

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

P.-C. DELENS

**Méthodes et problèmes des géométries différentielles
euclidienne et conforme**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1927

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1927__75__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :
1931.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

P.-C. DELENS

AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DU HAVRE

1^{re} THÈSE. — MÉTHODES ET PROBLÈMES DES GEOMÉTRIES DIFFÉRENTIELLES EUCLIDIENNE ET CONFORME.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1927, devant la Commission d'Examen.

MM. CARTAN, *Président.*
VESSIOT, } *Examineurs.*
CHAZY, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^e, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands Augustins, 55

1927



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen..... G. MAURAIN, Professeur, Physique du Globe.
Doyens honoraires..... P. APPELL, M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires. P. PUISEUX, V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER,
 H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, G. SAGNAC.

	ÉMILE PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	
	KÖNIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.	
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.	
	JANET.....	Électrotechnique générale.	
	WALLERANT.....	Minéralogie.	
	ANDOYER.....	Astronomie.	
	PAINLEVÉ.....	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	
	HAUG.....	Géologie.	
	GABRIEL BERTRAND.....	Chimie biologique.	
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.	
	GAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).	
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.	
	G. URBAIN.....	Chimie minérale.	
	ÉMILE BOREL.....	Calcul des probabilités et Physique mathém.	
	MARCHIS.....	Aviation.	
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.	
	REMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).	
	ABRAHAM.....	Physique.	
	M. MOLLIARD.....	Physiologie végétale.	
Professeurs	CARTAN.....	Géométrie supérieure.	
	LAPICQUE.....	Physiologie générale.	
	VESSIOT.....	Théorie des groupes et Calcul des variations	
	COTTON.....	Physique générale.	
	DRACH.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.	
	C. FABRY.....	Physique.	
	CHARLES PÉREZ.....	Zoologie.	
	LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et Géologie régionale.	
	LESPIEAU.....	Théories chimiques.	
	RABAUD.....	Biologie expérimentale.	
	PORTIER.....	Physiologie comparée.	
	E. BLAISE.....	Chimie organique.	
	DANGEARD.....	Botanique.	
	MONTEL.....	Mécanique rationnelle.	
	WINTREBERT.....	Anatomie et Histologie comparées.	
	DUBOSCQ.....	Biologie maritime.	
	G. JULIA.....	Mathématiques générales.	
	A. JOB.....	Chimie générale.	
	A. MAILHE.....	Étude des combustibles.	
	L. LUTAUD.....	Géographie physique.	
	EUÈNE BLOCH.....	Physique théorique et physique céleste.	
HÉROUARD	Zoologie.	DARMOIS	Physique.
PEGHARD	Chimie (Enseign P. C. N.).	BRI HAT	Physique.
AUGER	Chimie analytique.	MOUTON	Chimie physique.
GUICHARD	Chimie minérale.	JOLEAUD	Paléontologie.
GUILLET	Physique.	JAVILLIER	Chimie biologique.
MAUGUIN	Minéralogie.	DI FOUR	Physique (P. C. N.).
BLARINGHEM	Botanique.	PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
MICHEL LEVY	Pétrographie	ROBERT-LEVY	Zoologie.
DEREIMS	Géologie.	DUNOYER	Optique appliquée.
DONGIER	Physique du globe.	GUILLEMEROND	Botanique (P. C. N.).
DENJOY	Calcul différentiel et intégral	DEBIEUNE	Radioactivité.
BENARD	Physique (P. C. N.).		
Secrétaire	D. TOMBECK.		

**A LA MÉMOIRE
DE MON PÈRE**

A MA MÈRE

A MA FEMME

A

MONSIEUR E. CARTAN

PREMIÈRE THÈSE



MÉTHODES ET PROBLÈMES

DES

GÉOMÉTRIES DIFFÉRENTIELLES

EUCLIDIENNE ET CONFORME



INTRODUCTION.

