de probabilité p (x, y) definie dans un intervalle fini $a < x, y < b$, uniformément continue et positive. M J. Hadamard a dans la même année rattaché le comportement asymptotique des itérés de p (x, y) aux constantes fondamentales du noyau p (x, y), et il a donné des résultats sur les propriétés des fonctions fondamentales de ce noyau correspondant à des constantes fondamentales de module 1. M. Hostinsky a donné ensuite certains critères suffisants pour assurer que $p^{(n)}$ $(x, y) > 0$ si $n > N$. M. Fréchet a en 1932 donné un critère nécessaire et suffisant pour que (sous l'hypothèse de l'existence d'une densité p (E, F) dans un domaine W d'un R_n de mesure finie ou infinie) $p^{(n)}$ (E, F) tende vers p (F) uniformément par

---

[10]) Cfr. La Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, 2-ième édition, p. 103.

rapport à E avec $\int_W p(F)\,dF \neq 0$, et dans un autre mémoire sous des hypothèses plus restrictives sur p (E, F) comprises dans les nôtres **(I, II)** démontré que les $p^{(n)}$ (E, F) sont asymptotiquement périodiques, complété et étendu les résultats de M. HADAMARD. Nous allons retrouver tous ces résultats dans le cours de l'analyse qui va suivre.

Rappel de propriétés de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Si $\varphi(\mathcal{E})$ est une fonction d'ensemble bornée, (mesurable B) et $\Psi(F)$ une fonction de point bornée (mes. B) alors l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes étendue à W, écrite

$$\int_W \Psi(F)\,\varphi(d\,\mathcal{A}_F)$$

est par définition la limite (existant toujours sous nos hypothèses) de

$$K\sum_{i=-n}^{n}\frac{i}{n}\,\varphi\left(\mathcal{A}^{\Psi}_{i,n}\right)$$

K étant le maximum de $\Psi(F)$, $\mathcal{A}^{\Psi}_{i,n}$ l'ensemble où $K\frac{i}{n} \leq \Psi(F) < K\frac{i+1}{n}$.

Considérons la suite de fonctions d'ensemble complètement additives et bornées dans leur ensemble $\varphi_1(\mathcal{E}) \ldots \varphi_n(\mathcal{E})$, alors si $\varphi_n(\mathcal{E}) \to \varphi(\mathcal{E})$ uniformément par rapport à $\mathcal{E}$, c'est à dire s'il y a un $\varepsilon_n \to 0$ tel que $|\varphi_n(\mathcal{E}) - \varphi(\mathcal{E})| < \varepsilon_n$ quel que soit $\mathcal{E}$, alors $\varphi(\mathcal{E})$ est aussi une fonction complètement additive d'ensemble bornée et

$$\int_W \Psi(F)\,\varphi_n(d\,\mathcal{A}_F) \to \int_W \Psi(F)\,\varphi(d\,\mathcal{A}_F).$$

§ 2. — Les ensembles finals

Partons d'un point quelconque E de notre ensemble. A un sous-ensemble $\mathcal{E}$ quelconque de W correspondra une certaine probabilité **pour** que le point mobile reste dans son évolution future toujours **dans** l'ensemble $\mathcal{E}$. Il y aura une infinité d'ensembles $\mathcal{E}$ tels que cette **probabilité** soit 1 et parmi ces ensembles nous distinguerons ceux qui ont une **mesure** minima. Dans nos hypothèses il y a toujours une infinité **de tels** ensembles qui ne se distinguent que par des ensembles de mesure **nulle**. Nous les désignerons par ensembles conséquents de E et les écrirons V(E). Considérons un ensemble conséquent de E: V(E), l'ensemble des **points** de V(E) desquels on peut passer avec une probabilité positive **à l'extérieur** de V(E) est de mesure nulle (car autrement il y aurait une **probabilité positive de passer de E dans cet ensemble** — V(E) **est ensemble**

conséquent de mesure minima — et il s'en suivrait qu'on a une probabilité positive de quitter V(E) à partir de E, contrairement à la définition de V(E)). Nous pouvons éliminer cet ensemble. Après cela à partir de n'importe quel point de V(E) le point mobile restera avec probabilité 1 dans V(E). Supposons qu'il existe dans notre ensemble un point E_1 à partir duquel on reste avec probabilité 1 à l'extérieur d'un certain sous-ensemble de mesure positive de V(E). L'ensemble conséquent $V(E_1)$ de E_1 sera compris dans V(E) et de mesure plus petite (mais en vertu de nos hypothèses de mesure $> \eta$). On éliminera comme plus haut l'ensemble des points de $V(E_1)$ desquels on passe avec probabilité positive à l'extérieur de $V(E_1)$. S'il y a encore dans $V(E_1)$ un point E_2 et un sous-ensemble de mesure > 0 avec probabilité $= 0$ de passer de E_2 dans cet ensemble, alors nous continuons la même opération. Et ainsi de suite. On arrivera finalement, après au plus une infinité dénombrable d'opérations, à un ensemble G, qui est ensemble conséquent pour chacun de ses points. Cet ensemble G, ou plutôt cet ensemble délesté d'un certain ensemble de mesure nulle qui sera défini dans le § 3, sera appelé en raison de certaines analogies avec le cas fini : ensemble final.

Chaque ensemble consécutif contiendra au moins un ensemble final. Il n'y aura qu'un nombre fini de ces ensembles, car ces ensembles sont évidemment disjoints et de mesure $> \eta$.

Désignons les par $G_{\alpha_1}, \ldots G_{\alpha_e}$.

Première propriété des ensembles finals: Théorème I. La probabilité pour que le point mobile se trouve encore à la n-ième épreuve à l'extérieur des ensembles finals $G_{\alpha_1} + \ldots + G_{\alpha_e}$ *tend (exponentiellement) vers O avec* $\frac{1}{n}$ (uniformément par rapport à la position initiale).

Démonstration. Nous savons que quel que soit l'état initial on a une probabilité positive de passer dans un ensemble final, par construction même de ces ensembles, et si le point mobile est une fois dans un ensemble final il n'en ressort que dans des cas de probabilité nulle. Soit U l'ensemble des points F, tels que la probabilité de passer de F dans l'ensemble des ensembles finals en moins de M épreuves soit $< a$. Si $a > 0$ est suffisamment petit et l'entier M suffisamment grand U sera de mesure $< \eta$. Comme par hypothèse la probabilité pour qu'on soit encore après N épreuves dans un ensemble de mesure $< \eta$ est $< 1 - b$, il suit qu'après N épreuves le point mobile est avec probabilité $> b$ dans W — U et dans les M épreuves suivantes il peut passer avec probabilité $\geq a$ dans les ensembles finals Il en résulte l'existence de deux nombres $M_1 = N + M$ et $a_1 = a \cdot b > 0$ tels que quel que soit l'état initial dans W on ait une probabilité $> a_1$ de passer dans moins de M_1 épreuves dans les ensembles finals. Il suit immédiatement que la probabilité pour que le point mobile se trouve encore à la $n\,M_1$-ième épreuve à l'extérieur des ensembles finals est $<(1-a_1)^n$. Ce qui démontre le théorème.

Donc si $\mathcal{E}$ est un ensemble extérieur aux ensembles finals

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow 0$$

exponentiellement et uniformément par rapport à E.

§ 3. — Etude du mouvement à l'intérieur d'un ensemble final

Lemme. — *Il existe deux ensembles de mesures positives* A ***et*** B, *tels qu'on ait une densité de probabilité positive de passer dans* **2** N *épreuves d'un point* E *quelconque de* A *en un point* F *quelconque* ***de*** B.

Remarquons d'abord que comme nous avons vu, notre distribution de probabilités ou de masses $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ se décompose en trois parties, masses finies réparties dans des points, masses finies réparties dans des ensembles de mesure nulle aves densité infinie, et une partie répartie avec une densité finie mesurable dans des ensembles de mesure non nulle.

Nous avons supposé que cette dernière partie, soit $p^{(n)}(E, F)$, que nous appelons la densité de probabilité de passer de E en F, est mesurable aussi en fonction du couple E, F.

Cette dernière partie n'est pas $\equiv 0$ en vertu de notre hypothèse II pour $n \geqq N$ Considérons en effet l'ensemble F(E) réunion de tous les points où la densité n'existe pas ou où elle est $> \frac{1}{\eta}$ La mesure de cet ensemble est $< \eta$ (car autrement la masse totale répartie sera > 1) il lui correspond d'après notre hypothèse pour $n > N$ seulement une probabilité ou masse $\leqq 1-b$. Il reste donc une masse totale $>b$ répartie dans l'ensemble restant avec une densité $\leqq \frac{1}{\eta}$; si nous remarquons encore que l'ensemble des points où cette densité est $> \frac{b}{2 \text{ mes } (W)}$ a une mesure $> \frac{\eta}{2} b$, nous avons mis en évidence une partie de la densité $p^{(n)}$ (E, F) qui est $> \frac{b}{2 \text{ mes } (W)}$ dans un ensemble variable avec E mais de mesure $> \frac{\eta}{2} b$.

Si cette dernière partie était continue, le lemme serait évident, mais dans l'hypothèse que nous avons adopté elle n'est que mesurable, alors ce n'est plus évident du tout.

Nous démontrerons le lemme dans le cas d'un R_1. On peut toujours ramener le cas d'un ensemble d'un espace euclidien R_n à ce cas, en établissant une correspondance biunivoque laissant invariante la mesure. Alors nous pouvons réduire notre problème au suivant: Une fonction $\overline{P(x, y)}$ étant mesurable superficiellement, ne prenant que les valeurs 0 ou 1, définie dans un carré [0, 0; 1, 0; 1, 1; 0, 1] telle que sur chaque parallèle à $0\,y$ l'ensemble des valeurs où elle est 1 a une mesure linéaire $> c$; existent-ils deux ensembles linéaires $\overline{A}$ et $\overline{B}$ de mesure positive, tels que pour $x \varepsilon \overline{A}$ et $y \varepsilon \overline{B}$ on ait

$$\overline{P^2(x,y)} = \int_0^1 \overline{P\,(x,z)}\;\overline{P\,(z,y)}\; dz > 0 \quad ?$$

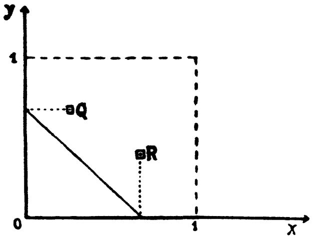

Fig. 1

Nous allons montrer qu'on peut répondre par l'affirmative, ce qui démontrera notre lemme. Supposons d'abord que nous ayons démontré qu'il existe dans notre ensemble I (l'ensemble où $\overline{P(xy)} = 1$) deux points de densité tels que Q $[x_1, y_1]$ et R $[y_1, z_1]$. Le point Q étant un point de densité nous pouvons prendre ρ suffisamment petit pour que le rapport entre la mesure de l'ensemble des points de T comprise dans le carré $[x_1 - \rho, x_1 + \rho$ et $y_1 - \rho, y_1 + \rho]$ et la mesure du dit carré soit $> 1 - \varepsilon$. Même résultat pour le point R. Ceci posé soit θ_1 l'ensemble des points x de l'axe $0\,x$ pour lesquels la mesure linéaire de l'ensemble des points de T d'abscisse x et compris dans le carré autour de Q est $< \frac{3}{2}\rho$. Alors mes $\theta_1 < 8\rho\varepsilon$ et le même est vrai pour l'ensemble θ_2 de points y auxquels correspondent des ensembles linéaires de points de T compris dans le carré R d'ordonnée y et de mesure $< \frac{3}{2}\rho$. Nous pouvons prendre pour l'ensemble $\overline{A}$ l'intervalle $(x_1 - \rho, x_1 + \rho)$ moins l'ensemble θ_1 et comme ensemble $\overline{B}$ l'intervalle $z_1 - \rho, z_1 + \rho$ moins l'ensemble θ_2. Car si $x \varepsilon \overline{A}$ et $y \varepsilon \overline{B}$, on vérifie que

$$\int_0^1 \overline{P(x,z)}\;\overline{P(z,y)}\; d\,z > \int_{y_1-\rho}^{y_1+\rho} \overline{P(x,z)}\;\overline{P(z,y)}\; d\,z > \rho.$$

Il reste à démontrer l'existence des points de densité Q, R. Pour cela remarquons que l'ensemble des points de densité est de mesure relative 1. Si nous le projetons sur la droite $0\,y$, nous obtenons un ensemble de mesure $> c$, la projection sur $0\,x$ est un ensemble de mesure 1, si donc nous projetons l'ensemble des points de densité d'abord sur $0y$, et ensuite appliquons $0\,y$ sur $0\,x$, la partie commune avec l'ensemble des points de densité projeté directement sur $0\,x$ est de mesure $> c > 0$. Il existe donc bien 2 points tels que Q et R.

Il en résulte le lemme.

Le lemme étant établi nous pouvons procéder à l'étude du mouvement à l'intérieur de notre ensemble final. Nous savons que notre ensemble final est ensemble conséquent pour chacun de ces points; quel que soit l'ensemble de mesure positive $\mathcal{L} \subset G$, on a une probabilité positive de passer une fois au moins dans l'ensemble $\mathcal{L}$ à partir de n'importe quel point de notre ensemble final. D'autre part en dehors de cas de probabilité nulle notre point mobile ne quittera pas l'ensemble final. On démontre comme dans le § 2 que quel que soit l'ensemble de mesure positive $\mathcal{L} \subset G$, il existe un nombre $a\,(\mathcal{L})$ et un entier $M\,(\mathcal{L})$ tels que la probabilité de passer dans M épreuves au plus dans $\mathcal{L}$ soit $> a\,(\mathcal{L}) > 0$, quel que soit l'état initial du point mobile (dans G). Alors comme dans l'exposé[11]) il en résulte sans la moindre difficulté le

Théorème II. *(Sur la stabilité à la Poisson à l'intérieur d'un ensemble final): En dehors de cas de probabilité nulle, à partir d'une position quelconque initiale à l'intérieur de l'ensemble final, le point mobile passera une infinité de fois par chaque sous-ensemble de mesure positive de l'ensemble final.*

Corollaire: *Si à partir d'un ensemble de mesure positive $\subset G$ on a une probabilité positive de passer dans un ensemble de mesure nulle, le point mobile passera avec probabilité 1 une infinité de fois par cet ensemble de mesure nulle.*

(Ce ne seront d'ailleurs que ces ensembles mentionnés dans le théorème et le corollaire qui seront obtenus avec probabilité 1 une infinité de fois).

Considérons maintenant nos ensembles $\mathcal{A}$ et B définis dans le lemme. Par analogie avec le cas fini, nous dirons qu'il existe un *chemin d'ordre m* d'un point E dans un ensemble $\mathcal{L}_1$ par un ensemble $\mathcal{L}_2$, s'il y a une probabilité positive de passer en m épreuves de E d'abord en $\mathcal{L}_1$, puis en $\mathcal{L}_2$. Nous dirons qu'il existe un chemin fermé d'ordre m d'un ensemble $\mathcal{L}$ en lui même s'il y a, quels que soient les points E et $F \varepsilon \mathcal{L}$, une densité de probabilité positive de passer en m épreuves de E en F. Nous allons montrer l'existence de tels chemins, existence qui dans nos hypothèses n'est pas évidente à priori. Pour cela nous allons diviser l'ensemble final G en sous-ensembles, non nécessairement disjoints $V_1 \dots, V_n \dots$

$$V = V_1 + \dots + V_n + \dots$$

chaque sous-ensemble V_i groupant les points tels qu'on ait à partir de chacun d'entre eux une probabilité positive de passer dans i épreuves dans l'ensemble $\mathcal{A}$. Nous distinguerons dans chaque V_i une partie $V_{i,\, h_i}$ pour laquelle cette probabilité est $> h_i$, h_i étant pris suffisamment petit pour que la mesure de $V_{i.\, h_i}$ soit positive si $\operatorname{mes} V_i > 0$. Prenons un i avec

---

[11] Nous désignerons par < l'exposé > notre travail cité dans l'index bibliographique.

mes $(V_{i,h_i}) \neq 0$. Nous savons qu'il y a une probabilité positive de passer de chaque point de B dans V_{i,h_i} ; nous pourrons choisir un nombre $k > 0$, un entier j et un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de B de mesure positive tel que la probabilité de passer de $E \in \mathcal{L}$ dans V_{i,h_i} en j épreuves soit $> k$. La probabilité d'aller d'un point $E \in \mathcal{L}$ dans $i + j$ épreuves en $\mathcal{A}$ sera $> k h_i$ et d'un point de $\mathcal{A}$ on a une densité de probabilité $> \rho$ d'aller dans un point F de B en 2N épreuves. La densité de probabilité d'aller d'un point $E \in \mathcal{L}$ en $2N + i + j$ épreuves dans un point $F \in \mathcal{L}$ sera donc $> \rho h_i k$. Nous avons donc bien un chemin aller et retour de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$ (par V_{i,h_i} et $\mathcal{A}$) en $2N + i + j$ épreuves. Considérons les ordres des différents chemins fermés d'un sous-ensemble de B en lui même, formés tous d'une façon analogue aux chemins de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$ considérés ci-desus. Il y a deux cas possibles, ces ordres ont un plus grand commun diviseur $d > 1$, ou ce p. g. c. d. est 1.

Envisageons d'abord le premier cas. Posons alors

$$\begin{aligned} \bar{1} &= V_d + V_{2d} + \cdots + V_{nd} + \cdots \\ \bar{2} &= V_{d-1} + V_{2d-1} + \cdots + V_{nd-1} + \cdots \\ \bar{d} &= V_1 + V_{d+1} + \cdots + V_{(n-1)d+1} + \cdots \end{aligned}$$

Je dis que les ensembles $\bar{i}.\bar{j}$ $(\bar{i} \neq \bar{j})$ ont une mesure nulle. En effet si cette mesure n'était pas nulle, il y aurait d'abord deux ensembles V_{nd+1-j} et V_{md+1-i} qui auraient une partie commune de mesure positive. De cette partie on peut extraire un ensemble θ tel qu'on ait une probabilité $> \varepsilon$ d'aller dans $nd + 1 - j$ épreuves et en $md + 1 - i$ épreuves en $\mathcal{A}$ à partir de n'importe quel point de θ. En considérant alors un chemin commun $\mathcal{A} \to B \to \theta$, on aurait deux chemins d'un sous-ensemble $\mathcal{L}_1$ de B en lui-même ($\mathcal{L}_1 \to \theta \to \mathcal{A} \to \mathcal{L}_1$) d'ordres divisibles par d (hypothèse): donc $i = j$. Il suit que l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{d=1} \bar{i}(\overline{i+1} + \cdots + \bar{d})$$

a une mesure nulle. Nous allons enlever cet ensemble de notre ensemble final. Il est évident qu'après cette modification notre ensemble restera ensemble conséquent pour chacun de ces points. Nous désignerons les ensembles $\bar{1}, \ldots, \bar{d}$, (disjoints maintenant) par sous-ensembles cycliques de l'ensemble final[12]). D'après la construction même de cet ensemble, on passe en une épreuve presque-sûrement d'un sous-ensemble cyclique au sui-

---

[12] Dans ce qui suit, quand il n'y a pas d'ambiguité à craindre, nous supprimerous les barres et écrirons simplement $1, \ldots, d$.

vant, c'est-à-dire de 1 en 2... et de d en 1, (car d'un point de 1 nous avons une probabilité positive d'aller en $\mathcal{A}$ seulement dans un nombre d'épreuves de la forme nd, d'un point de 2 nous n'avons une probabilité positive d'aller en $\mathcal{A}$ que dans des épreuves de la forme $nd - 1$, etc. Si l'on avait une probabilite positive d'aller en une épreuve d'un point de 1 dans i $(i \neq 2)$, on pourrait aller de ce point en $\mathcal{A}$ avec probabilité positive aussi dans un nombre d'épreuves de la forme $1 + nd + 1 - i$). Nous avons entre ces sous-ensembles le même mouvement circulaire que nous avons observé dans le cas fini pour le mouvement entre les sous-groupes cycliques des groupes finals.