Ce travail comprend trois grands Chapitres, eux-mêmes partagés en sous-Chapitres; une division en paragraphes numérotés se poursuit d'un bout à l'autre du Mémoire. Nous donnons après cette Introduction une liste des Ouvrages les plus fréquemment consultés et des abréviations par lesquelles nous les désignons dans les références; une Table des matières suit le dernier Chapitre.

L'objet du Mémoire est l'application à l'étude des géométries différentielles euclidienne et conforme d'une méthode de calcul géométrique, et la comparaison des résultats ainsi obtenus et exposés avec ceux qu'ont atteints des méthodes voisines.

Les principes du calcul géométrique sont dus à Möbius, Hamilton et surtout Grassmann; l'œuvre entreprise a été continuée, après Gibbs, par différentes écoles avec des méthodes parfois légèrement divergentes : on peut signaler l'école italienne (Peano, Burali-Forti, Marcolongo, Boggio, etc.), et l'école allemande (Grassmann d. J., Mehmke, Müller, etc.); le développement des méthodes symboliques voisines qui

ont abouti à l'établissement du calcul tensoriel a ramené l'attention sur les procédés de calcul plus géométriques, et une fusion des moyens mis en œuvre est en train de s'opérer. Une école hollandaise (Schouten, Struik, Hlavatý) a mis au point les procédés de calcul géométrique et établi leurs relations avec les méthodes du calcul différentiel absolu; d'intéressants résultats ont été ainsi obtenus concernant les géométries différentielles de divers espaces.

D'autres procédés de calcul, basés sur les formes de Pfaff et la différentiation extérieure, développés par M. E. Cartan, ont également permis à cet auteur d'édifier des théories d'une grande importance; en les utilisant dans ce Mémoire, nous avons eu en vue de situer les unes par rapport aux autres ces diverses méthodes, voisines aussi de celles de la géométrie intrinsèque de Cesàro, et en quelque sorte de les regrouper. Cette comparaison a nécessité des calculs largement détaillés, souvent donnés avec plusieurs notations; l'exposé s'en trouvant alourdi, comme aussi par la nécessité de concilier des notations assez différentes, tâche parfois délicate, nous profiterons de cette Introduction pour dégager les grandes lignes et les résultats de notre travail.

I. Le Chapitre I constitue d'abord un alphabet et une esquisse du calcul géométrique, et non seulement du calcul vectoriel; car si celui-ci, après une longue attente en France, est maintenant généralement accepté, il n'est qu'une partie de méthodes plus complètes. L'exposé que nous donnons s'apparente à ceux de MM. Schouten et Struik d'une part, Burali-Forti et Boggio d'autre part, et nous avons essayé d'adapter les notations multiples qui traduisent les mêmes objets ou les mêmes opérations sous des formes diverses. Notre exposé est cependant limité aux notions qui seront utiles dans les Chapitres suivants.

En partant d'un espace projectif à $n + 1$ unités de base, ou points, dont les objets sont soumis aux homographies d'un groupe fondamental G_p , nous indiquons d'abord comment apparaît la dualité dans un tel espace; cette dualité joue un rôle plus important quand on substitue au groupe projectif général son sous-groupe unimodulaire, ce que nous faisons dans la suite.

Nous donnons alors les expressions des tenseurs ou noyaux géométriques et indiquons comment se traduisent les opérations simples auxquelles on les soumet; les tenseurs attachés aux transformations linéaires sont l'objet de développements particuliers.

Vient ensuite l'étude de l'espace métrique avec une polarité fonda-

mentale, la substitution des éléments contrevariants aux éléments covariants, sur laquelle nous faisons les réserves nécessaires.

Avec l'espace affín et la métrique vectorielle nous atteignons l'espace euclidien et indiquons les opérations qui leur sont propres.