Si nous regardons les épreuves seulement de d en d, nous serons toujours (en dehors de cas de probabillté nulle) dans le même sous-ensemble cyclique, de plus les ordres des différents chemins fermés (au lieu d'une épreuve on prend comme unité d épreuves) n'auront plus de p. g. c. d. > 1, nous serons somme toute ramenés au second cas où $d = 1$.

Etudions donc le cas $d = 1$. Dans ce cas il y a un ensemble $\mathcal{A}$ de mesure positive et tel qu'il y a deux chemins de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ d'ordres m_1 et m_2 (m_1 premier par rapport à m_2) avec des densités de probabilité positives ($> \rho_1$ p. e.). Alors je dis qu'on peut prendre M suffisamment grand pour que la densité de probabilité, pour qu'on passe de n'importe quel point de l'ensemble final dans un élément de volume entourant un point quelconque de $\mathcal{A}$ en M épreuves, soit $> \tau$, τ étant un certain nombre positif.

En effet nous savons qu'il y a une probabilité positive $> a(\mathcal{A})$ de passer en moins de $n(\mathcal{A})$ épreuves d'un état E quelconque en $\mathcal{A}$. Il y a donc pour chaque point un $n_1 < n_1(\mathcal{A})$ tel que $P^{n_1}(E, \mathcal{A}) > \frac{a}{n}$. M étant suffisamment grand, on pourra mettre M sous la forme

$$M = n_1 + k_1 m_1 + k_2 m_2.$$

Ecrivons que la densité de probabilité d'être en un point de $\mathcal{A}$ après M épreuves est supérieure à celle qu'on obtient en supposant que le point mobile passe d'abord dans la n_1-ieme épreuve dans $\mathcal{A}$, fait ensuite k_1 fois le chemin d'ordre m_1, ensuite k_2 fois le chemin d'ordre m_2. Nous voyons que notre densité de probabilité est minorée par

$$\frac{a(\mathcal{A})}{n(\mathcal{A})}(\rho_1 \operatorname{mes} \mathcal{A})^{M-n_1-1}\rho_1 > \frac{a(\mathcal{A})}{n(\mathcal{A})}(\rho_1 \operatorname{mes} \mathcal{A})^{M}\rho_1,$$

Ce résultat va nous permettre de démontrer que les probabilités $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ tendent vers une limite indépendante de l'état initial en suivant la méthode de MARKOFF généralisée par B. HOSTINSKY et M. FRÉCHET.

Soit

$P^{(m)}(\mathcal{E})$ le maximum de $P^{(m)}(E, \mathcal{E})$ si E varie

$p^{(m)}(\mathcal{E})$ le minimum de $P^{(m)}(E, \mathcal{E})$ si E varie

Nons avons évidemment

$$P^{(m)}(\mathcal{E}) \geqq P^{(m+1)}(\mathcal{E}) \geqq \ldots \geqq p^{(m+1)}(\mathcal{E}) \geqq p^{(m)}(\mathcal{E}).$$

Pour démontrer que $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ tend vers une limite indépendante de l'état initial, il suffira de démontrer que

$$P^{(m)}(\mathcal{E}) - p^{(m)}(\mathcal{E})$$

tend vers zéro.

$$P^{m+M}(E, \mathcal{E}) - P^{m+M}(F, \mathcal{E}) = \int_G P^m(H, \mathcal{E})\,[P^M(E, d\mathcal{A}_H) - P^M(F, d\mathcal{A}_H)].$$

Soit V (E, F) = V l'ensemble $\mathcal{L}$ où

$$P^M(E, \mathcal{L}) - P^M(F, \mathcal{L}) = \Delta(\mathcal{L})$$

atteint sa borne supérieure. Nous avons

$$\int_{G-V} \Delta(d\mathcal{A}_H) = -\int_V \Delta(d\mathcal{A}_H).$$

$$P^{(m+M)}(E, \mathcal{E}) - P^{(m+M)}(F, \mathcal{E}) = \int_V P^{(m)}(H, \mathcal{E})\,\Delta(d\mathcal{A}_H) -$$

$$\int_{G-V} P^{(m)}(H, \mathcal{E})\,\Delta(d\mathcal{A}_H) < [P^{(m)}(\mathcal{E}) - p^{(m)}(\mathcal{E})] \int_V \Delta(d\mathcal{A}_H)$$

$$\int_V \Delta(d\mathcal{A}_H) = -\int_{G-V} \Delta(d\mathcal{A}_H) = P^M(E, V) - P^M(F, V) =$$

$$= P^M(F, G - V) - P^M(E, G - V)$$

$$P^M(E, V) - P^M(F, V) = P^M(E, V) + P^M(E, G - V) -$$

$$- [P^M(F, V) + P^M(E, G - V)]$$

$$= 1 - [P^M(F, V) + P^M(E, G - V)] = h,$$

Or nous venons de constater que quel que soit l'état initial la densité de probabilité d'aller en M épreuves dans un point (ou plutôt un élément entourant un point) de $\mathcal{A}$ est $> a_1$. Il suit

$$P^M(F, V) + P^M(E, G - V) > P^M(F, V\mathcal{A}) + P^M(E, [G - V]\mathcal{A}) >$$

$$> a_1 \text{ mes } \mathcal{A} = 1 - \tau_1 > 0$$

$$h \leqq \tau_1 < 1$$

$$P^{m+M}(\mathcal{E}) - p^{(m+M)}(\mathcal{E}) \leqq [P^m(\mathcal{E}) - p^m(\mathcal{E})]\,\tau_1$$

$$P^{nM}(\mathcal{E}) - p^{nM}(\mathcal{E}) < \tau_1^n \rightarrow 0.$$

Donc

$$\mathrm{P}^n\ (\mathrm{E}, \mathcal{E}) \dashrightarrow \mathrm{P}(\mathcal{E})$$

$$|\ \mathrm{P}^n(\mathrm{E}, \mathcal{E}) - \mathrm{P}(\mathcal{E})\ | < \tau^{\frac{n}{\mathrm{M}} - \mathrm{i}} \to 0.$$

On montre sans peine que si $\mathcal{E}$ est de mesure positive, P ($\mathcal{E}$) est positive, en partant de ce que pour tout point il existe une probabilité positive de passer dans un nombre fini d'épreuves dans $\mathcal{E}$. Nous désignerons ce cas par „cas positivement régulier“.

Envisageons maintenant de nouveau le cas $d \neq 1$. Si nous ne considérons que les points d'un même sous-ensemble cyclique l et seulement de d en d épreuves, nous avons déjà remarqué qu'on se trouve dans le cas ci-dessus. Par conséquent ($0 < \tau' < 1$) si

$$\mathrm{E}_i \varepsilon\, l \text{ et } \mathcal{E} < l$$

$$|\ \mathrm{P}^{nd}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) - \mathrm{P}_l(\mathcal{E})\ | < \mathrm{K}\, \tau'^n \to 0$$

$$\mathrm{P}^{nd}\ (\mathrm{E}, \mathcal{E}) \to \mathrm{P}_l(\mathcal{E})$$

et P_l ($\mathcal{E}$) sera encore positive pour tout ensemble de mesure positive $< l$, et aussi pour tout ensemble de mesure nulle $< l$, tel qu'on ait une probabilité positive d'aller dans cet ensemble à partir d'un ensemble de mesure positive $<$ G.

Ensuite si $\mathrm{E} \varepsilon\, l$ et $\mathcal{E} \varepsilon\, l_1$ alors nous ne nous trouvons dans l_1 que dans les épreuves d'ordres $n \equiv l_1 - l$ (mod d) et dans ces épreuves nous nous y trouverons certainement. Il suit que.

$$\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = 0, \quad \text{si} \quad n \not\equiv l_1 - l \,(\mathrm{mod}\ d)$$

$$\mathrm{P}^{(n)}\ (\mathrm{E}, \mathcal{E}) \to \mathrm{P}_{l_1}(\mathcal{E}), \quad \text{si} \quad n \equiv l_1 - l\ (\mathrm{mod}\ d)$$

$$|\ \mathrm{P}^{(n)}\ (\mathrm{E}, \mathcal{E}) - \mathrm{P}_{l_1}(\mathcal{E})\ | < \mathrm{K}\, \tau'^n.$$

Nous voyons que la position initiale du point E dans l'ensemble final n'influe sur les propriétés asymptotiques du mouvement qu'en indiquant l'ordre dans le cycle, c'est à dire en indiquant à chaque instant le sous-ensemble cyclique dans lequel le point mobile se trouve.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans le théorème:

Théorème III. *L'ensemble final peut se décomposer en* d *sous-ensembles disjoints 1,. . .*d *de mesures plus grandes que* $> \eta$ *tels qu'on passe avec probabilité 1 en une épreuve cycliquement d'un sous-ensemble cyclique au suivant. A part le rythme forcé introduit par ce mouvement circulaire la distribution de probabilité tendra exponentiellement et uniformément par rapport à la position initiale* *vers une limite indépendante de la position initiale. Plus précisement si*

$$E \varepsilon l, \mathcal{E} < l_1 \quad P^n(E, \mathcal{E}) = 0 \quad n \neq (l_1 - l) \bmod d$$

$$P^n(E, \mathcal{E}) \to P_{l_1}(\mathcal{E}) \quad n \equiv (l_1 - l) \bmod d$$

$$| P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - P_{l_1}(\mathcal{E}) | < K \tau_1^n$$

$$P_{l_1}(\mathcal{E}) > 0 \text{ si mes } (\mathcal{E}) > 0, P_{l_1}(\mathcal{E}) = P_{l_1}(\mathcal{E} l_1)$$

En outre on peut faire toutes les remarques qui ont été faites dans l'exposé § 4 (principe presque-ergodique etc.). Nous voyons qu'il *y* a analogie complète entre le cas fini et le cas continu sous les hypothèses I et II. Enfin, on a

$$P_l(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} P(d\, \mathcal{A}_E)$$

$$P_l(l) = 1$$

$$P_l(W - l) = 0$$

§ 4. — Les probabilités dans les cas général

Si $\mathcal{E}$ est extérieur aux ensembles finals, alors

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < Ke^{-\lambda n}$$

On a

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = 0 \text{ si } E \varepsilon G_\alpha, \mathcal{E}\, G_\alpha = 0$$

Nous avons considéré dans le § précédent les cas où $E \varepsilon G_\alpha$ et $\mathcal{E} \subset G_\alpha$, supposons maintenant que E soit quelconque et $\mathcal{E} \subset l(\alpha)$, en désignant par $l(\alpha)$ le l-ième sous-ensemble cyclique de G_α. Alors soit

$$Pr\,[E, G_\alpha]$$

la probabilité pour que le point mobile passe de E finalement dans G_α, c'est à dire la limite de $P^{(n)}(E, G_\alpha)$. De même soit $Pr\,[E, j(\alpha)]$, la limite de la probabilité ($m \to \infty$) pour que le système se trouve à l'épreuve $m\, d(\alpha)$ dans $j(\alpha)$.

$$Pr\,[E, j(\alpha)] = \lim_{m \to \infty} P^{md(\alpha)}(E, j(\alpha))$$

On a évidemment

$$\sum_{j=1}^{d(\alpha)} Pr\,[E, j(\alpha)] = Pr\,[E, G_\alpha]$$

$$\sum Pr\,[E, G_\alpha] = 1.$$

Ceci posé on trouve (*cfr* exposé § 5) que

$$\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \dashrightarrow \mathrm{P}r\,[\mathrm{E}, l_n(\alpha)] \int_{\mathcal{E}} \mathrm{P}_{l(\alpha)}(d\mathcal{A}_{\mathrm{F}}) = \mathrm{P}r\,[\mathrm{E}, l_n(\alpha)]\,\mathrm{P}_{l(\alpha)}(\mathcal{E})$$

où

$$n = l - l_n \,(\mathrm{mod}\, d(\alpha)).$$

C'est la périodicité du sous-ensemble cyclique $l_n(\alpha)$ qui est la raison de la périodicité asymptotique de $\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$. La différence entre $\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ et sa partie principale périodique, soit $\mathrm{P}r^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$, sera majorée par la terme général d'une progression géometrique décroissante indépendante de E et $\mathcal{E}$. Posons

$$\mathrm{S}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) - \mathrm{P}r^{(n)}\mathrm{E}, \mathcal{E})]$$

la série $\mathrm{S}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$ sera normalement convergente et définira une fonction d'ensemble bornée complètement additive, pour E constant.

Nous avons le tableau

$$\begin{array}{ll} \mathrm{E}\,\varepsilon\, l\,(\alpha) & \left| \begin{array}{lll} \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = 0 & \mathcal{E}\,\mathrm{G}_{\alpha} = 0 & \\ \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = 0 & \mathcal{E} \subset l_1(\alpha) & n \neq l_1 - l\,(\mathrm{mod}\, d\,(\alpha)) \\ \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \dashrightarrow \mathrm{P}_{l_1(\alpha)}(\mathcal{E}) & \text{,,} & n = l_1 - l\,(\mathrm{mod}\, d\,(\alpha)) \\ \quad > 0 \text{ si } mes(\mathcal{E}) > 0 \text{ ,,} & & \end{array} \right. \\ \text{,,} & \\ \text{,,} & \end{array}$$

$$\mathrm{E}\,\varepsilon\,\mathrm{G}_{\alpha_1} + \cdots + \mathrm{G}_{\alpha_e} \begin{cases} \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \dashrightarrow 0 \\ \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \dashrightarrow \mathrm{P}r\,[\mathrm{E}, l_n(\alpha)]\,\mathrm{P}_{l(\alpha)}(\mathcal{E}),\ \mathcal{E} < l\,(\alpha) \\ \hfill n \equiv l - l_n\,(\mathrm{mod}\, d\,(\alpha)) \end{cases}$$

$$\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \dashrightarrow \mathrm{P}r^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = \sum_{\alpha, j} \mathrm{P}r\,[\mathrm{E}, j_n\,(\alpha)]\,\mathrm{P}_{j(\alpha)}(\mathcal{E} j\,(\alpha))$$

$$n = j - j_n \bmod d\,(\alpha).$$

§ 5. — Les $\Pi(\mathrm{E}, \mathcal{E})$, moyennes de Césàro

Nous avons vu que

$$\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) \sim \mathrm{P}r^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$$

expression périodique en n, dont nous avons donné la forme dans le tableau du § 4. Comme dans le cas fini la périodicité s'éliminera dans la considération des moyennes de Césàro.

$$\Pi^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = \frac{\mathrm{P}^{(1)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}) + \cdots + \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})}{n},\ \Pi(\mathrm{E}, \mathcal{E}) = \lim_{n \to \infty} \Pi^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$$

Nous pouvons écrire

$$\Pi^{(n)}(E,\mathcal{E}) = \frac{\sum_1^n Pr^{(i)}(E,\mathcal{E})}{n} + \frac{\sum_1^n (P^{(i)}(E,\mathcal{E}) - Pr^{(i)}(E,\mathcal{E}))}{n}$$

Si $\mathcal{E} < W - \Sigma G_\alpha$, les $Pr^{(i)}(E,\mathcal{E})$ sont nuls et dans ce cas $\Pi^{(n)}(E,\mathcal{E})$ tend vers zéro, $\Pi(E,\mathcal{E}) = 0$ si $\mathcal{E} < W - \Sigma G_\alpha$.

Supposons que $\mathcal{E} < l(\alpha)$, alors les $Pr^{(i)}(E,\mathcal{E})$ ont la période $d(\alpha)$ et

$$\Pi^{(n)}(E,\mathcal{E}) \to \Pi(E,\mathcal{E}) = \frac{Pr^{(1)}[E,\mathcal{E}] + \ldots + Pr^{d(\alpha)}[E,\mathcal{E}]}{d(\alpha)}$$

et de l'expression des $Pr^{(i)}(E,\mathcal{E})$ résulte

$$\begin{aligned} Pr^{(1)}[E,\mathcal{E}] + \ldots + Pr^{d(\alpha)}[E,\mathcal{E}] &= \{Pr[E,1(\alpha)] + \ldots + Pr[E,d(\alpha)\}\, P_{l(\alpha)}(\mathcal{E}) \\ &= Pr[E,G_\alpha]\, P_{l(\alpha)}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Donc

$$\Pi(E,\mathcal{E}) = Pr[E,G_\alpha] \frac{P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})}{d(\alpha)}$$

On voit que si $E \in G_\alpha$, $\mathcal{E} < l(\alpha)$, $\Pi(E,\mathcal{E})$ ne dépend pas de la position initiale dans cet ensemble final:

$$\Pi(E,\mathcal{E}) = \frac{P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})}{d(\alpha)} = \Pi_{G_\alpha}(\mathcal{E})$$

et dans le cas général E, $\mathcal{E}$ quelconques nous pouvons écrire

$$\Pi(E,\mathcal{E}) = \sum_{\alpha=1}^{l} Pr[E,G_\alpha]\, \Pi_{G_\alpha}(\mathcal{E}) = \sum_{\alpha=1}^{l} Pr[E,G_\alpha]\, \Pi_{G_\alpha}(\mathcal{E} G_\alpha).$$

Nous allons envisager la grandeur

$$n\,[\Pi^{(n)}(E,\mathcal{E}) - \Pi(E,\mathcal{E})] = \sum_1^n Pr^{(i)}(E,\mathcal{E}) - n\,\Pi(E,\mathcal{E}) + R^{(n)}(E,\mathcal{E})$$

$R^{(n)}(E,\mathcal{E})$ tend vers $S(E,\mathcal{E})$. Soit D le plus petit commun multiple *des* $d(\alpha)$

$$\sum_1^n Pr^{(i)}(E,\mathcal{E}) - n\,\Pi(E,\mathcal{E}) = Pr^{(1)}(E,\mathcal{E}) + \ldots + Pr^{(\rho)}(E,\mathcal{E}) - \rho\,\Pi(E,\mathcal{E})$$

$$n \equiv \rho \bmod D$$

C'est une fonction périodique de n avec période D que nous désignerons par

$$\psi^{(\rho)}(E,\mathcal{E}) = \psi^{(n)}(E,\mathcal{E})$$

Alors nous avons

$$n\,[\Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) - \Pi(E, \mathcal{E})] = R^{(n)}(E, \mathcal{E}) + \psi^{(n)}(E, \mathcal{E}),$$

ceci tend vers la fonction périodique

$$S(E, \mathcal{E}) + \psi^{(n)}(E, \mathcal{E})$$

une limite n'existe pour tout $\mathcal{E}$ que dans le cas non oscillant. Remarquons que $\psi^{(n)}$ est nulle si $\mathcal{E}$ n'appartient pas aux ensembles finals ou a un ensemble final n'ayant qu'un seul sous-ensemble cyclique

§ 6. — Définition et critères

Nous allons introduire comme dans le cas fini les notions de cas positivement régulier etc.

Cas positivement régulier. Nous dirons que nous sommes dans le cas positivement régulier, lorsque la probabilité $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ pour que le point mobile parti de E se trouve après n épreuves dans $\mathcal{E}$ tend vers une limite $P(\mathcal{E})$ indépendante de la position initiale et positive si la mesure de $\mathcal{E}$ est positive.

Introduisons la notion de *noyau d'ensemble stochastique.* Nous désignerons par la toute fonction $Q^{(1)}(E, \mathcal{E})$, dépendant d'une part d'un point, d'autre part d'un ensemble, étant en tant que fonction d'ensemble complètement additive, non négative et satisfaisant à $Q^{(1)}(E, W) = 1$. Un noyau d'ensemble stochastique sera dit *indécomposable* si pour chaque E et $\mathcal{E}$ de mesure positive il y a un n avec $Q^{(n)}(E, \mathcal{E}) > 0$; un noyau indécomposable sera dit *non-cyclique*, si-en dehors peut-être d'un ensemble de mesure nulle-on ne peut pas décomposer l'ensemble de variation sur lequel il est défini en plusieurs sous-ensembles cycliques tels qu'on passe avec probabilité 1 en une épreuve de l'un au suivant. Ce sont les généralisations des notions de matrices stochastiques, indécomposables et non cycliques.

Alors il résulte immédiatement des § précédents (on suppose toujours que nos conditions I, II du § 1 sont satisfaites):

Critère: La condition nécessaire et suffisante pour que le noyau d'ensemble stochastique définisse un cas positivement régulier est qu'il soit indécomposable et non cyclique.

Cas régulier. Nous dirons que nous sommes dans le cas régulier si $p^{(n)}(E, \mathcal{E})$ tend vers une limite $P(\mathcal{E})$ indépendante de la position initiale,

Critère. Pour qu'on soit dans le cas régulier, il faut et il suffit qu'il n'existe qu'un seul ensemble final et que cet ensemble ne se décompose pas en plusieurs sous-ensembles cycliques.

Cas non-oscillant. On sera dans le cas non-oscillant, si $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ tend vers une limite pouvant dépendre de la position initiale.

Critère. Pour qu'on soit dans le cas non-oscillant il faut el il suffit qu'aucun ensemble final n'ait plusieurs sous-ensembles cycliques

Cas semi-régulier. On sera dans le cas semi-régulier si les $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ convergent dans le sens de Césàro vers une limite $\Pi(\mathcal{E})$ indépendante de l'état initial, c. à. d. si $\Pi(E, \mathcal{E})$ est indépendante de la position initiale $\Pi(E, \mathcal{E}) = \Pi(\mathcal{E})$. On voit sans peine en regardant la valeur des $\Pi(E, \mathcal{E})$ donnés dans le § 5 qu'on a le

Critère. Pour qu'on soit dans le cas semi-régulier, il faut et il suffit qu'il n'y ait qu'un seul ensemble final.

§ 7. — Calcul des parties asymptotiques des probabilités

1. *Cas positivement régulier.* Nous savons que $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ tend vers une limite positive $P(\mathcal{E})$ et $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - P(\mathcal{E})| < k\lambda^n$; comme $P^{(n)}(E, W) = 1$ il suit que $P(W) = 1$, d'autre part en passant à la limite dans

$$P^{(n+1)}(E, \mathcal{E}) = \int P^{(1)}(F, \mathcal{E})\, P^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

nous voyons que la distribution limite satisfait aux deux équations

$$\left.\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= \int_W P^{(1)}(E, \mathcal{E})\, P(d\mathcal{A}_E) \\ P(W) &= \int_W P(d\mathcal{A}_E) = 1 \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Ces deux équations déterminent complètement les $P(\mathcal{E})$, comme on le voit sans peine (*cfr* exposé § 8 et ce Chapitre § 8).

2. *Cas régulier.* Nous avons encore une distribution stable limite determinée par les équations (1), mais elle satisfait aussi aux équations.

$$P(\mathcal{E}) = \int_G P^{(1)}(E, \mathcal{E})\, P(d\mathcal{A}_E)$$

$$P(G) = 1$$

$$P(\mathcal{E}) = 0 \text{ si } \mathcal{E}\, G = 0$$

G étant l'ensemble final.

3. *Cas non-oscillant.* Nous savons que si $\mathcal{E} < G_\alpha$

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow Pr[E, G_\alpha]\, P_\alpha(\mathcal{E})$$

et si $\mathcal{E}\, \Sigma\, G_\alpha = 0$, alors $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow 0$. Nous n'avons donc qu'à nous occuper du premier cas $\mathcal{E} < G_\alpha$. A l'intérieur des ensembles finals on se trouve dans le cas positivement régulier, on calculera donc les $P_\alpha(\mathcal{E})$ par les formules de 1). Reste à calculer $Pr\,[E, G_\alpha]$. Nous avons en passant à la limite dans

$$P^{(n+1)}(E, G_\alpha) = \int_W P^{(n)}(F, G_\alpha)\, P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

l'équation

$$Pr\,[E, G_\alpha] = \int_W Pr\,[F, G_\alpha]\, P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F).$$

On voit comme dans la cas fini que cette équation integrale n'a qu'une seule solution satisfaisant aux condition évidentes

$$\begin{aligned} Pr\,[E, G_\alpha] &= 1 \text{ si } E \in G_\alpha \\ &= 0 \text{ si } E \in G_\beta \ (\beta \neq \alpha) \end{aligned}$$

On *a* la relation:

$$\sum_\alpha Pr[E, G_\alpha] = 1$$

4. *Cas singulier à l'intérieur d'un ensemble final.* Supposons que $E \in l_1$, et $\mathcal{E} < l_1$, alors nous savons que

$$\begin{aligned} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) &= 0 & n &\neq (l - l_1) \bmod d\ (\alpha) \\ &\to P_l(\mathcal{E}) & n &= (l - l_1) \bmod d\ (\alpha) \end{aligned}$$

$P_l(\mathcal{E})$ étant aussi limite de $P^{n\,d}$ $(E, \mathcal{E})$, si $E \in l$ et $\mathcal{E} < l$.

Si l'on ne regarde que des points de l et de d en d épreuves seulement, les $P^{(d)}(F, \mathcal{E})$ définissent un cas positivement régulier. Il résulte de 1) que les distributions limites satisfont au système

$$\begin{aligned} P_l(\mathcal{E}) &= \int_l P^{(d)}(E, \mathcal{E})\, P_l(d\mathcal{A}_E) \\ P_l(l) &= 1 \qquad\qquad\qquad \mathcal{E} < l \end{aligned}$$

et en sont les solutions uniques. Comme dans le cas fini, il résulte de l'allure cyclique du mouvement qu'il suffit de résoudre un seul de ces systèmes, les autres s'obtiendront par les formules

$$\mathcal{E} < l: \quad P_l(\mathcal{E}) = \int_d P^{(l)}(E, \mathcal{E})\, P_d(d\mathcal{A}_E)$$

On vérifie encore les équations

$$[P_1(\mathcal{E})+P_2(\mathcal{E})+\dots P_d(\mathcal{E})]=\int_W P^{(1)}(E,\mathcal{E})[P_1(d\mathcal{A}_E)+\dots+P_d(d\mathcal{A}_E)]$$

$$P_1(W)+P_2(W)+\dots+P_d(W)=d(x).$$

5. *Cas singulier général.* Si E appartient aux ensembles finals ou si $\mathcal{E}$ n'y appartient pas ($\mathcal{E}\,\Sigma\,G_\alpha=0$), les formules du § 5 et ce qui précède nous mettent sans difficulté en mesure de calculer les parties asymptotiques des $P^{(n)}(E,\mathcal{E})$. Supposons donc que E n'appartient pas aux ensembles finals et que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $l(\alpha)$, alors

$$P^{(n)}(E,\mathcal{E}) \approx Pr[E, l_n(\alpha)]\,P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})$$

Nous venons de montrer que le calcul des $P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})$ se ramène à la solution d'une équation intégrale, il nous reste à calculer les $Pr[E, j(\alpha)]$, c'est à dire les limites des $P^{nd(\alpha)}[E, j(\alpha)]$. Un passage à la limite facile nous montre que ces quantités satisfont en tant que fonctions de E à l'équation

$$Pr[E, j(\alpha)]=\int_W Pr[F, j(\alpha)]\,P^{(d)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

et aux conditions

$$Pr[E, j(\alpha)]=1 \qquad \text{si} \quad E\,\varepsilon\,j(\alpha)$$
$$Pr[E, j(\alpha)]=0 \qquad \text{si} \quad E\,\varepsilon\,k(\beta)\ [k(\beta)\neq j(\alpha)]$$

Ces conditions déterminent les $Pr[E, j(\alpha)]$ sans ambiguité. Nous avons donc ramené le calcul des parties asymptotiques des $P^{(n)}(E,\mathcal{E})$ à la résolution d'un certain nombre d'équations intégrales où les noyaux sont des noyaux de Stieltjes.

Nous avons les relations

$$Pr^{(n+m)}(E,\mathcal{E})=\int_W Pr^{(n)}(F,\mathcal{E})\,Pr^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F)=$$

$$=\int_W Pr^{(n)}(F,\mathcal{E})P^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F)=\int_W P^{(n)}(F,\mathcal{E})Pr^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

desquelles on tire en particulier :

$$Pr[E, l_n(\alpha)]=\int_W Pr[F, l(\alpha)]\,P^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

formule qui montre qu'il suffit de calculer les $Pr[E, l(\alpha)]$ pour un seul sous-ensemble $l(\alpha)$ de G_α. On aura alors immédiatement tous les autres $Pr\,[E, j(\alpha)]$ par la formule (2).

Lorsqu'on voudra pratiquement résoudre les équations intégrales qui déterminent les $P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})$ et les $Pr\,[E, l(\alpha)]$, on sera en général obligé à écrire que p. ex. $P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})$ est la limite de $P^{(md)}(E, \mathcal{E})$ où $E \in l(\alpha)$ et $d = d(\alpha)$.

$$P_{l(\alpha)}(\mathcal{E}) = P^{(d)}(E, \mathcal{E}) + \{P^{(2d)}(E, \mathcal{E}) - P^{(d)}(E, \mathcal{E})\} + \dots$$
$$+ \{P^{(md)}(E, \mathcal{E}) - P^{(m-1)d}(E, \mathcal{E})\} + \dots$$

série majorée par une progression géometrique à raison < 1.

Et de même, $Pr\,[E, l(\alpha)] = \lim P^{(nd)}[E, l(\alpha)]$

$$Pr\,[E, l(\alpha)] = P^{(d)}[E, l(\alpha)] + P^{(2d)}(E, l(\alpha)) - P^{(d)}(E, l(\alpha)) \dots$$
$$+ P^{(nd)}[E, l(\alpha)] - P^{nd-d}[E, l(\alpha)] + \dots$$

Toutefois en certains cas il peut être avantageux de passer par les équations intégrales.

Comme $|P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})| < K\lambda^n$, $0 < \lambda < 1$, la série

$$S(E, \mathcal{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} [P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})]$$

est absolument et normalement convergente. Elle définit une fonction d'ensemble additive et bornée. On peut facilement montrer que les $S(E, \mathcal{E})$ satisfont à des équations intégrales qui les déterminent sans ambiguité. Mais cela n'a pas beaucoup d'intérêt parce que si l'on veut les résoudre on sera en général amené à écrire que $S(E, \mathcal{E})$ est précisément égale à la série qui la définit. Remarquons qu'on peut mettre les $S(E, \mathcal{E})$ sous des formes où n'interviennent pas les $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})$. Par exemple dans le cas régulier où $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E}) = P(\mathcal{E})$, on peut écrire

$$S(E, \mathcal{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,[P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - P^{(n+1)}(E, \mathcal{E})]$$

Il faut noter les relations suivantes, qu'on démontre sans peine.

$$S(E, W) = 0$$
$$S(E, l(\alpha)) = 0 \qquad \text{si } E \in G_\alpha$$

et

$$\int_W Pr^{(n)}(F, \mathcal{E})\, S(E, d\mathcal{A}_F) = 0$$

$$\int_W S(F, \mathcal{E})\, Pr^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F) = 0$$

qui montrent que les noyaux $S(E, \mathcal{E})$ et $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})$ sont orthogonaux.

§ 8. — Sur les constantes fondamentales de module 1 et sur les fonctions fondamentales correspondantes.

Considérons les deux équations

$$\varphi(E)=\lambda\int_W \varphi(F)\,P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F) \qquad (1)$$

$$\psi(\mathcal{E})=\lambda\int_W P^{(1)}(F,\mathcal{E})\,\psi(d\mathcal{A}_F) \qquad (2)$$

$\varphi(E)$ étant borneé, $\psi(\mathcal{E})$ une fonction d'ensemble complètement additive et bornée. Les valeurs pour lesquelles une de ces équations a une solution non partout nulle sont dites les constantes fondamentales du noyau $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$. On déduit de ces équations

$$\varphi(E)\lambda^{-n}=\int_W \varphi(F)\,P^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F) \qquad (3)$$

$$\psi(\mathcal{E})\lambda^{-n}=\int_W P^{(n)}\,F, \mathcal{E})\,\psi(d\mathcal{A}_F) \qquad (4)$$

Or les intégrales figurant aux membres droits de ces équations restent bornées, $\varphi(E)$ et $\psi(\mathcal{E})$ ne sont pas partout nulles, il suit que

$$|\lambda| \geqq 1$$

Toutes les constantes fondamentales du noyau $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ *sont en module* $\geqq 1$.

Si λ est une valeur fondamentale de module > 1, s'il existe une fonction $\varphi(E)$ ou $\psi(\mathcal{E})$ qui satisfait pour cet λ à l'équation (1) resp (2), on peut écrire

$$\varphi(E)=\lambda^n\int_W \varphi(F)\,Pr^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F) + \lambda^n\int_W \varphi(F)\,[P^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F)-Pr^{(n)}(E, \mathcal{A}_F)].$$

respectivement

$$\psi(\mathcal{E})=\lambda^n\int_W Pr^{(n)}[F, \mathcal{E}]\,\psi(d\mathcal{A}_F) + \lambda^n\int_W \{P^{(n)}[F, \mathcal{E}]-Pr^{(n)}[F, \mathcal{E}]\}\,\psi(d\mathcal{A}_F)$$

On en conclut que

$$\int_W \varphi(F) Pr^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F) = 0$$

respectivement

$$\int_W Pr^{(n)}(F, \mathcal{E})\,\psi(d\mathcal{A}_F) = 0$$

équations qui se réduisent à

$$\int_W \varphi(F)\,P_{j(\alpha)}(d\mathcal{A}_F) = 0 \qquad j = 1, .\ .\ d(\alpha),$$

respectivement

$$\int_W Pr\,[E, j(\alpha)]\,\psi\,(d\mathcal{A}_F) \qquad j = 1, \dots d(\alpha).$$

On déduit des équations (3) et (4) que les fonctions fondamentales relatives à des constantes fondamentales de module > 1, satisfont à

$$\varphi(E) = (\lambda - 1)\int_W \varphi(F)\,S(E, d\mathcal{A}_F)$$

ou

$$\psi(\mathcal{E}) = (\lambda - 1)\int_W S(F, \mathcal{E})\,\psi\,(d\mathcal{A}_F)$$

Revenons aux constantes fondamentales de module 1. Il résulte immédiatement des équations (3) et (4) que les membres droits étant asymptotiquement périodiques avec période entière D, on a

$$\lambda^D = 1.$$

Donc *toutes les constantes fondamentales de module 1 sont racines d'une même équation binome* (ce qui est un résultat de M. Fréchet dans l'hypothèse de l'existence d'une densité $p^{(1)}(E, F)$ telle qu'une itérée soit bornée). Il en résulte ensuite, le membre gauche étant exactement périodique que

$$\int_W \varphi(F)\,\{P^{(n)}[E, d\mathcal{A}_F] - Pr^{(n)}[E, d\mathcal{A}_F]\} = 0$$

$$\int_W [P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})]\,\psi\,(d\mathcal{A}_E) = 0.$$

D'autre part

$$\int_{W} \varphi(F)\, Pr^{(1)}[E, d\mathcal{A}_F] = \sum_{l,\alpha} Pr[E, l_1(\alpha)] \int_{G\alpha} \varphi(F)\, P_{l(\alpha)}(d\mathcal{A}_F)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum a_{l\alpha} Pr[E, l(\alpha)]$$

Les fonctions φ (E) sont donc des combinaisons linéaires des Pr [E, l (α)], et l'on voit de même que les ψ ($\mathcal{E}$) sont de la forme $\Sigma\, b_{l,\alpha} P_{l,\alpha}(\mathcal{E})$ Cherchons les relations entre les $a_{l,\alpha}$. On doit avoir si λ est une constante fondamentale

$$\sum a_{l,\alpha} Pr[E, l(\alpha)] = \lambda \int_{W} \sum a_{l,\alpha} Pr[F, l(\alpha)]\, P^{(1)}(E, \mathcal{A}_F)$$

$$= \lambda \sum a_{l,\alpha} \int_{W} Pr[F, l(\alpha)]\, P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F) = \lambda \sum a_{l,\alpha} Pr[E, l_1(\alpha)]$$

où

$$1 \equiv (l - l_1) \bmod d(\alpha).$$

Faisons $E < l(\alpha)$, alors $Pr[E, l(\alpha)] = 1$, $Pr[E, l'(\beta)] = 0$, l'équation devient

$$a_{l,\alpha} = a_{l+1,\alpha}\lambda$$

et

$$a_{1,\alpha} = a_{2,\alpha}\lambda = \ldots = \lambda^{d(\alpha)-1} a_{d,\alpha} = \lambda^{(d(\alpha} a_{1,\alpha}$$

par conséquent si $\lambda^{d(\alpha)} \neq 1$

$$a_{1,\alpha} = a_{2,\alpha} = \ldots a_{d,\alpha} = 0$$

si $\lambda^{d(\alpha)} = 1$, on peut prendre

$$a_{1,\alpha} = a_\alpha \lambda^{d(\alpha)}, a_{2,\alpha} = a_\alpha \lambda^{d(\alpha)-1}, \ldots, a_{d(\alpha),\alpha} = \lambda a_\alpha$$

on trouve analoguement les relations

$$b_{d(\alpha),\alpha} = \lambda b_{d-1,\alpha} = \ldots = \lambda^{d(\alpha)-1} b_{1,\alpha} = \lambda^{d(\alpha)} b_{d,\alpha}$$

donc si $\lambda^{d(\alpha)} \neq 1$, $b_{1,\alpha} = \ldots = b_{d,\alpha} = 0$, si $\lambda^{d(\alpha)} = 1$, on peut prendre

$$b_{d,\alpha} = \lambda^{d(\alpha)} b_\alpha, b_{d-1\,\alpha} = \lambda^{d(\alpha)-1} b_\alpha, \ldots, b_{1,\alpha} = b_\alpha$$

Nous voyons que les constantes fondamentales de module 1 du noyau sont toutes les racines de l'équation:

$$\prod_{\alpha} (\lambda^{d(\alpha)} - 1) = 0$$

A chaque ensemble final G_{α} correspond le facteur $\lambda^{d(\alpha)} - 1 = 0$ et les fonctions fondamentales relatives aux racines de $\lambda^{d(\alpha)} - 1 = 0$

$$\lambda^{d(\alpha)} Pr[E, 1(\alpha)] + \lambda^{d(\alpha)-1} Pr[E, 2(\alpha)] + \dots \lambda Pr[E, d(\alpha)]$$

$$\lambda P_{1(\alpha)}(\mathcal{E}) + \lambda^{2} P_{2(\alpha)}(\mathcal{E}) + \dots \lambda^{d(\alpha)} P_{d(\alpha)}(\mathcal{E})$$

Au congrès de Bologne M. Hadamard a donné, probablement sous l'hypothèse d'une densité $p^{(1)}(E, F)$ continue, un certain nombre de résultats concernant les fonctions $\varphi(E)$ correspondant aux constantes fondamentales de module 1. Ces résultats donnés dans l'exposé très concis de M. Hadamard sans démonstration et sans explication des hypothèses, ont été démontrés sous les hypothèses d'une densité $p^{(1)}(E, F)$ avec une itéré $p^{(N)}(E, F)$ bornée par M. Fréchet. Ils sont fort curieux à priori, et on ne voit pas trop bien leurs raisons. Nous allons voir qu'ils s'expliquent très facilement par la forme donnée des fonctions $\varphi(E)$. Supposons que $\lambda = e^{i\psi}$ soit une racine des équations $\lambda^{d(\alpha)} = 1$ pour $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ Alors nous pouvons écrire

$$\varphi(E) = a_{\alpha_1}(\lambda^{d(\alpha_1)} Pr[E, 1(\alpha_1)] + \dots) + a_{\alpha_2}(\lambda^{d(\alpha_2)} Pr[E, 1(\alpha_2)] + \dots) +$$

Pour simplifier l'exposé nous nous bornons au cas où nous n'avons qu'un seul $a_{\alpha} \neq 0$, que nous pouvons supposer $= 1$. Alors soit $\lambda^{\nu} - 1 = 0$ l'équation binome du plus petit degré que λ vérifie, $d(\alpha) = R\nu$. Il vient

$$\varphi(E) = [Pr[E, 1(\alpha)] + Pr[E, \overline{\nu + 1}(\alpha)] + - + Pr[E, \overline{(R-1)\nu + 1}(\alpha)]] +$$
$$+ \lambda^{-1}[Pr[E, 2(\alpha)] \dots +] + \dots + \lambda^{-2}[] + \dots$$

et le maximum de $\varphi(E)$ sera atteint si

$$Pr[E, l(\alpha)] + Pr[E, \overline{l + \nu}(\alpha)] + \dots Pr[E, \overline{(R-1)\nu + l}(\alpha)] = 1$$

car

$$\sum_{j, \alpha} Pr[E, j(\alpha)] = 1, \quad Pr[E, j(\alpha)] \geq 0$$

Dans ce cas $\varphi(E)$ se réduit à λ^{-l}. Les affixes des différentes valeurs de module 1 que $\varphi(E)$ peut prendre sont donc les extrémités d'un polygone régulier à ν côtés inscrit dans le cercle $z = 1$ du plan complexe. (Dans le cas général on aurait obtenu une figure formée de plusieurs polygones réguliers à ν côtés inscrits dans le cercle unité).