Dans l'exposé de la différentiation et de la dérivation des formes géométriques, nous faisons une large place aux opérations alternées et montrons leur relation simple avec la différentiation extérieure utilisée par M. Cartan : à côté des symboles de différentiation viennent aussi ceux des transformations infinitésimales et l'opération de la parenthèse.

Plusieurs paragraphes sont alors consacrés à la géométrie vectorielle du plan, aux décompositions des homographies dans ce domaine, aux formes différentielles et dérivées et aux parties invariantes de ces expressions ; le rôle des vecteurs unitaires qui servent de base aux repères est mis en évidence.

II. Dans le Chapitre II, nous nous limitons à l'espace euclidien à trois dimensions et étudions les déplacements d'un repère constitué à partir d'un point origine, de masse un, de trois vecteurs unitaires deux à deux rectangulaires, un espace euclidien étant attaché à ce repère. Nous utilisons le groupe G_3 de l'espace euclidien pour arriver aux notions de structure et courbure.

Une amputation de la géométrie euclidienne peut alors être réalisée, les opérations de cette géométrie étant traduites par des opérations vectorielles : nous retombons ainsi dans un domaine familier, mais ici encore la simplification apportée peut faire disparaître certains aspects utiles des éléments géométriques ou des opérations.

Si nous reprenons ensuite des exposés bien connus de la géométrie des courbes et surfaces, c'est d'abord pour fixer avec précision nos notations, pour permettre ensuite la comparaison avec la géométrie conforme qui sera étudiée suivant le même plan. En géométrie différentielle, nos notations sont assez voisines de celles de MM. Schouten et Struik pour permettre l'interprétation des formules dans le langage du calcul tensoriel ; nous restons d'autre part en relations constantes avec les notations de M. Cartan, ce qui permet de juger l'aide qu'une des méthodes peut procurer à l'autre, ou recevoir de celle-ci. Si l'on développe les calculs des formes et différentielles extérieures, ou des noyaux dérivés, à partir des éléments du repère, on retrouve les formules très géométriques du calcul de M. Cesàro.

C'est surtout aux éléments superficiels que nous nous sommes intéressé dans la géométrie des surfaces ; cette nouvelle amputation permet

d'utiliser certaines notions simples données au Chapitre I pour le plan euclidien; elle nous fait négliger aussi des propriétés géométriques intéressantes.

La méthode de calcul géométrique que nous exposons s'est, pendant ce temps, peu à peu débarrassée des préoccupations de repère, et des notations très générales permettent un calcul rapide sur des expressions faciles à interpréter: citons en exemple les formules

$$(76) \quad d_s \Phi - d_\omega \Phi : (\mathcal{J} \times \Phi) \cdot \omega_{12},$$

$$(76') \quad \nabla_s \Phi - \nabla_\omega \Phi : (\mathcal{J} \times \Phi) \cdot \mathfrak{L},$$

$$(99) \quad (d_s \Phi)'_s - (\mathcal{K}_{\mathfrak{K}_s} \times \Phi) - - \mathfrak{K} \cdot \Delta S (\mathcal{J} \times \Phi),$$

$$(98) \quad \nabla_s \Phi : - \mathfrak{K} (\mathcal{J} \times \Phi).$$

Nous pensons avoir ajouté quelques développements à l'étude des courbes tracées sur une surface; si certains problèmes ne sont que posés, leurs solutions qu'esquissées, nous avons au moins ramené ces problèmes de géométrie différentielle à des problèmes de la théorie des formes algébriques: cette *algébrisation* était un des buts que se proposaient les fondateurs du Calcul différentiel absolu dans leur célèbre Mémoire de 1900.

Les problèmes suivants (§§ 43-58) sont plus nouveaux ou ont été moins étudiés auparavant. Entre la géométrie d'une ligne ou d'un faisceau de lignes sur une surface, et la géométrie de la surface, se place un intermédiaire d'une grande importance: la géométrie des *réseaux angulaires* de lignes (faisceaux de congruences), à laquelle se rattache naturellement la théorie du déplacement parallèle. Le rôle des vecteurs unitaires est à nouveau précisé, et les calculs sont développés, qui permettent de déduire d'un réseau angulaire des familles d'autres réseaux en relations étroites avec le précédent: opération analogue à une dérivation qui fait passer d'un réseau *dirigeant* à une suite de réseaux *dirigés*, assemblages de réseaux jouissant de propriétés remarquables.

On peut ainsi espérer, si l'on commence l'étude d'une surface rapportée à un système de lignes coordonnées, passer du système de repère attaché à ces lignes à d'autres systèmes plus favorables. Nous avons insisté sur l'importance des réseaux *associés*, *directement associés*, *incidents*. Quelques réseaux particuliers sont aussi étudiés, réseaux *géodésiques* et réseaux *isothermes*, réseaux *défectifs*. Nous pensons avoir apporté là des développements utiles.

III. Le Chapitre III aborde l'étude de l'espace conforme déduit

de l'espace euclidien usuel par les transformations composées d'un nombre pair d'inversions. Quelques pages d'introduction (§§ 39-60) permettent l'adaptation des notations aux éléments de l'espace conforme, rappellent les groupements remarquables d'éléments. La théorie du repère mobile est ensuite reprise, avec les repères et les méthodes de M. Cartan.

L'étude des courbes de l'espace conforme mène à la particularisation du repère (particularisation *naturelle*) qui semble le mieux convenir au cas général; les invariants sont formés et interprétés, la position des éléments comitants est précisée; la comparaison avec la géométrie euclidienne est possible à chaque instant.

Dans l'étude des surfaces comme dans celle des courbes, nous nous bornons aux connexions induites, introduites par M. Cartan pour ces variétés plongées dans l'espace conforme. A ces connexions sont attachées des particularisations *fondamentales*: pour les surfaces aussi; nous allons au delà d'une telle particularisation pour arriver à un repère simple, fourni par la particularisation *canonique*. Alors que la particularisation fondamentale reposait sur la sphère harmonique \mathbf{H} , la particularisation canonique fixe un pôle de repère \mathbf{W} , comitant au point \mathbf{M} qui décrit la surface et est l'origine du repère. Des propriétés de la sphère \mathbf{H} et du pôle \mathbf{W} sont indiquées, comme aussi la signification de l'élément linéaire (ou angulaire) dm^2 alors choisi pour la surface.

Les relations avec la géométrie euclidienne des éléments ou invariants mis en évidence dans la géométrie conforme ont d'abord été établies, de sorte qu'il est toujours possible dans la suite de faire les calculs ou d'interpréter les résultats avec les notations de la géométrie euclidienne. Mais le choix définitif du repère permet aussi de traiter les calculs en géométrie conforme par des procédés calqués sur ceux de la géométrie euclidienne; c'est ce que nous appelons la géométrie canonique *réduite*.

Un nouveau pas est fait avec l'étude des courbes tracées sur les surfaces; il y a lieu de noter ici un changement de connexion, la géométrie sur une courbe n'étant pas la même si l'on plonge cette courbe directement dans l'espace conforme, ou si elle est tracée sur une surface de cet espace: au cercle osculateur de la courbe se substitue le cercle *harmonique*, qui en est l'image sur la sphère harmonique. Une famille de courbes d'une grande importance, celle des cercles *induits* de M. Cartan, est alors mise en évidence, pour le rôle qu'elle joue vis-à-vis de la particularisation fondamentale et de la connexion induite, ou encore du tenseur de courbure correspondant.

Les calculs ayant été poussés jusqu'à permettre le raccordement des

invariants propres des courbes avec les invariants qu'elles possèdent sur les surfaces, nous pensons que la géométrie des lignes en géométrie conforme est amenée à un point équivalent à celui atteint en géométrie euclidienne; mais les formules sont naturellement plus compliquées, et le besoin d'expressions analytiques appropriées aux changements de variable géométrique se fait sentir.