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des affixes des valeurs de module 1 que $\varphi(E)$ peut prendre. Il est évident que l'ensemble $\mathfrak{M}$ reste invariant par une rotation d'angles $\frac{2\pi}{\nu}$ ou ψ. A chaque point de $\mathfrak{M}$, soit $e^{i\theta(E)}$, $\left(\theta = \frac{2l\pi}{\nu}, 0 < l \leq \nu\right)$, corespond un certain ensemble de points, soit e_{θ}, de

W où $\varphi(E) = e^{i\theta(E)}$, de mesure $> \eta$, car $e_{\frac{2\pi(\nu - l + 1)}{\nu}}$ est comme nous avons vu l'ensemble des points E pour lesquels

$$Pr[E, l(\alpha)] + Pr[E, \overline{\nu + l}(\alpha)] + \ldots + Pr[E, \overline{R - 1\nu + l}(\alpha)] = 1$$

et cet ensemble comprend le sous-ensemble cyclique $l(\alpha)$ qui est de mesure $> \eta$. Les ensembles l_θ pour des valeurs différentes de θ sont evidemment disjoints et leur somme $\Sigma\, l_\theta$ forme un ensemble total $\mathcal{E}$ appartenant à W. Je dis que le point mobile passe presque-sûrement à chaque épreuve de l'ensemble l_θ dans l'ensemble $l_{\theta-\psi}$.

En effet, si $\theta = 0$ p. ex., l_θ dans l'ensemble de points où

$$Pr[E, 1(\alpha)] + \ldots + Pr[E, \overline{1 + (R - 1)\nu}(\alpha)] = 1$$

alors $l_{\theta-\psi} = l_{-\psi}$ sera l'ensemble des points où

$$Pr[E, 2(\alpha)] + \ldots + Pr[E, \overline{2 + (R - 1)\nu}(\alpha)] = 1$$

Et en vertu du mouvement cyclique qui nous a donné l'équation

$$Pr[E, l_1(\alpha)] = \int_W Pr[F, l(\alpha)]\, P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F) \quad 1 \equiv l - l_1 (\mathrm{mod}\, d(\alpha))$$

$$Pr[E, 1(\alpha)] + \ldots + Pr[E, \overline{1 + R - 1)\nu}(\alpha)] = \int \{Pr[F, 2(\alpha)] + \ldots$$
$$+ Pr[F, \overline{2 + (R - 1)\nu}(\alpha)\}\, P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

donc si $E \varepsilon e_0$

$$1 = \int_W \{Pr[F, 2(\alpha)] + \ldots + Pr[F, \overline{2 + (R - 1)\nu}(\alpha)]\}\, P^{(1)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

et cette égalité ne peut avoir lieu, si la probabilité de passer de E dans l'ensemble des points où $Pr\,[F, 2(\alpha)] + Pr\,[F, \overline{2 + \nu}(\alpha)] + \ldots + Pr\,[F, 2 + (R - 1)\nu(\alpha)] < 1 - \varepsilon$ est positive. $P^{(1)}(E, l_{-\psi}) = 1$. C. q. f. d.

§ 9. — Le cas du battage des cartes

Pour des raisons de commodité, nous désignerons encore ici sous le nom de battage des cartes le cas où la condition suivante est remplie :

$$\int_W P^{(1)}(E, \mathcal{E})\, dE = \mathrm{mes}(\mathcal{E})$$

On déduit sans peine qu'elle entraîne

$$\int_{\mathrm{W}} \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})\, d\,\mathrm{E} = \mathrm{mes}(\mathcal{E})$$

et

$$\int_{\mathrm{W}} \mathrm{P}r^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E})\, d\,\mathrm{E} = \mathrm{mes}\,(\mathcal{E}).$$

De

$$\int_{\mathrm{W}} \mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathrm{W} - \Sigma \mathrm{G}_\alpha)\, d\,\mathrm{E} = \mathrm{mes}(\mathrm{W} - \Sigma \mathrm{G}_\alpha)$$

et

$$\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathrm{W} - \Sigma \mathrm{G}_\alpha) \rightarrow 0$$

nous déduisons que

$$\mathrm{mes}\,(\mathrm{W} - \Sigma \mathrm{G}_\alpha) = 0.$$

En dehors d'un ensemble de mesure nulle, W se décompose dans les différents ensembles finals. Je dis que les sous-ensembles cycliques d'un même ensemble final ont la même mesure $= \frac{\mathrm{mes}\,(\mathrm{G}_\alpha).}{d\,(\alpha)}$ Démontrons cela pour les sous-ensembles cycliques $d\,(\alpha)$ et $1\,(\alpha)$. Nous avons

$$\int_d \Big[\int_{1(\alpha)} \mathrm{P}\,(\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}}) \Big] d\,\mathrm{E} = \int_{d(\alpha)} \mathrm{P}\,(\mathrm{E}, 1\,(\alpha))\, d\,\mathrm{E} = \mathrm{mes}\, d\,(\alpha)$$

$$= \int_{1(\alpha)} \int_{d(\alpha)} \mathrm{P}\,(\,\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}})\, d\,\mathrm{E} = \mathrm{mes}\; 1\,(\alpha) = \mathrm{mes}\;\, d\,(\alpha).$$

Considérons la distribution $\mathrm{P}_{l(\alpha)}\,(\mathcal{E})$. Elle est déterminée par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{l(\alpha)} \mathrm{P}^d\,(\mathrm{E}, \mathcal{E})\, \mathrm{P}_{l(\alpha)}\,(d\,\mathcal{A}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{P}_{l(\alpha)}\,(\mathcal{E}) \\ \qquad\quad \mathrm{P}_{l(\alpha)}\,(l\,(\alpha)) = 1 \end{array} \right.$$

elle est donc égale à $\frac{\mathrm{mes}\,(\mathcal{E})}{\mathrm{mes}\,(l\,(\alpha))}$ puisque la distribution uniforme est une solution du système ci-dessus.

§ 10. — Les probabilités inverses

1. *Probabilités absolues.* Comme au § 11 de l'exposé, nous pouvons envisager les probabilités absolues. Si nous supposons qu'à l'instant initial on a eu la probabilité initiale $Q_0(\mathcal{E})$ pour que le point mobile se trouve dans $\mathcal{E}$, la probabilité „absolue“ d'être à la n$^{\text{-ième}}$ épreuve dans $\mathcal{E}$ est

$$Q_0^{(n)}(\mathcal{E}) = \int_W P^{(n)}(F, \mathcal{E})\, Q_0(d\mathcal{A}_F).$$

Si au contraire nous supposons que le mouvement du point mobile n'a pas commencé à une date finie, mais dure depuis „toujours“, on est conduit à définir une probabilité $Q^{(n)}(\mathcal{E})$, probabilité „absolue“ pour que le point mobile se trouve à l'instant n dans $\mathcal{E}$ pour tout $n, (-\infty < n < \infty)$. On voit sans peine comme dans le cas fini que ce probabilités absolues sont nécessairement de la forme des

$$Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})$$

dépendant donc en gènéral d'un certain nombre de paramètres.

2. *Probabilités à posteriori.* Supposons d'abord que notre point mobile n'évolue que depuis un temps fini et qu'à l'instant initial O il était dans E. Soit alors $\mathcal{E}$ un ensemble avec $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) > 0$. Nous pouvons nous demander quelle est la probabilité pour que le point mobile qu'on a observé à l'épreuve n dans $\mathcal{E}$ s'est trouvé à l'épreuve m $(m < n)$ dans un ensemble J. Cette probabilité sera donnée par la formule de Bayes et s'écrira

$$\frac{\int_J P^{(n-m)}(F, \mathcal{E})\, P^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F)}{\int_W P^{(n-m)}(F, \mathcal{E})\, P^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F)} = \frac{\int_J P^{n-m}(F, \mathcal{E})\, P^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F)}{P^{(n)}(E, \mathcal{E})}$$

Elle dépendra en général de n et de m, et pas seulement de $n - m$. Dans le cas fini, nous avions vu que les probabilités à posteriori ne changeaient pas lorsque on se donnait en outre les positions ultérieures du point mobile aprés l'instant n. Ici il n'en est plus de même en général.

Les probabilités à posteriori calculées par la formule ci-dessus perdent tout sens lorsque l'ensemble $\mathcal{E}$ est tel que $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = 0$. Toute fois il est intéressant de connaitre la distribution de probabilité à un instant intermédiaire lorsque et la position initiale E du point mobile et sa position H à l'instant n est connue. Il est évident qu'en général cette loi de probabilité n'existe pas, nous pouvons toujours changer les densités de probabilité dans un ensemble de mesure nulle et modifier ainsi les lois de probabilités à posteriori, sans modifier les probabilités à priori que nous supposons seules données. Mais si, quel que soit la suite d'ensembles $\mathcal{E}_i$ convergeant vers H, la probabilité à posteriori calculée par la formule de Bayes tend vers une limite indépendante de la suite d'ensembles particulière, alors nous pourrons l'interpréter comme probabilité à posteriori pour que le point se trouve à l'instant *m* dans l'ensemble J, sa position initiale ayant été E et sa position à l'instant *n* étant H.

Si nous nous bornons pour l'instant à l'hypothèse qu'il existe une densité de probabilité bornée et continue p (E, F), et que notre ensemble est tel que dans chaque sphère entourant un de ces points de rayon positif, il y a un ensemble de mesure positive de points de notre ensemble[13]), alors il est évident que si $p^{(n)}$ (E, H) $\neq 0$ cette limite existe et sera égale à

$$\frac{\int_J p^{(m)}(E, F)\, p^{n-m}(F, H)\, dF}{p^n(E, H)}.$$

Il existera même dans ce cas une densité de probabilité à posteriori. égale à

$$\frac{p^{(m)}(E, F)\, p^{n-m}(F, H)}{p^{(n)}(F, H)}$$

indépendante de tout ce que nous pouvons savoir sur le mouvement du point mobile postérieurement à la n-ième épreuve.

Supposons maintenant que le point mobile évolue depuis $n = -\infty$, Alors les probabilités absolues sont de la forme $P r^{(n)}(E, \mathcal{E}) = Q^{(n)}(\mathcal{E})$ donc nulles en dehors de $\Sigma\, G_\alpha$. Envisageons un ensemble $\mathcal{E}$ avec $Q^{(n)}(\mathcal{E}) > 0$, en adoptant un systeme déterminé de probabilités absolues $Q^{(n)}(\mathcal{E})$. La probabilité à posteriori pour que le point mobile qu'on a observé à l'épreuve *n* dans $\mathcal{E}$ se soit trouvé a l'instant *m* ($m < n$) dans un ensemble J sera donnée par la formule de Bayes

$$\Phi(J, m \mid \mathcal{E}, n) = \frac{\int_J P^{(n-m)}(F, \mathcal{E})\, Q^{(m)}(d\mathcal{A}_F)}{Q^{(n)}(\mathcal{E})}.$$

Si nous savons que le point a été dans $l(\alpha)$ à l'épreuve *n*, nous savons

---

[13]) Nous désignerons cette hypothèse par H pour ne pas avoir à la rappeler.

que, en dehors de cas de probabilité zéro, le point se trouvait à l'epreuve $m < n$ dans $l'(\alpha)$,

$$n - m \equiv l - l' \pmod{d(\alpha)} \tag{1}$$

nous pouvons donc écrire

$$\Phi(J, m \mid \mathcal{E}, n) = \frac{\sum\limits_{\alpha} \sum\limits_{l'(\alpha)=1}^{d(\alpha)} Q^{(m)}(l'(\alpha)) \int_{J l'(\alpha)} P^{(n-m)}[F, \mathcal{E} . l(\alpha)] P_{l'(\alpha)}(d \mathcal{A}_F)}{Q^{(n)}(\mathcal{E})} \tag{2}$$

l et l' étant toujours liés par la formule (1). Si $\mathcal{E}$ n'appartient qu'à un seul sous-ensemble cyclique $l(\alpha)$, ce qui est le cas le plus intéressant, et si $Q^{(n)}(\mathcal{E}) > 0$, alors la probabilité à posteriori se réduit à

$$\frac{\int_{J l'(\alpha)} P^{n-m}(F, \mathcal{E}) P_{l'(\alpha)}(d \mathcal{A}_F)}{P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})}$$

Donc: si $\mathcal{E}$ n'appartient qu'à un seul sous-ensemble cyclique la probabilité à posteriori ne dépend que de n—m *et est indépendante du système particulier de probabilités absolues (pourvu que* $Q^{(n)}(\mathcal{E}) > 0$).

Si nous nous plaçons de nouveau dans l'hypothèse H, alors nous pouvons définir une probabilité inverse pour que le point mobile observé à l'instant n dans un point $H \in l(\alpha)$ s'est trouvé à l'instant $m < n$ dans F, égale à

$$\frac{p^{n-m}(F, H)\, p_{l'(\alpha)}(F)}{p_{l(\alpha)}(H)} = \tau^{n-m}(F, H)$$

les $p_{l(\alpha)}(G)$ ayant des significations évidentes et étant positives pour $G \in l(\alpha)$. Cette formule n'est démontrée que si $Q^{(n)}(l(\alpha)) > 0$, on peut la supposer vraie dans tous les cas.

Cette probabilité inverse sera indépendante de nos connaissances sur le mouvement du point mobile après l'instant n.

Supposons maintenant que $n - m$ augmente indéfiniment, alors de la formule (2) résulte que

$$\Phi(J, m \mid \mathcal{E}, n) \approx \frac{\Sigma\, Q^{(n)}[l(\alpha)]\, P_{l(\alpha)}(\mathcal{E} . l(\alpha))\, P_{l'(\alpha)}[J\, l'(\alpha)]}{Q^{n}(\mathcal{E})}$$

où

$$n - m \equiv l - l' \pmod{d(\alpha)}$$

Φ ($J, m \mid \mathcal{E}, n$) est donc asymptotiquement périodique. Si $\mathcal{E} \subset l\,(\alpha)$, alors la probabilité à posteriori sera équivalente à

$$P_{l'(\alpha)}\,[J\,l'\,(\alpha)]$$

et dans l'hypothèse H, la densité de probabilité inverse $\tau^{(n-m)}(F,H)$, $H \varepsilon\, l\,(\alpha)$ est 0 si $F \bar{\varepsilon}\, l'\,(\alpha)$, $n - m \equiv l - l'$ (mod $d\,(\alpha)$), et tend vers $p_{l'(\alpha)}\,(F)$ si $F \varepsilon\, l'\,(\alpha)$.

§ 11. — Quelques remarques

1. *Les* $P^{(n)}$ $(E, \mathcal{E})$ *peuvent-ils être exactement périodiques?* Si les $P^{(n)}$ $(E, \mathcal{E})$ sont périodiques en n, ils coïncident avec les $P\,r^{(n)}$ $(E, \mathcal{E})$. Il suffit d'ailleurs que $P^{(1)}\,(E, \mathcal{E}) = P\,r^{(1)}\,(E, \mathcal{E})$, pour qu'on ait pour tout n, $P^{(n)}\,(E, \mathcal{E}) = P\,r^{(n)}\,(E, \mathcal{E})$. Interprétons l'équation $P^{(1)}(E,\mathcal{E}) = P\,r^{(1)}(E,\mathcal{E})$. Il en résulte d'abord que le point mobile passe dès la première épreuve avec probabilité 1 dans les ensembles finals: $P^{(1)}\,(E, \Sigma\, G_\alpha) = 1$ quel que soit E. Maintenant soit $E \varepsilon\, i\,(\alpha)$, $\mathcal{E} < \overline{i+1}\,(\alpha)$, (ou $< 1\,(\alpha)$ si $i = d\,(\alpha)$), alors

$$P^{(1)}\,(E, \mathcal{E}) = P_{i+1(\alpha)}\,(\mathcal{E}).$$

Donc à l'intérieur d'un ensemble final la probabilité de passer dans une épreuve dans l'ensemble $\mathcal{E}$ ne dépend (en dehors de l'ensemble $\mathcal{E}$) que du sous-ensemble cyclique, dans lequel le point mobile se trouvait à l'épreuve précédente.

Ces conditions nécessaires sont, comme on voit sans peine, aussi suffisantes.