La notion de réseau angulaire de lignes subsiste en géométrie conforme, mais sans doute faudra-t-il y ajouter un groupement nouveau, celui des *complexes harmoniques*, que nous avons essayé de définir. Il y a là un vaste champ d'études, avec des représentations intéressantes sur la sphère \mathbf{H} , qui reste ouvert.

Les problèmes de contact et d'applicabilité des surfaces mettent en évidence, à côté de la forme quadratique $\delta_0^{(2)}$ des asymptotiques conformes, une forme cubique $\varphi_0^{(1)}$: ces formes interviennent pour la détermination des surfaces conformes. Certaines familles de surfaces, les surfaces isothermiques en particulier, appelleront encore de nouvelles études.

Nous sommes resté élémentaire en n'abordant pas la théorie des groupes d'holonomie, mais nous avons montré, dans une Note placée après le Chapitre III, les liens qui existent entre la théorie des réseaux angulaires et celle des changements de connexion euclidienne des surfaces.

Qu'on nous permette de conclure : il semble que de l'étude comparative des différentes méthodes se dégage l'impression que la théorie des expressions et différentielles extérieures peut être étendue, avec des notations empruntées au calcul différentiel absolu ou au calcul géométrique, à des produits moins restrictifs, de façon à joindre aux formes de Pfaff les formes de Monge et les expressions multilinéaires de différentielles. La régularité de ces méthodes, où les éléments orthogonaux à un élément géométrique viennent constamment compléter celui-ci, est par ailleurs un guide précieux pour les autres procédés de calcul.

Enfin, comme nous en exprimons l'espoir, on peut escompter que des géométries englobant celles de l'espace euclidien et de l'espace conforme, tout en s'appuyant sur les résultats acquis dans ces disciplines, leur ouvriront de nouvelles voies et éclaireront en retour les procédés mis en œuvre.

En terminant, nous tenons à exprimer à M. E. Cartan l'hommage de notre gratitude pour les conseils et les encouragements que nous en avons reçus; nous sommes heureux aussi d'avoir pu utiliser à diverses reprises les travaux de G. Demartres, l'un de nos regrettés professeurs.



BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES CONSULTÉS (1).

	Abréviations.
G. BOULIGAND. — <i>Leçons de Géométrie vectorielle</i>	G. V.
G. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. — <i>Analyse vectorielle générale.</i> I. <i>Transformations linéaires</i>	T. I.
G. BURALI-FORTI et T. BOGGIO. — <i>Espaces courbes. Critique de la</i> <i>Relativité</i>	E. C.
E. CARTAN. — <i>Leçons sur les invariants intégraux</i>	I. I.
E. CARTAN. — <i>La géométrie des espaces de Riemann (Mém. des Sc.</i> <i>math., fasc. IX)</i>	E. R.
E. CESÀRO. — <i>Vorlesungen über natürliche Geometrie</i> (trad. G. Ko- walewski).....	N. G.
J.-I. COOLIDGE. — <i>A treatise on the circle and the sphere</i>	C. S.
G. DARBOUX. — <i>Leçons sur la théorie générale des surfaces</i>	T. S.
S. LIE. — <i>Vorlesungen über Differentialgleichungen</i>	D. G.
R. MEHMKE. — <i>Vorlesungen über Punkt-und-Vektorenrechnung</i> ...	P. V.
H. NEVILLE. — <i>Multilinear functions of direction</i>	M. F.
J.-A. SCHOUTEN. — <i>Grundlagen der Vektor-und-Affinoranalysis</i> ..	V. A.
D.-J. STRUIK. — <i>Grundzüge der mehrdimensionalen Differential-</i> <i>geometrie</i>	M. D.