2. *Sur un procédé permettant de ramener le cas singulier général au cas non-oscillant.* Envisageons l'ensemble W^D de l'espace R_{nD}, D-ième puissance de l'ensemble W du R_n considéré auparavant, D étant le plus petit commun multiple des $d\,(\alpha)$. Un point $\bar{E}$ de W^D sera donné par la connaissance de D points E_i de W. A côté du point mobile (soit P) que nous avons envisagé jusqu'à maintenant, nous allons considérer un point mobile $\bar{P}$ se balladant sur W^D et dont le mouvement sera lié au mouvement de P dans W de la façon suivante. Si le point P a été à la $m\,D + 1$-ième épreuve au point E_1, à la $m\,D + 2$-ième épreuve au point E_2 . . . et à la $D\; m + D$-ième épreuve au point E_D, le point $\bar{P}$ se trouvera à la $m + 1$-ième épreuve au point $E\,(E_1, \ldots, E_D)$. Nous aurons encore une probabilité bien définie $\bar{P}^{(n)}\,(\bar{E}, \bar{\mathcal{E}})$ pour que le point $\bar{P}$ passe en n épreuves du point $\bar{E}\,(E_1, \ldots, E_D)$ de W^D dans l'ensemble $\mathcal{E}$ de W_D, s'exprimant en fonction des $P\,(E, \mathcal{E})$ par

$$\bar{P}^{(n)}\,(\overline{E},\, \overline{\mathcal{E}}) = \int_{\overline{\mathcal{E}}} P^{(1)}\,(F_{D-1}, d\,\mathcal{A}_{F_D})\,P^{(1)}\,(F_{D-2}, d\,\mathcal{A}_{F_{D-1}}) \ldots P^{n\,D}\,(E_D, d\,\mathcal{A}_{F_1})$$

$P^{nD}(E_D, \mathcal{E}) \to Pr^D(E_D, \mathcal{E})$ (exponentiellement). Il suit que $\overline{P}^{(n)}(\overline{E}, \overline{\mathcal{E}}) \to \overline{Pr}(\overline{E}, \overline{\mathcal{E}})$ exponentiellement. Supposons que $E_D \in l(\alpha)$, p. e. $l = d$, soit $D = t\,d$, alors en dehors de cas de probabilité nulle le point P se trouve à la $mD+1$-ième épreuve dans $1(\alpha)$, à la $mD+2$-ième épreuve dans $2(\alpha)$ et à la $mD+D$ épreuve dans $d(\alpha)$. Le point $\overline{P}$ se trouvera donc à la m-ième épreuve quelque soit m dans l'ensemble $[1(\alpha), 2(\alpha), \ldots d(\alpha), \ldots 1(\alpha) \ldots, d(\alpha)]$ et à l'intérieur de cet ensemble $\overline{P}^{(n)}(\overline{E}, \overline{\mathcal{E}}) \to \overline{P}(\overline{\mathcal{E}})$ exponentiellement et uniformément par rapport à $\overline{E}$ et $\overline{\mathcal{E}}$.

§ 12. – Application au cas d'un ensemble de mesure infinie, au cas dénombrable et au cas fini

On peut ramener toujours la cas d'un ensemble W de mesure infinie au cas où W est de mesure finie en modifiant la définition de la mesure de l'espace euclidien de façon à lui attribuer une mesure finie. On pourra p. ex. prendre un point arbitraire 0 comme origine, tracer une suite d'hypersphères $S_1, \ldots, S_n$ de rayons $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ autour de 0 et définir la mesure d'un ensemble $\mathcal{E}$ compris dans la couronne sphérique entre S_{n+1} et S_n comme étant la mesure Lebesguienne ordinaire divisée par $\frac{1}{n!}$. Il est évident que les fonctions mesurables avec l'ancienne mesure restent mesurables. Si après ce changement de mesure les fonctions $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ satisfont aux conditions du § 1 les résultats des § précédents s'appliquent.

Nous allons supposer que $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ soit définie quel que soit E pour tout ensemble $\mathcal{E}$ mes (B), que pour ces $\mathcal{E}$, $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ soit mesurable (B) en E, enfin que la densité $p^{(n)}(E, F)$, derivée par rapport à $\mathcal{E}$ de la fonction d'ensemble $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ existe sauf pour des coiples E, F de mesure (L) nulle et soit mesurable en fonction du couple E, F.

Et qu'on ait *l'hypothése:*

II' *Si mes $W = \infty$, ils existent deux entiers* N *et* m, *deux nombres positifs* η *et* b, *tels que*

$$P^{(N)}(E, \mathcal{E}) < 1 - b \text{ si mes } (\mathcal{E}\, S_m) < \eta$$

Alors tous les résultats établis précédemment s'appliquent aux $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ dans ce cas, seulement les ensembles finals et sous-ensembles cycliques sont maintenant tels que mes $(\mathcal{E}\, S_m) > \eta$.

Supposons maintenant que l'ensemble W est l'espace tout entier qu'il existe une densité de probabilité $p(E, F)$ constante si E se meut dans la couronne sphérique $S_{n+1} - S_n$, et F dans la couronne $S_{h+1} - S_h$.

Alors la probabilite de passer d'un point $E \varepsilon S_i - S_{i-1}$ dans une couronne $S_k - S_{k-1}$ ne dépend que des indices i et k et pourra être écrite p_{ik} $(i = 1, 2 \ldots; k = 1, \ldots)$. Le cas dénombrable est donc un cas particulier du cas continu, ce qui était évident à priori. L'hypothèse II' s'écrira alors:

Ils existent deux entiers m et N *et un nombre b tels que*

$$\sum_{k=1}^{m} P_{ik}^{(N)} > b \text{ quel que soit } i.$$

Donc dans le cas dénombrable sous cette hypothèse s'appliquent tous les résultats énoncés plus haut dans le cas continu. Ce cas a été étudié pour la première fois par M. Fortet. La solution complète du cas dénombrable est dûe à M. Kolmogorof.

Remarquons encore que le cas d'un nombre fini d'états peut de même se traiter comme cas particulier du cas continu sous l'hypothèse I, II.

CHAPITRE 3

LES VARIABLES ALÉATOIRES ATTACHÉES AU POINT MOBILE

§ 1. — Position du problème

Plaçons nous dans les hypothèses du § 1 ou du § 12 du Chapitre 2. Comme dans le cas fini, faisons correspondre un nombre X(F) à chaque point F. Nous supposerons sur cette fonction X(F) qu'elle soit mesurable et bornée. Cette dernière hypothèse a pour but d'éviter des complications qui pourraient s'introduire dans le cas d'une fonction non bornée, car nous ne supposons pas que la probabilité pour que le point mobile se trouve dans un ensemble de mesure nulle à une épreuve donnée est nécessairement nulle. Nous pouvons considérer les variables aléatoires $X_E^{(n)}$ prenant la valeur X (F) lorsque le point mobile parti de E passe à la n-ième épreuve en F, et $S_E^{(n)} = X_E^{(1)} + X_E^{(2)} + \ldots + X_E^{(n)}$ somme des valeurs X (F_i) correspondant aux F_i réalisés successivement dans les *n* épreuves considérées. Il s'agit d'étudier ces variables.

Comme nous avons réservé la lettre $\mathcal{E}$ dans le chapitre précédent pour désigner des ensembles, nous allons dans ce qui suit désigner par

$$\mathcal{M}\,[A]$$

l'espérance mathématique ou valeur moyenne de A.

§ 2. — Le cas régulier

$$\mathcal{M}\,[X_E^{(n)}] = \int_W X\,(F)\,P^{(n)}\,(E, d\,\mathcal{A}_F)$$

$P^{(n)}\,(E, \mathcal{E})$ convergeant vers P $(\mathcal{E})$ il suit que

$$\mathcal{M}\,[X_E^{(n)}] \longrightarrow \int_W X\,(F)\,P\,(d\,\mathcal{A}_F) = M$$

et

$$\mathcal{M}\,[X_E^{(n)} - M]^2 \longrightarrow \int_W X^2\,(F)\,P\,(d\,\mathcal{A}_F) - M^2 = \sigma_1^2.$$

Considérons la différence

$$\mathfrak{M}\left[X_E^{(n)}\right] - M = \int_W X(F)\left[P^{(n)}(E, d\,\mathcal{A}_F) \quad P(d\,\mathcal{A}_F)\right]$$

soit K la borne supérieure de $|X(F)|$, et $\mathcal{E}_n$ l'ensemble pour lequel

$$P^n(E, \mathcal{E}) - P(\mathcal{E})$$

atteint sa borne supérieure.

$$\left|\mathfrak{M}\left[X_E^{(n)}\right] \quad M\right| < K\left\{P^n(E, \mathcal{E}_n) - P(\mathcal{E}_n) + P(W - \mathcal{E}_n) - P^{(n)}(E, W - \mathcal{E}_n)\right\}.$$

De $|P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - P(\mathcal{E})| < 0(e^{-\lambda n})$ quel que soit E et $\mathcal{E}$, suit

$$\mathfrak{M}\left[X_E^{(n)}\right] = M + O(e^{-\lambda n}).$$

Envisageons maintenant les $S_E^{(n)}$. D'abord

$$\mathfrak{M}\left[S_E^{(n)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \int_W X(F)\,P^{(i)}(E, d\,\mathcal{A}_F) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}\left[X_E^{(i)}\right].$$

De $\quad \mathfrak{M}\left[X_E^{(i)}\right] \to M$ et $\mathfrak{M}\left[X_E^{(i)} - M\right] = O\left[e^{-\lambda n}\right]$ suit

$$\frac{\mathfrak{M}\left[S_E^{(n)}\right]}{n} \to M$$

et $\mathfrak{M}\left[S_E^{(n)}\right] - nM$ est borné. De plus soit $\mathcal{E}_{l,m}$ l'ensemble des points de W où $\frac{kl}{m} \leq X(F) < k\,\frac{l+1}{m}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \int X(F)\,P^i(E, d\,\mathcal{A}_F) = \sum_{i=1}^{n} \int_W X(F)\,P(d\,\mathcal{A}_F) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=-m}^{m} \frac{kl}{m} P^i(E, \mathcal{E}_{l,m}) - P(\mathcal{E}_{l,m})\right]$$

$$+ \theta k \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=-m}^{m} \frac{1}{m} \left| P^{(i)}(E, \mathcal{A}^i_{l,m}) - P(\mathcal{A}^i_{l,m}) \right|$$

$\mathcal{A}^i_{l,m}$ étant un sousensemble de $\mathcal{E}_{l,m}$ et $-1 \leq \theta \leq 1$.

$\mathcal{E}_n$ étant toujours l'ensemble où $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - P(\mathcal{E})$ atteint sa borne supérieure,

$$\sum_{l=-e}^{m} \left| P^{(i)}(E, \mathcal{A}^i_{l,m}) - P(\mathcal{A}^i_{l,m}) \right| < 2\left(P^{(i)}(\mathcal{E}_i) - P(\mathcal{E}_i)\right)$$

or $P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i) - P(\mathcal{E}_i) = 0(e^{-\lambda n})$, le terme restant est donc quel que soit n inférieur en module à C $\frac{1}{m}$, C étant une constante.

D'autre part

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathrm{P}^{(i)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}_{l,m}) - \mathrm{P}(\mathcal{E}_{l,m})] = \mathrm{R}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}_{l,m}) \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{E}, \mathcal{E}_{l,m})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{l=-m}^{m} \frac{k\,l}{m} [\mathrm{P}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}_{l,m}) - \mathrm{P}(\mathcal{E}_{l,m})] = \sum_{l=-m}^{m} \frac{k\,l}{m} \mathrm{R}^{(n)}(\mathrm{E}, \mathcal{E}_{l,m}).$$

En faisant tendre n et m vers l'infini, nous voyons que

$$\mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)} - n\,\mathrm{M}] \longrightarrow \int_{\mathrm{W}} \mathrm{X}(\mathrm{F})\,\mathrm{S}(\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}})$$

et

$$\mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)} - n\,\mathrm{M}] = \int_{\mathrm{W}} \mathrm{X}(\mathrm{F})\,\mathrm{R}^{(n)}(\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}}).$$

Passons à $\mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)} - n\,\mathrm{M}]^2$. On a

$$\mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)} - n\mathrm{M}]^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}[\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)} - \mathrm{M}]^2 + 2\sum_{i=1}^{n=1} \mathfrak{M}[(\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)} - \mathrm{M}) \sum_{t=i+1}^{n} (\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(t)} - \mathrm{M})]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}[\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)} - \mathrm{M}]^2 \approx n\,\sigma_1^2 \text{ et } \mathfrak{M}[(\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)} - \mathrm{M}) \sum_{t=i+1}^{n} (\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(t)} - \mathrm{M})]$$

peut s'écrire

$$\mathfrak{M}\left[(\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)} - \mathrm{M})\,\mathfrak{M}_{\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)}}[\mathrm{S}^{(n-t)} - (n-t)\,\mathrm{M}]\right].$$

Si à la i-ième épreuve le point mobile a été en F, alors

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{X}_{\mathrm{E}}^{(i)}} = \mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{F}}^{(n-t)} - \mathrm{M}(n-t)]$$

ce qui tend vers

$$\int_{\mathrm{W}} \mathrm{X}(\mathrm{G})\,\mathrm{S}(\mathrm{F}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{G}}).$$

On conclut comme au premier chapitre que

$$\mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)} - n\,\mathrm{M}]^2 = \sigma^2 n + \varphi^{(n)}(\mathrm{E})$$

$$\sigma^2 = \int_{\mathrm{W}} \left[\mathrm{X}(\mathrm{F}) + 2\int_{\mathrm{W}} \mathrm{X}(\mathrm{G})\,\mathrm{S}(\mathrm{F}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{G}})\right] (\mathrm{X}(\mathrm{F}) - \mathrm{M})\,\mathrm{P}(d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}}).$$

$\varphi^{(n)}(\mathrm{E})$ tendant vers une limite ayant une forme analogue à celle du cas fini. Considérons maintenant

$$\mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)} - \mathfrak{M}[\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{(n)}]]^2 = n\,\sigma^2 + \varphi^{(n)}(\mathrm{E}) + [\mathrm{M}(\mathrm{S}_{\mathrm{E}}^{n}) - \mathrm{M}\,n]^2$$

$$= n\,\sigma^2 + \varphi^{(n)}(\mathrm{E}) + \left\{\int_{\mathrm{W}} \mathrm{X}(\mathrm{F})\,\mathrm{R}^{(n)}(\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}})\right\}^2.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{M}\left\{S_E^{(n)} - \mathfrak{M}\,[S_E^{(n)}]\right\}^2 / n \to \sigma^2 .$$

Nous avons donc obtenu les deux résultats. L'espérance mathématique et le carré de l'écart type de $S_i^{(n)}$ tendent divisées par n vers des limites indépendantes de la position initiale du point mobile. De plus les différences entre ces grandeurs et leurs parties asymptotiques tendent vers des limites.

Si l'existence de la limite de $\mathfrak{M}\,[S_E^{(n)}]\,/\,n$ et de $\mathfrak{M}\,[S_E^{(n)} - n\,M]^2\,/\,n$ est due à l'homogénité du mouvement et au fait que, grâce a la tendance rapide de $P^{(n)}\,(E, \mathcal{E})$ vers une limite indépendante de la position initiale, $\mathfrak{M}\,|X_E^{(i)} \,.\, X_E^{(i+t)}\,M|$ tend rapidement vers zéro si t augmente indéfiniment, l'indépendance de cette limite de la position initiale est dûe principalement à la stabilité à la Poisson telle que nous l'avons démontrée dans le théorème II. En effet supposons qu'une de ces limites-là (celle de $\mathfrak{M}\,[S_E^{(n)}]\,/\,n$ ou celle de $\mathfrak{M}\,|S_E^{(n)} - n\,M|^2\,/\,n$) soit comprise entre a et $a + \varepsilon$ dans un ensemble de mesure positive. Alors elle sera partout comprise entre a et $a + \varepsilon$, comme on montre sans peine par une décomposition de l'espérance mathématique. On en déduit immédiatement l'indépendance de la limite envisagée de la position initiale.

Supposons maintenant que $\sigma \neq 0$. Alors les mêmes raisonnements que ceux que nous avons faits dans les § 3, 4, 5 du Chapitre 1 nous montrent qu'on a le théorème

Théorème. *Dans le cas régulier, si $\sigma \neq 0$, la loi de probabilité de $[S_E^{(n)} - n\,M]\,/\,\sigma\sqrt{n}$ tend vers la loi réduite de* Gauss *(uniformément par rapport à* E*). Tous les moments de $[S_E^{(n)} - n\,M]\,|\,\sigma\sqrt{n}$ tendent vers les moments de la loi de* Gauss.

Il n'y a rien d'important à changer dans la démonstration du théorème du logarithme itéré et nous pouvons énoncer ($\sigma \neq 0$).

Théorème du logarithme itéré : La probabilité pour que l'on ait pour au moins un n > N *l'inégalité*

$$|\,S_E^n - n\,M\,| > \sqrt{2\,\sigma^2\,n\,(lg_2\,n + c\;lg_3\,n)}$$

tend vers zéro avec N^{-1}, *si* $c > \frac{3}{2}$, *est égale à 1 si* $c \leq \frac{1}{2}$.

A l'encontre des démonstrations des théorèmes ci-dessus, il y a un peu de différence pour le cas $\sigma = 0$ entre le cas fini et le cas qui nous intéresse. Comme nous nous servirons des probabilités à postériori, nous allons adopter l'hypothese H (voir § 10, Chapitre 2).

Nous allons de plus supposer qui on se trouve dans le cas positivement régulier. Alors on démontre par des raisonnements semblables mais légèrement plus compliqués que ceux du § 5, Chapitre 1 que dans l'hypothèse H, si $\sigma = 0$, après soustraction d'une constante M de chaque X (F), soit X (F) est presque partout nul, soit en dehors d'un ensemble de mesure nulle X (F) ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs et $X^{(1)} + \ldots X^{(\rho)}$ est bien déterminé par la connaissance de la position initiale E et de la position F à la $(\rho+1)^{\text{ième}}$ épreuve (pourvu que $p^{(\rho+1)}(E, F) > 0$) et ne dépend pas de ρ. On aura pour tout chemin fermé, c'est à dire pour toute suite d'états $E_0, E_1, E_2 \ldots E_{n-1}$ avec $p(E_0, E_1)\, p(E_1, E_2) \ldots p(E_{n-1}, E_0) > 0$ (sauf si E_0 appartient à un certain ensemble de mesure nulle)

$$\sum_{i=0}^{n-1} X(E_i) = 0$$

en dehors peut-être de chemins de E_0 en E_0 de probabilité totale nulle.

§ 3. — Cas singulier à l'intérieur d'un ensemble final

Supposons maintenant que nous avons $d > 1$ sous-ensembles cycliques 1,... d. Le point mobile aura le mouvement circulaire bien connu. Il suit des propriétés de ce mouvement comme dans le cas fini, que la loi de probabilité de $X_E^{(n)}$ est asymptotiquement périodique avec période d, la partie principale étant la loi de probabilité qui résulte de la distribution $P_{l'_n}(\mathcal{E})$, l'_n désignant le sous-ensemble cyclique dans lequel se trouve le point mobile parti de E à l'instant n. (Si $E \varepsilon l$, alors $n \equiv l'_n - l$ (modd)). Il suit que

$$\mathfrak{M}\,[X_E^{(n)}] \backsim \int_{l'_n} X(F)\, P_{l'_n}(d\mathcal{A}_F) = \overline{M}_{l'_n}$$

$$\mathfrak{M}\,[X_E^{(n)} - \overline{M}_{l'_n}]^2 \backsim \overline{\sigma}^2_{l'_n}$$

et $\mathfrak{M}\,[X_E^{(n)}] - \overline{M}_{l'_n}$ sera majoré par le terme général d'une progression géométrique à raison inférieure à 1.

Envisageons maintenant les $S_E^{(n)} = \Sigma X_E^{(n)}$. Si nous posons $X'(F) = X(F) - \overline{M}_i$ si $F \varepsilon i$, alors

$$S'^n_E = \Sigma X'^{(n)}_E$$

se distinguera de $S_E^{(n)}$ de la quantité non-aléatoire $\sum_{t=1}^{n} M_{l'_t}$.

$$\mathfrak{M}\,[S'^{(n)}_E] = \sum_{t=1}^{n} \int_{l'_t} X'(F)\, P^{(t)}(E, d\mathcal{A}_F)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \int_{l'_t} X(F)\,[P^{(t)}(E, d\mathcal{A}_F) - P_{l'_t}(d\mathcal{A}_F)].$$

Donc si $n \to \infty$

$$\mathcal{M}\,[S_E^{\prime(n)}] \to \int_W X(F)\,S(E, d\mathcal{A}_F) = \int_W X'(F)\,S(E, d\mathcal{A}_F).$$

Evaluons

$$\mathcal{M}\,[S_E^{\prime(n)}]^2 = \sum_{t=1}^{n} \mathcal{M}\,[X_E^{\prime(t)}]^2 + 2\sum_{t=1}^{n-1} \mathcal{M}\,[X_E^{\prime(t)} \sum_{j=t+1}^{n} X_E^{\prime(j)}].$$

Le premier terme s'écrit à une quantité bornée près

$$\frac{n}{d}\sum_{l=1}^{d} \bar{\sigma}_l^2$$

Le second s'écrit

$$2\sum_{t=1}^{n-1} \int_W X'(F)\,\mathcal{M}\,[S_F^{\prime(n-t)}]\,P^{(t)}(E, d\mathcal{A}_F),$$

et comme

$$\mathcal{M}\,[S_F^{\prime(n-t)}] \to \int_W X(G)\,S(F, d\mathcal{A}_G) = \int_W X'(G)\,S(F, d\mathcal{A}_G),$$

il sera égal à un terme borné près à

$$\frac{2n}{d}\sum_{i=1}^{d} \int_W X'(F)\left[\int_W X'(G)\,S(F, d\mathcal{A}_G)\right] P_i(d\mathcal{A}_F).$$

Par conséquent

$$\mathcal{M}\,[S'^{(n)}]^2 \mid n \to \int_W X'(F)\,[X'(F) + \int_W X'(G)\,S(F, d\mathcal{A}_G)]\,\Pi(d\mathcal{A}_F) = \sigma^2.$$

En revenant aux X (F)

$$\sigma^2 = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \int_i (X(F) - \bar{M}_i)\,[X(F) + 2\int_W X(G)\,S(F, d\mathcal{A}_G)]\,P_i(d\mathcal{A}_F)$$

Nous avons

$$\mathcal{M}\,[S_E^{(n)}] = \Sigma\,\mathcal{M}\,[X_E^{(n)}] = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{l'_i} + \mathcal{M}\,[S_E^{\prime(n)}].$$

Or $\mathfrak{M}\,[S_{E}^{\prime(n)}]$ tend vers une limite finie si $n \longrightarrow \infty$, et

$$\sum_{i=1}^{d} \overline{M}_i = d \int_{W} X(F)\,\Pi\,(d\,\mathcal{A}_{F}) = d\,M$$

d'où

$$\mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}] \mid n \rightarrow \int_{W} X(F)\,\Pi\,(d\,\mathcal{A}_{F})$$

et

$$\mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}] - n \int_{W} X(F)\,\Pi\,(d\,\mathcal{A}_{F})$$

est bornée et asymptotiquement périodique. Maintenant

$$\mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)} - \mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}\,]]^2 = \mathfrak{M}\,[S_{E}^{\prime(n)}]^2 - \{\,\mathfrak{M}\,[S_{E}^{\prime(n)}]\,\}^2.$$

Donc

$$\mathfrak{M}\,[S_{E}^{\prime n)} - \mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}]]^2 \,/\, n \rightarrow \sigma^2$$

et cette limite est aussi la limite de

$$\mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)} - n\,M]^2 \,/\, n.$$

On voit sans peine que la différence entre $\mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)} - \mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}]]^2$ et $n\,\sigma^2$ est bornée et asymptotiquement périodique.

Les raisonnements du § 7, Chapitre 1, qui s'appliquent sans changement montrent que *les théorèmes démontrés sur les* $S_{E}^{(n)}$ *dans le cas régulier s'étendent au cas actuel.*

Remarquons que si $\sigma = 0$, même si l'on n'a pas l'hypothèse H, $S_{E}^{(n)} - n\,M$ restera borné en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite dans le sens de la loi forte des grands nombres.

§ 4. — Le cas singulier général

Supposons maintenant que nous ayons plusieurs ensembles finals $G_{\alpha_1} \ldots G_{\alpha_l}$ avec les probabilités $Pr\,[E, G_{\alpha}]$ de passer dans l'ensemble final G_{α}.

Soient M_{α} et σ_{α}^2 les limites de $\mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}] \,/\, n$ et $\mathfrak{M}\,\{S_{E}^{(n)} - \mathfrak{M}\,[S_{E}^{(n)}]\}^2 / n$ calculées sous l'hypothèse que $E \in G_{\alpha}$. On voit sans difficulté, exactement comme dans le cas fini, que la loi de probabilité de $S_{E}^{(n)} \,/\, n$ tend vers la loi discontinue prenant avec probabilité $Pr\,[E, G_{\alpha}]$ les valeurs M_{α}.

Les moments de $S_E^{(n)} / n$ tendront vers les moments de la loi limite. En particulier M (E), limite de $\mathfrak{M}\, [S_E^{(n)}] / n$ sera égale à

$$M(E) = \sum_{\alpha} Pr\,[E, G_{\alpha}]\, M_{\alpha}$$

ce qui pourra encore s'écrire, vu la valeur de $\Pi\,(E, \mathcal{E})$

$$M(E) = \int_{W} X(F)\, \Pi\,(E, d\,\mathcal{A}_F)$$

mais cette dernière formule n'est pas très instructive. De même

$$\mathfrak{M}\, [S_E^{(n)} / n - M(E)]^2 \rightarrow \sum_{\alpha} Pr\,[E, G_{\alpha}]\, [M_{\alpha} - M(E)]^2 = W^2(E)$$

Nous avons des expressions analogues pour les autres moments. Supposons maintenant que les M_{α} (au moins les M_{α} avec $Pr\,[E, G_{\alpha}] > 0$) soient toutes égales à M. Alors la loi de probabilité totales de

$[S_E^{(n)} - nM] / \sqrt{n}$ tendra vers

$$\sum_{\alpha}^{(1)} Pr\,[E, G_{\alpha}]\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\alpha}} \int_{-\infty}^{X} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{\alpha}^2}}\, dx + \sum_{\alpha}^{(1)} Pr\,[E. G_{\alpha}]\, \frac{|X| + X}{2X}$$

la première somme étant étendue à ceux des ensemble finals avec $\sigma_{\alpha} > 0$, la seconde aux autres.

Les moments de $[S_E^{(n)} - nM] / \sqrt{n}$ tendront vers les moments de la loi ci-dessus.

Dans le premier cas (loi discontinue avec plusieurs valeurs possibles) ni la loi des grands nombres, ni à fortiori la loi forte des grands nombres ne sera applicable. Dans le second cas par contre, en dehors de la loi des grands nombres dans le sens Bernouillien, la loi forte sera applicable sous la forme suivante: si $\bar{\sigma}$ est le plus grand des σ_{α} avec $Pr\,[E, G_{\alpha}] > 0$, et $\bar{\sigma} \neq 0$, alors la probabilité pour qu'on ait pour au moins un $n > N$

$$|\, S_E^{(n)} - nM \,| > \sqrt{2\bar{\sigma}^2 n (lg_2\, n + c\, lg_3\, n)}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{N}$ si $c > \frac{3}{2}$. Si $\bar{\sigma}$ est nul, alors les $S_E^{(n)} - nM$ resteront bornées en dehors de cas de probabilité nulle, la loi forte des grands nombres sera donc encore applicable.

S'il n'y a qu'un seul ensemble final, $\{S_E^{(n)} - nM\} / \sigma \sqrt{n}$, $\sigma \neq 0$ tendra vers la loi de Gauss réduite et en dehors de cas banaux (plusieurs ensembles finals avec le même M_{α} et σ_{α}) ce sera le seul cas où la loi de Gauss a lieu.

Dans le cas général on montre sans peine que

$$\mathfrak{M}\,[S_E^{(n)}] = n \sum_a P r[E, G_\alpha] M_\alpha + \int_W X(F)\, S(E, d\mathcal{A}_F) +$$

$$\int_W X(F)\,\psi^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F) + 0$$

et que le carré de l'écart-type peut s'ecrire sous la forme

$$\mathfrak{M}\,[S_E^{(n)} - n\, M(E)]^2 = n^2\, W^2(E) + n \sum_a P r[E, G_\alpha]\, \sigma_\alpha^2$$

$$- 2n \int_W W^2(F)\, S(E, d\mathcal{A}_F)$$

$$+ 2n \int_W [X(F) - M(F)][M(F) - M(E)[S(E, d\mathcal{A}_F) + \psi^{(n)}(E, d\mathcal{A}_F)] + R'(n)$$

$R'(n)$ étant borné.

§ 5. — Application au mouvement: fréquences

Nous allons étudier ici les sommes $S_E^{(n)}$ lorsque les $X(F)$ sont $= 1$ si $F \in \mathcal{E}$, $= 0$ si $F \bar{\in} \mathcal{E}$. Ces variables aléatoires ne sont rien autre que le nombre de fois que le point mobile passe dans n épreuves à partir de E dans $\mathcal{E}$. Nous les désignons par $m^{(n)}(E, \mathcal{E})$.

Supposons d'abord que $E \in G_\alpha$. Alors si $\mathcal{E}\, G_\alpha = 0$, le point mobile ne passera qu'avec probabilité nulle dans $\mathcal{E}$: $m^{(n)}(E, \mathcal{E}) = 0$ avec probabilité 1.

Si $\mathcal{E} < G_\alpha$, nous pouvons supposer que $\mathcal{E}$ appartient à un $l(\alpha)$ déterminé, et soit de mesure positive. Alors

$$\mathfrak{M}\,[m^n(E, \mathcal{E})] \,/\, n \to \Pi(\mathcal{E}) = \frac{P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})}{d} > 0.$$

Calculons maintenant

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}\,[m^{(n)}(E, \mathcal{E}) - n\, \Pi(\mathcal{E})]^2 / n = \sigma^2.$$

Les $\bar{M}_{i(\alpha)}$ de la formule du § 3 sont toutes nulles en dehors de $\bar{M}_{l(\alpha)}$, et en tenant compte des valeurs de X (F), on trouve en vertu d'une relation signalée au § 7, Chapitre 2:

$$\sigma^2 = \frac{P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})\,[1 - P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})] + 2\int_{\mathcal{E}} S(F, \mathcal{E})\, P_{l(\alpha)}(d\,\mathcal{A}_F)}{d(\alpha)}.$$

Si $\sigma \neq 0$, $\frac{m^{(n)}(E, \mathcal{E}) - n\,\Pi(\mathcal{E})}{\sigma\sqrt{n}}$ suivra à la limite une loi de GAUSS réduite.

Si $\sigma = 0$, $m^{(n)}\,E, \mathcal{E}) - n\,\Pi(\mathcal{E})$ restera borné. Dans tous les deux cas le nombre de réalisations suivra la loi uniforme des grands nombres, dans le premier le théorème du logarithme itéré.

Si $E \in W - \Sigma G_\alpha$ et $\mathcal{E} < W - \Sigma G_\alpha$, l'ensemble $\mathcal{E}$ ne sera touché par le point mobile qu'un nombre fini de fois, dont l'espérance mathématique est $S(E, \mathcal{E})$. Si $E \in W - \Sigma G_\alpha$ et $\mathcal{E} < G_\alpha$, alors

$$\mathfrak{M}\,[m^{(n)}(E, \mathcal{E})]\,/\,n \to Pr\,[E, G_\alpha]\,\Pi(\mathcal{E}).$$

La loi de probabilité de $m^{(n)}(E, \mathcal{E})/n$ tendra vers la loi discontinue prenant avec probabilité $Pr\,[E, G_\alpha]$ la valeur $\Pi_\alpha(\mathcal{E})$ et avec probabilité $1 - Pr\,[E, G_\alpha]$ la valeur zéro.

CHAPITRE 4

LES MOUVEMENTS SUIVANT L'ÉQUATION DE SMOLUCHOVSKI

§ 1. — Les probabilités

Position du problème. Nous avons envisagé jusqu à maintenant seulement des cas où l'on n'avait qu'une suite discrète d'épreuves. On répérait la position du système ou du point mobile périodiquement après des intervalles de temps constants. Nous allons maintenant supposer qu'on contrôle constamment le mouvement du point mobile et qu'il existe une probabilité bien déterminée pour que le point mobile parti de E se trouve après un intervalle de temps t dans un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de W, cette probabilité P (E, $\mathcal{E}$, t) sera toujours supposée indépendante de l'instant de temps initial et de tout ce que nous savons ou ne savons pas du mouvement du point mobile antérieur à cet instant initial. Nous ferons la même hypothèse de mesurabilité et nos hypothèses sur W ne se distinguerons pas de nos hypothèses dans le § 1 Chapitre 2. En outre nous ferons sur les P (E, $\mathcal{E}$, t) les deux hypothèses.

I. Ils existent trois nombres positifs T_1, a, α tels qu'on ait quel que soit E

$$P\,(E, \mathcal{E}, T_1) < 1 - a \qquad \text{si mes } (\mathcal{E}) < \alpha$$

II. P (E, $\mathcal{E}$, t) est continue si $t > T_1$ par rapport à t.

Cette fonction P (E, $\mathcal{E}$, t) satisfera aux équations

$$1 \geqq P\,(E, \mathcal{E}, t) \geqq 0$$

$$P\,(E, W, t) = 1$$

$$(1) \qquad P\,(E, \mathcal{E}, t + \tau) = \int_W P\,(F, \mathcal{E}, t)\, P\,(E, d\,\mathcal{A}_F, \tau)$$

Elle sera en outre complètement additive par rapport à $\mathcal{E}$. De l'hypothése I et de (1) résulte que

$$P\,(E, \mathcal{E}, t) < 1 - a \qquad \text{si mes } (\mathcal{E}) < \alpha \text{ et } t > T_1.$$

Nous allons étudier le mouvement sous les hypothèses ci-dessus.

Remarques historiques. L'équation (1) s'appelle équation de Smoluchovsky. Elle a été considérée pour la première fois par ce physicien dans la théorie de la diffusion. Dans l'hypothèse d'une densité de probabilité p (E, F, t), elle s'écrit comme suit

$$(1') \qquad p\,(E, F, t+\tau) = \int_W p\,(E, G, t)\, p\,(G, F, \tau)\, dG$$

$$1 = \int_W p(E, G, t)\, dG.$$

M. B. Hostinsky a démontré que si p (E, G, t) est continue, bornée et positive alors $\lim\limits_{t \to \infty} p\,(E, G, t)$ existe et est indépendante de E. MM. Kryloff et Bogoliouboff ont étudié aussi l'équation (1′) sous l'hypothèse que p (E, G, t), soit continue par rapport aux trois variables et bornée pour $t > 0$. En se fondant sur des théorèmes de M. Fréchet ils ont obtenu des résultats qui en tenant compte de nos résultats et de nos notations peuvent être résumés en disant qu'à l'intérieur des ensembles finals on est pour les p (E, G, t) dans le cas régulier. (Au lieu d'ensembles finals MM. Kryloff et Bogoliouboff parlent d'ensembles ergodiques). Ce résultat sera étendu dans ce § dans nos hypothèses.

Etude des propriétés asymptotiques des P (E, $\mathcal{E}$, t).

Envisageons les P (E, $\mathcal{E}$, $n\,s$) en fonction de $n\,s$. P (E, $\mathcal{E}$, $n\,s$) satisfait aux conditions du § 1 du Chapitre II et est par conséquent asymptotiquement périodique avec une période D_s qui d'après les résultats du Chapitre II est bornée quel que soit s. De l'équation (1) résulte alors en prenant $\tau = n\,s$, s fixe, que P (E, $\mathcal{E}$, t) est asymptotiquement périodique avec la période $s\,D_s$.

$$(2) \qquad P\,(E, \mathcal{E}, t + s\,D_s\,n) - P\,(E, \mathcal{E}, t) \to 0 \quad \text{si } t \to \infty$$

uniformément par rapport à E, $\mathcal{E}$, t et n. Or nous pouvons prendre s arbitrairement petit, P (E, $\mathcal{E}$, t) admet donc des périodes asymptotiques arbitrairement petites. Si nous prenons $s = \frac{1}{2^m}$ ($m = 1, 2, \ldots$), on vérifie sans peine que (2) a lieu aussi uniformément par rapport à m. Il s'en suit que-quelque petit que soit le nombre $\tau > 0$ — on a 2 nombres τ', τ'' ($0 < \tau' < \tau'' < \tau$) tels que

$$P\,(E, \mathcal{E}, t + \tau') > \lim_{t \to \infty} \sup P\,(E, \mathcal{E}, t) - \varepsilon$$

$$P\,(E, \mathcal{E}, t + \tau'') < \lim_{t \to \infty} \inf P\,(E, \mathcal{E}, t) + \varepsilon$$

où $0 < \varepsilon < K e^{-\lambda t}$ (K et $\lambda > 0$ indépendants de τ). En vertu de la continuité pour $t > T_1$, il en résulte que $P(E, \mathcal{E}, t)$ tend vers une limite.

$$P(E, \mathcal{E}, t) \to Pr[E, \mathcal{E}].$$

Il n'existe pas de sous-ensembles cycliques.

Soient $G'_1 \ldots G'_\alpha \ldots G'_i$ les ensembles finals pour $P(E, \mathcal{E}, n)$, $Pr[E, G'_\alpha]$ la limite de $P(E, G'_\alpha\ n)$. $Pr[E, \mathcal{E}]$ étant la limite de $P(E, \mathcal{E}, n)$ pour $n \to \infty$ est de la forme

$$Pr[E, \mathcal{E}] = \sum_\alpha Pr[E, G'_\alpha]\, P_\alpha(\mathcal{E}).$$

Désignons par G_α l'ensemble des points E où $Pr[E, G'_\alpha] = 1$. G_α qui comprend G'_α constitue une sorte de fermeture (non topologique) de G'_α, nous l'appellerons ensemble final pour $P(E, \mathcal{E}, t)$. A l'intérieur de G_α, $P(E, \mathcal{E}, t)$ tend vers une limite $P_\alpha(\mathcal{E})$ indépendante de E ($\varepsilon\, G_\alpha$). Mais cette limite est nulle si $\mathcal{E} < G_\alpha \quad G'_\alpha$ qui peut être de mesure non nulle.

$Pr[E, G'_\alpha]$ étant la limite de $P(E, G'_\alpha, t)$ satisfait à l'équation

$$Pr[E, G'_\alpha] = \int_W Pr[F, G'_\alpha]\, P(E, d\mathcal{A}_F, t).$$

Comme $Pr[F, G'_\alpha] < 1$ si $F \mathrel{\overline{\varepsilon}} G_\alpha$, il résulte qu'on a

$$P(E, W - G_\alpha, t) = 0 \qquad \text{si } E\ \varepsilon\ G_\alpha.$$

On a visiblement $Pr[E, G_\alpha] = Pr[E, G'_\alpha]$. on peut donc aussi écrire

$$Pr[E, \mathcal{E}] = \Sigma\, Pr[E, G_\alpha]\, P_\alpha(\mathcal{E})$$

où $P_\alpha(\mathcal{E})$ est complètement additive, $\geqq 0$, mais n'est plus nécessairement > 0 pour tout ensemble $< G_\alpha$ de mesure positive. [Si $P(E, \mathcal{E}, t)$ est continue pour $t > 0$, ou peut définir les ensembles finals G''_α d'une façon identique au Chapitre II et dans ce cas on a $P_\alpha(\mathcal{E}) > 0$ pour tout ensemble $< G''_\alpha$ de mesure positive].

La fonction d'emsemble $P_\alpha(\mathcal{E})$ limite de $P(E, \mathcal{E}, t)$ si $E\ \varepsilon\ G_\alpha$ sera donnée comme on voit sans dificulté par le système

$$\left|\begin{array}{l} P_\alpha(\mathcal{E}) = \displaystyle\int_{G_\alpha} P(F, \mathcal{E}, t)\, P_\alpha(d\mathcal{A}_F) \\ P_\alpha(G_\alpha) = 1 \end{array}\right.$$

où t est quelconque. La solution $P_\alpha(\mathcal{E})$ de ce système est unique, comme on voit par la démonstration que nous avons employée dans le cas d'une suite discrète d'épreuves.

Les $Pr\,[E, G_\alpha]$ satisferont comme nous savons à

$$Pr\,[E, G_\alpha] = \int_W Pr\,[F, G_\alpha]\, P\,(E, d\mathcal{A}_F, t)$$

et seront déterminées par les conditions évidentes

$$Pr\,[E, G_\alpha] = 1 \qquad \text{si } E \in G_\alpha$$
$$Pr\,[E, G_\alpha] = 0 \qquad \text{si } E \in G_\beta \quad (\beta \neq \alpha).$$

L'unicité se démontre comme dans le cas fini.

Nous voyons que le mouvement régi par l'équation de Smoluchowski sous nos hypothèses se distingue du mouvement dans le cas d'une suite discrète d'épreuves avec les hypothèses du § 1 Chapitre 2 par la non-existence de sous-ensembles cycliques et du mouvement circulaire entre ces sous-ensembles. Ceci est évidemment dû à l'hypothèse de continuité des probabilités par rapport au temps. Il résulte que si nous considérons une distribution $P^{(1)}\,(E, \mathcal{E})$ quelconque, elle ne pourra en général être interprétée comme obtenue comme section d'une solution $P\,(E, \mathcal{E}, t)$ continue de l'équation de Smoluchowski pour t constant. Il faudra pour cela plusieurs conditions dont nous venons de trouver une assez importante mais non suffisante. Nous nous proposons de revenir plus tard sur cette question.

De l'équation (1) et de $P\,(E, \mathcal{E}, t) \to Pr\,[E, \mathcal{E}]$ exponentiellement par rapport à t, normalement par rapport à E et $\mathcal{E}$, résulte que

$$|\, P\,(E, \mathcal{E}, t) - Pr\,[E, \mathcal{E}]\,| < K e^{-\lambda t}$$

avec $\lambda > 0$.

Nous avons suppose jusqu'ici que $P\,(E, \mathcal{E}, t)$ soit continue en t pour $t > T$, supposons maintenant que $P\,(E, \mathcal{E}, t)$ soit aussi intégrable en t pour $t > 0$[14]. Alors l'intégrale suivante existe

$$S\,(E, \mathcal{E}) = \int_0^\infty \left\{ P\,(E, \mathcal{E}, t) - Pr\,[E, \mathcal{E}] \right\} dt$$

et sera bornée quel que soient E et $\mathcal{E}$. On aura

$$S\,(E, W) = 0.$$

Si nous posons

$$\Pi\,(E, \mathcal{E}, t) = \frac{1}{t} \int_0^t P\,(E, \mathcal{E}, t)\, dt$$

$$\Pi\,(E, \mathcal{E}, t) \to \Pi\,(E, \mathcal{E}) = Pr\,[E, \mathcal{E}] \qquad \text{si } t \to \infty$$

et

$$\lim_{t \to \infty} t\,[\,\Pi\,(E, \mathcal{E}, t) - \Pi\,(E, \mathcal{E})\,] = S\,(E, \mathcal{E}).$$

---

[14] Cette hypothèse sera conservée dans ce qui suit.

Dans le „cas du battage des cartes généralisé“ c'est à dire si l'on a pour au moins un et alors pour tout t

$$\int_W P(E, \mathcal{E}, t)\, d E = \text{mes}\,(\mathcal{E})$$

$$\text{alors mes}\,(W - \Sigma\, G_\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P_\alpha(\mathcal{E}) = \frac{\text{mes}\,(\mathcal{E}\ \ G_\alpha)}{\text{mes}\,(G_\alpha)}\,.$$

§ 2. — Les variables aléatoires attachées au mouvement. Introduction

Supposons qu'on se donne de nouveau une fonction de points $x(E)$ bornée et mesurable sur W. Alors considérons une variable aléatoire égale à $x(E)$ si à l'instant t le point mobile parti de F se trouve en E. Désignons par $T_F(t)$ la position aléatoire du point mobile parti de F (à l'instant 0) à l'instant t. Nous avons donc à étudier d'abord les fonctionnelles $x[T_F(t)]$ et après les fonctionnelles

$$\int_0^t x[T_F(t)]\, dt$$

qui généralisent ici les $S_E^{(n)}$. Les auteurs qui s'occupaient jusqu'à maintenant de telles intégrales n'avaient en général pas pensé nécessaire de démontrer l'existence de ces intégrales sous leurs hypothèses.

Nous croyons pour notre part indispensable de montrer cette existence, avant de faire d'autres énoncés sur les propriétés asymptotiques de cette expression. Nous serons obligés pour montrer que $x[T_F(t)]$ est Riemann-intégrable de faire des hypothèses assez restrictives sur $x(E)$ et d'ajouter encore une hypothèse supplémentaire pour les $P(E, \mathcal{E}, t)$.

Nous supposerons donc :

1. *Que* $x(E)$ *soit uniformément continu dans le domaine* W.
2. *Si* $S_E(\rho)$ *désigne une hypersphère de rayon* ρ *autour de* E, *alors quel que soit* ρ, *uniformément par rapport à* E

$$P(E, S_E(\rho), t) \to 1 \qquad \text{si} \qquad t \to 0.$$

Nous allons commencer par démontrer que $x[T_F(t)]$ vérifie pour chaque t une même condition locale de Hölder généralisée (en dehors de cas de probabilté nulle). En termes précis:

Lemme. Pour chaque t *déterminé et quel que soit* F, *il y a un* δ *tel que pour tout* τ $(0 < \tau < \delta)$ *on ait*

$$| x[T_F(t+\tau)] \quad x(T_F(t)] | < \varphi(\tau)$$

$\varphi(\tau)$ *étant une fonction positive, décroissante si* $\tau \to 0$, *avec* $\varphi(\tau) \to 0$, *en dehors de cas de probabilité* $< \varepsilon(\delta) \to 0$, si $\delta \to 0$.

Nous utilisons dans l'énoncé ci-dessus la notion de probabilité pour qu'une fonction aléatoire satisfasse à une certaine inégalité pour toute valeur de l'argument dans un certain intervalle. Nous n'avons pas encore défini cette probabilité, nous accepterons la définition de M. KHINTCHINE.

Soit x une fonction aléatoire du temps „Soit S un ensemble arbitraire fini d'instants appartenant tous à l'ensemble $T_1 < t < T_2$ et $\overline{W}_s$ la probabilité pour que $|x| \geqq X(t)$ soit satisfaite en au moins un de ces instants. Comme probabilité pour que l'inégalité $|x| \geqq X(t)$ soit satisfaite au moins une fois dans l'intervalle $T_1 < t < T_2$ nous définissons la borne supérieure $\overline{W}$ de $\overline{W}_s$ pour tous les choix possibles du système S. Si nous désignons d'autre part par $\underline{W}_s$ la probabilité pour que pour tous les instants de S l'inégalité inverse $|x| < X(t)$ soit valable et si nous interprétons la borne inférieure $\underline{W}$ de $\underline{W}_s$ comme probabilité pour qu'on ait pour tout t de $T_1 < t < T_2$ cette inégalité, alors la condition nécessaire $\overline{W} + \underline{W} = 1$ est satisfaite".

Cette définition nous suffira amplement pour nos buts, l'usage principal que nous ferons du lemme étant la démonstration de l'existence de l'intégrale de $x\,[T_F\,(t)]$ et dans la définition de cette intégrale de RIEMANN n'interviennent que des ensembles finis d'instants.

Ceci posé, il suffit évidemment de démontrer que $x\,[T_F(\tau)]$ $x(F)$ satisfait à une condition généralisée locale de HÖLDER. Les positions du point mobile étant liées en chaîne simple, et la fonction $x\,(E)$ étant supposée uniformément continue, il suffira même de démontrer que la distance $|\,T_F(\tau) - F\,|$ satisfait à une condition locale de HÖLDER. Pour ce dernier but, observons qu'il existe une suite d'instants $t_i > 0$

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_n$$

et une suite de grandeurs positives décroissantes $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots \varepsilon'_n$, $\varepsilon'_n \longrightarrow 0$, telles que la probabilité pour que

$$|\,T_F(t_n) - F\,| > \varepsilon'_n$$

soit $< \frac{1}{n^2}$. De plus $t_n \longrightarrow 0$, $t_n > t_{n+1}$, les intervalles de temps $t_n - t_{n+1}$ tendant vers zéro, nous pouvons trouver une autre suite décroissante de grandeurs positives ε''_n $(\longrightarrow 0)$ telles que, pour tout τ $(t_{n+1} < \tau \leqq t_n)$ la probabilité pour que

$$|\,T_F(t_n) - T_F(\tau)\,| < \varepsilon''_n$$

soit $> \frac{1}{2}$. Considérons la suite

$$\varepsilon'_n + \varepsilon''_n = \varepsilon_n. \text{ On a } \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \ldots > 0.$$

Soit $\varphi'(\tau)$ la fonction continue décroissante définie dans l'intervalle

0, t égale à ε_{n-1} pour $\tau = t_n$ et linéaire dans l'intervalle t_{n-1}, t_n. Je dis que

$$\underset{0<t<\tau}{Pr} \{ | T_F(t) - F | \leq \varphi'(\tau) \} \longrightarrow 1$$

si $\tau \longrightarrow 0$. $\underset{0<t<\tau}{Pr} [A]$ étant la probabilité pour qu'on ait A pour tout t de $0 < t < \tau$.

Pour cela soit Y_n la borne supérieure de $| T_F(t) - F) |$ dans l'intervalle $t_{n+1} \leq t < t_n$. Nous avons

$$Pr [Y_n > \varepsilon_n] \leq 2 \, Pr \{ | T_F(t_n) - F | > \varepsilon'_n \}.$$

En effet, envisageons un ensemble S quelconque d'instants $t'_1, \dots t'_m$, avec $t_{n+1} \leq t'_1 < \dots < t'_m < t_n$. Soit $Y_n^{(S)}$ le maximum de $| T_F(t'_i) - F |$ pour le système S considéré. Nous avons évidemment

$$Pr \{ | T_F(t_n) - F | > \varepsilon'_n \} \geq Pr [Y_n^{(S)} > \varepsilon_n] \sum_{i=1}^{m} p_i Pr \{ | T_F(t'_i) - T_F(t_n) | < \varepsilon''_n \}$$

où p_i désigne la probabilité pour que, pour la première fois dans la suite des $| T_F(t'_j) - F |$, on ait $| T_F(t'_i) - F | > \varepsilon_n$, sous l'hypothèse que $Y_n^{(s)} > \varepsilon_n$.

On a $\sum p_i = 1$ et $Pr \{ | T_F(t'_i) - T_F(t_n) | < \varepsilon''_n \} > \frac{1}{2}$, donc

$$Pr \{ | T_F(t_n) - F | > \varepsilon'_n \} > \frac{1}{2} Pr \{ Y_n^{(S)} > \varepsilon_n \}.$$

En prenant la borne supérieure des $Pr \{ Y_n^{(S)} > \varepsilon_n \}$ pour tous les choix possibles de l'ensemble fini S

$$Pr \{ Y_n > \varepsilon_n \} < 2 Pr \{ | T_F(t_n) - F | > \varepsilon'_n \}.$$

Si l'on a $Y_n < \varepsilon_n$, on a $| T_F(t) - F | < \varepsilon_n \leq \varphi'(t)$ dans tout l'intervalle t_{n+1}, t_n. Pour démontrer qu'on a $| T_F(t) - F | \leq \varphi'(t)$ dans tout l'intervalle 0, t avec une probabilité tendant vers 1, il suffit de montrer qu'avec probabilité 1, seulement un nombre fini des événements Y_n sont réalisés, ou encore (d'après le lemme de Cantelli) que $\sum Pr \{ Y_n > \varepsilon_n \}$ converge; or

$$\sum_{n=2}^{\infty} Pr \{ Y_n > \varepsilon_n \} < 2 \sum_{n=2}^{\infty} Pr \{ | T_F(t_n) - F | > \varepsilon'_n \} < 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ce qui démontre le lemme.

Nous allons en déduire le

Théorème. *Sous nous hypothèses* $x [T_F(t)]$ *est en dehors de cas de probabilité nulle, Riemann-intégrable par rapport à* t.

Envisageons une division D de l'intervalle T_1, T_2 par une suite d'instants $T_1 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T_2$, ou $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$, où $t_0 = T_1$, $t_{n+1} = T_2$. A cette division nous allons faire correspondre la somme

$$\sum_{i=1}^{n+1} X\,[T_F(t)]\,(t_i - t_{i-1}).$$

Soit $\overline{X(T_F(t))}$ la borne supérieure des valeurs de $x\,(T_F(t))$ dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i) et $\underline{x\,[T_F(t_i)]}$ la borne inférieure de $x\,[T_F(t)]$ dans le même intervalle. On a évidemment

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{x\,[T_F(t_i)]}(t_i - t_{i-1}) \geqq \sum_{i=1}^{n+1} x\,[T_F(t_i)](t_i - t_{i-1}) \geqq \sum_{i=1}^{n+1} \underline{x\,[T_F(t_i)]}(t_i - t_{i-1})$$

ou encore en désignant les trois sommes qui interviennent dans cette formule par $\overline{\mathfrak{J}}_D$, $\mathfrak{J}_D$, $\underline{\mathfrak{J}}_D$
on aura

$$\overline{\mathfrak{J}}_D \geqq \mathfrak{J}_D \geqq \underline{\mathfrak{J}}_D.$$

Si nous considérons des divisions succesives D, D_1, D_2, ... chaque division étant emboitée dans la précédente, c'est à dire la division D_k contenant tous les instants de divisions de D_{k-1}, on a

$$\overline{\mathfrak{J}}_D \geqq \overline{\mathfrak{J}}_{D_1} \geqq \cdots \geqq \overline{\mathfrak{J}}_{D_k} \geqq \cdots \geqq \underline{\mathfrak{J}}_{D_k} \geqq \underline{\mathfrak{J}}_{D_{k-1}} \geqq \cdots \geqq \underline{\mathfrak{J}}_{D_{k-2}}$$

Les grandeurs $\overline{\mathfrak{J}}_{D_k}$ étant décroissantes et bornées inférieurement et les $\underline{\mathfrak{J}}_{D_k}$ étant croissantes et bornées supérieurement tendent vers des limites $\overline{\mathfrak{J}}$ et $\underline{\mathfrak{J}}$ (dépendant à priori de notre suite de divisions).

Soit $T_1 < t_1^k < \dots < t_{n_k}^k < T_2$ la division D_k, δ_{D_k} le maximum de $t_i^k - t_{i-1}^k$ pour la division D_k. Je dis que si la suite de divisions est telle que δ_{D_k} tend vers zéro, alors en dehors de cas de probabilité nulle, $\overline{\mathfrak{J}}$. et $\underline{\mathfrak{J}}$ sont égales. En effet envisageons la quantité positive

$$\sum_{i=1}^{n_k+1} \left\{\overline{X\,[T_F(t_i^k)]} - \underline{X\,[T_F(t_i^k)]}\right\}(t_i^k - t_{i-1}^k) = \overline{\mathfrak{J}}_{D_k} - \underline{\mathfrak{J}}_{D_k} > \overline{\mathfrak{J}} - \underline{\mathfrak{J}}$$

Comme δ_{D_k} tend vers zéro, en vertu du lemme, la probabilité pour que $\overline{X\,(T_F(t_i^k))} \quad \underline{X[T_F(t_i^k)]} > \varepsilon$ tend vers zéro et est inférieure à $\eta(\delta_{D_k})$, alors l'espérance mathématique de $\overline{\mathfrak{J}}_{D_k} - \underline{\mathfrak{J}}_{D_k}$ est

$$< 2\,M\,\eta\,(\delta_{D_k}) \sum_{i=1}^{n_k+1} (t_i - t_{i-1}) + 2\,\varepsilon\,(T_2 - T_1) = 2(T_2 - T_1)(\eta M + \varepsilon).$$

La probabilité pour que $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathrm{D}_k} - \underline{\mathfrak{J}}_{\mathrm{D}_k} > \omega$ tendant vers zéro avec δ_{D_k} quel que soit $\omega > 0$ (théorème de Tchebycheff) il suit que $\overline{\mathfrak{J}} = \underline{\mathfrak{J}}$ en dehors de cas de probabilite nulle. Il suit que pour cette suite de division considérée, en dehors de cas de probabilité nulle, la limite

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k+1} (t_i^k - t_{i-1}^k)\, x[\mathrm{T}_\mathrm{F}(t_i^k)]$$

existe. Si maintenant nous considérons deux suites de divisions emboitées D_1 et D'_1...quelconques pour lesquelles le maximum des intervalles δ_{D_k} et $\delta_{\mathrm{D}'_k}$ tend vers zéro, en formant la suite D'', la division D''_k contenant tous les instants de divisions de D_k et de D'_k, et en comparant les limites de $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathrm{D}_k}$, de $\mathfrak{J}_{\mathrm{D}'_k}$ et de $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathrm{D}''_k}$, on voit sans peine que cette limite ne dépend pas de la façon dont nous faisons tendre les intervalles vers zéro.

Il en résulte que $x\,|\mathrm{T}_\mathrm{F}(t)|$ est Riemann-intégrable C. q. f. d.

Dans ce qui va suivre nous allons utiliser le lemme bien connu.

Lemme. Si une variable aléatoire y_n bornée tend si $n \to \infty$ vers une autre variable aléatoire y bornée, alors quel que soit $i > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}[y_n^i] = \mathfrak{M}[\lim y_n^i] = \mathfrak{M}[y^i].$$

Plaçons nous dans les hypothèses dans lesquelles nous avons démontré que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t_i)]\, \frac{t}{n} = \int_0^t x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]\, dt$$

$[t_i = \frac{i}{n} t]$ existe stochastiquement. L'espérance mathématique de

$$\sum_{i=1}^{n} x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]\, \frac{t}{n} \text{ est } \frac{t}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}\{x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t_i)]\} \text{ et } \mathfrak{M}[x(\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]$$

étant une fonction continue du temps:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}\, x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t_i)]\, \frac{t}{n} \to \int_0^t \mathfrak{M}\, x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]\, dt.$$

Comme les x (F) sont bornées, on en deduit en vertu du lemme

$$\mathfrak{M}\left[\int_0^t x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]\, dt\right] = \int_0^t \mathfrak{M}\{x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]\}\, dt.$$

Calculons maintenant

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}\left\{\sum_{i=1}^{n} x[\mathrm{T}_\mathrm{E}(t_i)]\, \frac{t}{n}\right\}^2 = \mathfrak{M}\left\{\int_0^t x|\mathrm{T}_\mathrm{E}(t)]\, dt\right\}^2.$$

On a

$$\mathfrak{M}\left\{\sum_{i=1}^{n} x\,[T_E(t_i)]\frac{t}{n}\right\}^2=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}\,[x(T_E(t)]^2\frac{t^2}{n^2}+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{t}{n}\mathfrak{M}\left\{x(T_E(t_i))\sum_{i+1}^{n} x\,[T_E(t_j)]\frac{t}{n}\right\}$$

$\mathfrak{M}\,\{x\,[T_E(t_i)]\}^2$ étant bornée, le premier terme du second membre tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Envisageons le second. Nous pouvons écrire

$$\mathfrak{M}\left\{x\,[T_E(t_i)]\sum_{i+1}^{n} x\,[T_E(t_j)]\frac{t}{n}\right\}=\int_W x(F)\,dt$$

$$\mathfrak{M}\left\{\sum_{j=1}^{n-i} x\,[T_F(t_j)]\frac{t}{n}\right\}P(E,d\mathcal{A}_F,t_i)$$

et

$$\mathfrak{M}\left\{\sum_{j=1}^{n-i} x\,[T_F(t_j)]\frac{t}{n}\right\}\to\int_0^{t(1-\alpha)}\mathfrak{M}\,\{x[T_F(t)]\}\,dt$$

où $\alpha - \lim\frac{i}{n}$. Nous pouvons donc écrire en désignant par Δ une quantité variable tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$

$$\mathfrak{M}\left\{\sum_{j=i}^{n-i} x\left[T_F(t_j)\frac{t}{n}\right]\right\}=\int_0^{t(1-\frac{i}{n})}\mathfrak{M}\,\{x\,[T_F(t)]\}\,dt+\Delta$$

et

$$\int_W x(F)\mathfrak{M}\left\{\sum_{j=i}^{n-i} x[T_F(t_j)]\frac{t}{n}\right\}P(E,d\mathcal{A}_F,t_i)=$$

$$\int_W x(F)\left\{\int_0^{t(1-\frac{i}{n})}\mathfrak{M}\,[x(T_F(t)]\,d\tau\right\}P(E,d\mathcal{A}_F,t_i)+$$

$$+\Delta'\int_W |\,x(F)\;P(E,d\mathcal{A}_F,t_i)$$

et

$$\mathfrak{M}\left\{\sum_{i=1}^{n} x[T_E(t_i)]\frac{t}{n}\right\}^2 \text{ tendra vers}$$

$$2\int_0^t d\tau_1\int_W x(F)\left\{\int_0^{t-\tau}\mathfrak{M}\;x\;[T_F(\tau_2)]\,d\tau_2\right\}P(E,d\mathcal{A}_F,\tau_1).$$

Comme on a

$$\mathfrak{M}\{x[\mathrm{T_F}(t)]\} = \int_{\mathrm{W}} x(\mathrm{G})\,\mathrm{P}(\mathrm{F}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{G}}, t)$$

il suit que

$$\mathfrak{M}\left\{\int_0^t x[\mathrm{T_F}(t)]\,d\,t\right\} = \int_{\mathrm{W}}\int_0^t x(\mathrm{G})\,\mathrm{P}(\mathrm{F}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{G}}, t)\,d\,t$$

Donc

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{M}\left\{\int_0^t x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t\right\}^2 =$$

$$2\int_0^t d\,\tau_1 \int_0^{t-\tau_1} d\,\tau_2 \int_{\mathrm{W}} x(\mathrm{F})\left\{\int_{\mathrm{W}} x(\mathrm{G})\,\mathrm{P}(\mathrm{F}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{G}}, \tau_2)\right\}\mathrm{P}(\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}}, \tau_1)$$

§ 3. — Propriétés asymptotiques de l'intégrale

$$\int_0^t x\,[\mathrm{T_F}(t)]\,dt.$$

Supposons que nous sommes dans le cas régulier.
Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, t) \rightarrow \mathrm{P}(\mathcal{E})$$

et

$$\int_0^\infty [\mathrm{P}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, t) - \mathrm{P}(\mathcal{E})]\,d\,t = \mathrm{S}(\mathrm{E}, \mathcal{E})$$

donc

$$\mathfrak{M}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t\right\} \rightarrow \int_{\mathrm{W}} \mathrm{X}(\mathrm{F})\,\mathrm{P}(d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}}) = \mathrm{M}$$

et

$$\mathfrak{M}\left\{\int_0^t x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t\right\} - \mathrm{M}\,t \rightarrow \int_{\mathrm{W}} x(\mathrm{F})\,\mathrm{S}(\mathrm{E}, d\,\mathcal{A}_{\mathrm{F}}).$$

Calculons maintenant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}\,\mathfrak{M}\left\{\int_0^t x\,[\mathrm{T_F}(t)]\,d\,t - \mathrm{M}\,t\right\}^2.$$

Soit $x'(\mathrm{F}) = x(\mathrm{F}) - \mathrm{M}$, alors en appliquant la formule (A) et en effectuant d'abord l'intégration par rapport à τ_2

$$\frac{1}{t}\mathfrak{M}\left[\int_0^t x'(\mathrm{T_E}(t)dt\right]^2 =$$

$$2\frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_{\mathrm{W}} x'(\mathrm{F})\left\{\int_{\mathrm{W}} x'(\mathrm{G})\,\mathrm{S}(\mathrm{F}, d\mathcal{A}_{\mathrm{G}}, t-\tau)\right\}\mathrm{P}(\mathrm{E}, d\mathcal{A}_{\mathrm{F}}, \tau).$$

De $\mathrm{S}(\mathrm{F}, \mathcal{E}, t-\tau) \to \mathrm{S}(\mathrm{F}, \mathcal{E})$ et de $\mathrm{P}(\mathrm{E}, \mathcal{E}, t) \to \mathrm{P}(\mathcal{E})$ suit sans peine

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathfrak{M}\left\{\int_0^t (x\,[\mathrm{T_E}(t)] - \mathrm{M})\,dt\right\}^2$$

$$= 2\int_{\mathrm{W}}\int_{\mathrm{W}}(\mathrm{X}(\mathrm{F}) - \mathrm{M})(\mathrm{X}(\mathrm{G}) - \mathrm{M})\,\mathrm{S}(\mathrm{F}, d\mathcal{A}_{\mathrm{G}})\,\mathrm{P}(d\mathcal{A}_{\mathrm{F}})$$

$$= 2\int_{\mathrm{W}}\int_{\mathrm{W}}\mathrm{X}(\mathrm{F})\,\mathrm{X}(\mathrm{G})\,\mathrm{S}(\mathrm{F}, d\mathcal{A}_{\mathrm{G}})\,\mathrm{P}(d\mathcal{A}_{\mathrm{F}}) = \sigma^2.$$

Il ne fait pas de difficulté de montrer que

$$\mathfrak{M}\left\{\int_0^t x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t - t\,\mathrm{M}\right\}^2 - t\,\sigma^2$$

est borné et tend vers une limite dépendant en général de E.

Envisageons maintenant la loi de probabilité de

$$\int_0^t x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t,$$

pour l'établir le plus commode est de constater que si l'on pose

$$\mathrm{X_E^{(1)}} = \int_0^1 x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t \qquad \mathrm{X_E^{(\mathit{i})}} = \int_{i-1}^{i} x\,[\mathrm{T_E}(t)]\,d\,t$$

$$\mathrm{S_E^{(\mathit{n})}} = \mathrm{X_E^{(1)}} + \dots + \mathrm{X_E^{(\mathit{n})}}$$

la loi de probabilité de $\mathrm{X_E^{(\mathit{i})}}$ est bien déterminée lorsqu'on connait la position du point mobile pour $t = i - 1$ et la connaissance de $\mathrm{X_E^{(\mathit{j})}}$ $(j \leq i - 1)$ nous donne un renseignement moindre sur la position du point mobile pour $t = i - 1$ que la connaissance de sa position pour $t = j$. Donc quel que soient E et $\mathcal{E}$ et quels que soient nos renseignements sur les valeurs des $X_E^{(l)}$, $l \leq j$, la probabilité pour que le point mobile se trouve à l'instant $t = i - 1$ dans $\mathcal{E}$ diffère de P ($\mathcal{E}$) d'une quantité $< K e^{-\lambda (i-j)}$. Ceci joint à l'homogénité du mouvement et de $\sigma \neq 0$, $X_E^{(i)}$ borné, étaient les seules propriétés du mouvement dont nous avons eu besoin dans le Chapitre 1 pour démontrer que

$\left[\sum_{i=1}^{n} X_E^{(i)} - n M \right] / \sigma \sqrt{n}$ tend vers la loi de Gauss et que les moments de $\left[\sum_{i=1}^{n} X_E^{(i)} - n M \right] / \sigma \sqrt{n}$ tendent vers les moments de la loi de Gauss. Si $n < t < n + 1$.

$$\int_0^t x\,[T_E(t)]\,dt - t M = \sum_{i=1}^{n} X_E^{(i)} - n M + c_1' \Delta, - 1 < \Delta < 1.$$

Il suit que :

Si $\sigma \neq 0 \int_0^t x\,[T_E(t)]\,dt - t M / \sigma \sqrt{t}$ suit une loi de probabilité tendant vers la loi de Gauss réduite. Les moments de

$$\left\{ \int_0^t x\,[T_E(t)]\,dt - t M \right\} / \sigma \sqrt{t}$$

tendent vers les moments correspondants de la loi de Gauss.

Les évaluations des erreurs restent valables et montrent, comme il n'y a rien à changer non plus dans la démonstration du théorème du logarithme itéré, que la probabilité pour qu'on ait pour un $n > N$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} X_E^{(i)} - n M \right| > \sqrt{\sigma^2 n\,(\lg_2 n + c \lg_3 n)}$$

tend vers 0 avec $\frac{1}{N}$ si $c > \frac{3}{2}$, est égale à 1 si $c \leq \frac{1}{2}$.

Si l'on définit la probabilité pour qu'on n'ait pour aucun $t > T$

$$\left| \int_0^t x\,[T_E(t)]\,dt - t M \right| > \sqrt{\sigma^2 t\,(\lg_2 t + c \lg_3 t)}$$

comme au § précédent, il suit de ce que $\int_0^t x\,[T_E(t)]\,dt - t\,M$ ne se distingue que d'une quantité bornée de $\int_0^{[t]} x\,[T_E(t)]\,dt - [t]\,M$ qu'on a le théorème :

Théorème du logarithme itéré. Si $\sigma \neq 0$, *quel que soit* E, *la probabilité pour qu'on ait pour au moins un* $t > T$ *l'inégalité*

$$\left| \int_0^t [\,x\,[T_E(t)] - M\,]\,dt \right| > \sqrt{2\sigma^2 t\,(\lg_2 t + c\,\lg_3 t)}$$

tend vers zéro si $c > \frac{3}{2}$, est égale à 1 si $c \leq \frac{1}{2}$.

Si $\sigma = 0$, $\int_0^t [\,X\,[T_E(t)] - M\,]\,dt$ restera bornée en dehors de cas de probabilité nulle dans le courant des épreuves.

Le cas où il *y* a plusieurs ensembles finals donne lieu à des lois limites pareilles à celles du § 4 Chapitre 3.

§ 4. — La durée de séjour du point mobile dans un ensemble

Nous avons étudié dans le cas fini et le cas continu le nombre de répétitions à partir d'un point E d'un ensemble $\mathcal{E}$, c'est à dire la fonctionnelle du mouvement du point mobile $\sum_1^n X_E^{(i)}$ où $X_E^{(i)} = 1$, si à la i-ème épreuve à partir de E le point mobile se trouve dans $\mathcal{E}$ supposé mesurable B, et 0 ailleurs. Ici le nombre de réalisations sera remplacé par la durée de séjour. Ce serait alors la mesure de l'ensemble aléatoire des points de l'intervalle $(0, t)$, où $X\,[T_E(t)] = 1$ pourvu que cette mesure existe [$X(F) = 1$ si $F \in \mathcal{E}$, $= 0$ si $F \bar{\in} \mathcal{E}$]. Nous allons nous borner d'abord à des ensembles $\mathcal{E}$ particuliers, nous supposerons les $\mathcal{E}$ des domaines fermés. Alors considérons une couche mince $\delta\,\mathcal{E}$ enveloppant l'ensemble $\mathcal{E}$ et définissons-y $X_\delta(F)$ de manière que $X_\delta(F)$ ($=1$ dans $\mathcal{E}$, $= 0$ dans $W - \mathcal{E} - \delta\,\mathcal{E}$) soit continue et que $0 \leq X_\delta(F) \leq 1$. Alors nous savons que l'intégrale Riemannienne

$$\int_0^t X_\delta\,[T_E(t)]\,dt$$

existe dans le sens stochastique aussi mince que soit $\delta\,\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ étant fermé, nous pouvons rendre $\int_0^t P(E, \delta\mathcal{E}, t)\, dt$ arbitrairement petite, donc $\sum_{i=1}^{n} P\left(E, \delta\mathcal{E}, \frac{t\,i}{n}\right) \frac{t}{n} < \varepsilon$ si $n > N$. Dans

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n} X_\delta \left[T_E\left(t\,\frac{i}{n}\right)\right]$$

l'espérance mathématique de la contribution de $\delta\,\mathcal{E}$ est

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} P(E, \delta\mathcal{E}, \frac{t\,i}{n}) < \varepsilon.$$

Il suit que la contribution de $\delta\,\mathcal{E}$ pour l'intégrale $\int_0^t X_\delta(T_E(t))\, dt$ a une espérance mathématique $< \varepsilon$. Cette contribution étant positive et ε pouvant être rendu arbitrairement petit, l'intégrale $\int_0^t X_\delta(T_E(t))\, dt$ converge si $\delta\,\mathcal{E} \to 0$ vers une limite $\int_0^t X[T_E(t)]\, dt$ avec probabilité 1. Cette limite sera par définition la durée de séjour dans $\mathcal{E}$, dans $(0, t)$, du point mobile parti de E. Nous nommerons cette durée de séjour aléatoire $D_0^t(E, \mathcal{E})$.

Si O est le complémentaire par rapport à W d'un domaine fermé, soit $\mathcal{E}$, alors par définition la durée de séjour dans O sera $t \quad D_0^t(E, \mathcal{E})$. On étend facilement cette définition à des ensembles plus généraux.

Prenons un ensemble $\mathcal{E}$ de ceux pour lesquels nous avons défini la durée de séjour. En appliquant le lemme du § 2 on montre sans peine que les formules sur l'écart-type et l'espérance mathématique de l'intégrale $\int_0^t X[T_E(t)]\, dt$ restent valables encore dans notre cas.

$$\mathfrak{M}\left[\int_0^t X[T_E(t)]\, dt\right] = \int_0^t \mathfrak{M}[X[T_E(t)]]\, dt = \int_0^t P(E, \mathcal{E}, t)\, dt$$

$$\frac{1}{t}\, \mathfrak{M}\left[\int_0^t X[T_E(t)]\, dt\right] \to P\,r\,[E, \mathcal{E}].$$

Supposons que $\mathcal{E} < G_\alpha$, E ε G_α, alors $Pr\,[E, \mathcal{E}] = P_\alpha(\mathcal{E})$:

$$\frac{1}{t}\,\mathfrak{M}\left[\int_0^t X\,[T_E(t)]\,dt\right] \to P_\alpha(\mathcal{E}).$$

L'écart-type de

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t [X\,[T_E(t)] - P_\alpha(\mathcal{E})]\,dt$$

tend vers une limite σ avec

$$\sigma^2 = 2\int_{G_\alpha}\int_{G_\alpha} X(F)\,X(G)\,S(F, d\mathcal{A}_G)\,P_\alpha(d\mathcal{A}_F).$$

Donc

$$\sigma^2 = 2\int_{\mathcal{E}} S(F, \mathcal{E})\;P_\alpha(d\mathcal{A}_F)$$

formule d'une simplicité remarquable. Si $\sigma \neq 0$ il résultera du § précédent que

$$\frac{D_0^t(E, \mathcal{E}) - t\,P_\alpha(\mathcal{E})}{\sigma\sqrt{t}}$$

suit une loi tendant vers la loi de Gauss réduite, et la probabilité pour qu'on ait pour au moins un $t > T$

$$|D_0^t(E, \mathcal{E}) - t\,P_\alpha(\mathcal{E})| > \sqrt{2\sigma^2 t\,(lg_2\,t + \tau\,lg_3\,t)}$$

tendra vers zéro avec $\frac{1}{T}$ si $\tau > \frac{3}{2}$, sera $= 1$ si $\tau < \frac{1}{2}$.

Dans le cas $\sigma = 0$, $|\,D_0^t(E, \mathcal{E}) - t\,P_\alpha(\mathcal{E})\,|$ reste $< k$ dans le courant des épreuves en dehors de cas de probabilité tendant vers 0 avec k^{-1} et la loi forte des grands nombres sera à fortiori satisfaite.

Il en résulte qu'à l'intérieur d'un ensemble final la durée relative de séjour dans un ensemble tend uniformément presque-sûrement vers

$$P_\alpha(\mathcal{E}).$$

Supposons maintenant que nous n'avons qu'un seul ensemble final. (Cas régulier). Alors les formules que nous avons données ci-dessus restent vraies quel que soit E. Seulement $P(\mathcal{E})$ est nulle si $\mathcal{E}$ est extérieur à l'ensemble final, il en est de même de σ.

Dans le cas général: si $E \in G_\alpha$ et $\mathcal{E}$ quelconque, la durée de séjour se réduit sauf dans des cas de probabilité nulle à la durée de séjour dans $\mathcal{E} G_\alpha$, elle est donc nulle si $\mathcal{E} G_\alpha = 0$ et nous avons regardé plus haut le cas où $\mathcal{E} G_\alpha \neq 0$.

Si E se trouve à l'extérieur d'un ensemble final, alors le point mobile ne reste dans $W - \Sigma G_\alpha$ qu'un temps fini en dehors de cas de probabilité nulle. La durée de séjour dans un ensemble $\mathcal{E}$ extérieur aux ensembles finals est finie avec probabilité 1 et son espérance mathématique est $S(E, \mathcal{E})$. Si $\mathcal{E}$ fait partie de G_α, alors le point mobile passe avec probabilité $Pr\,[E, G_\alpha]$ dans G_α et sa durée relative de séjour dans $\mathcal{E}$ y tend presque-sûrement vers $P_\alpha(\mathcal{E})$, ou il passe dans G_β $(\beta \neq \alpha)$ et alors l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est atteint que dans des cas de probabilité nulle.

Remarquons que si l'on admet que les $P(E, \mathcal{E}, t)$, satisfaisant aux conditions du § 1 et du § 2, sont des fonctions d'ensemble absolument continues, alors on peut définir une durée de séjour dans tout ensemble mes (L). Ces durées de séjour étant définies on peut déduire, si $X(F)$ est bornée et mesurable (L), que $x[T_E(t)]$ est Lebesgue-intégrable en dehors de cas de probabilité nulle.

BIBLIOGRAPHIE

W. DOEBLIN. Exposé de la Théorie des Chaînes simples constantes de MARKOFF à un nombre fini d'états (en préparation).

M. FRÉCHET. Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités. Livre 2.

Les probabilités continues „en chaîne“ Comment. Math. Helvetici, t. 5, p. 175 — 245, 1933.

Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le probléme des probabilités „en chaîne“. Bull. Soc. Mat. Fr. t. 62, p. 68 — 83, 1934.

R. FORTET. Sur des probabilités en chaîne. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, t. 201, p. 184, 1935; t. 202, p. 1362 — 4, 1936.

I. HADAMARD. Sur le battage des cartes et ses relations avec la Mécanique statistique. Atti del Congr. Intern. Mat. Bologne, t. V, p. 133 — 9.

B. HOSTINSKY. Méthodes générales du Calcul des Probabilités, Mémorial Sc. Math. No. 52, 1931.

Application du Calcul des Probabilités á la Théorie du Mouvement Brownien. Ann. Ist. H. POINCARÉ, t. III, p. 1 — 70, 1932.

N. KRYLOFF et N. BOGOLIOUBOFF. Sur les propriétés ergodiques de l'équation de SMOLUCHOWSKI. Bull. Soc. Math. Fr., t. 64, p. 49 — 56, 1936.