(1) Cf. aussi les Ouvrages récents de M. A. EGNELL, *L'Orhématique*, et de M. C.-E. WEATHERBURN, *Differential Geometrie of three dimensions*. Certaines des expressions vectorielles qui figurent dans ces Ouvrages et dans notre travail sont à rapprocher de celles données par R. ROTHE, *Jahresh. der d. Math. Ver.*, t. 21, 1912.



CHAPITRE I.

NOTIONS DE CALCUL GÉOMÉTRIQUE.

1. — Les éléments de l'espace projectif E_{n+1} ; les groupes fondamentaux G_p et G_{np} .

1. Considérons l'espace projectif $(n + 1)$ -aire E_{n+1} , à groupe fondamental G_p , comme engendré par l'élément primitif *point* : $n + 1$ points de base \mathbf{e}_i , ou unités du premier ordre, choisis arbitrairement, forment un système de référence, ou repère. Par rapport à un tel repère, tout point \mathbf{p} a $n + 1$ coordonnées homogènes x^i

$$\mathbf{p} = \sum x^i \mathbf{e}_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

les valeurs proportionnelles des coordonnées suffisant d'ailleurs à fixer la position du point, de sorte que le point

$$\lambda \mathbf{p} = \sum \lambda x^i \mathbf{e}_i$$

ne diffère du premier que par le facteur numérique λ .

Les produits extérieurs d'ordre q des points de base, dont le nombre est celui des combinaisons sans répétition de $n + 1$ objets q à q , constituent les unités extérieures d'ordre q attachées au même repère ; une forme extérieure d'ordre q est une combinaison linéaire de ces unités : en particulier, le produit extérieur de q points

$$[\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_q] \quad (q \leq n + 1)$$

constitue un espace projectif q -aire inclus dans E_{n+1} , dont les coordonnées par rapport au repère choisi sont les déterminants d'ordre q déduits du tableau des coordonnées des q points

$$[\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_q] = \sum [x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_q^\rho] [\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \dots \mathbf{e}_\rho] \quad (\alpha, \beta, \dots, \rho = 1, 2, \dots, q).$$

Toute forme extérieure d'ordre $n + 1$ se réduit à un seul terme, donc est multiple de l'unité d'ordre $n + 1$

$$[\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n] = U.$$

Une telle forme est une quantité scalaire.

2. La dualité dans l'espace projectif E_{n+1} résulte pour l'instant de la correspondance qu'on peut établir entre les unités d'ordre q et $n+1-q$, puis entre les formes de ces ordres ayant mêmes coordonnées ; en particulier on peut envisager l'espace E_{n+1} au point de vue tangentiel en le considérant comme engendré par les produits extérieurs d'ordre n , conçus maintenant comme éléments primitifs. La multiplication extérieure de ces éléments est alors dite régressive, alors qu'elle était progressive dans le premier cas.

Cette dualité devient plus parfaite si l'on substitue comme élément générateur à un produit d'ordre n son quotient par l'unité scalaire U :

$$Q = \frac{1}{U} [p_1 p_2 \dots p_n].$$

Q peut s'appeler copoint, ou point covariant, tandis qu'avec les conventions usuelles p est regardé comme contrevariant ; ces définitions ont leur origine dans les transformations projectives de l'espace E_{n+1} , formant le groupe fondamental G_p .

Soit en effet \mathcal{G} une transformation de ce groupe, ou homographie, agissant sur les points de E_{n+1} et transformant un point p en un point p'

$$p' = \mathcal{G} p.$$

La même transformation, agissant sur une forme extérieure d'ordre q , la transforme en une autre de même espèce ; posons

$$[p'_1 p'_2 \dots p'_q] = [\mathcal{G} p_1 \mathcal{G} p_2 \dots \mathcal{G} p_q] = \mathcal{G}^{(q)} [p_1 p_2 \dots p_q].$$

$\mathcal{G}^{(q)}$ étant la puissance (extérieure) d'ordre q de l'homographie $\mathcal{G}^{(1)}$; en particulier

$$U' = \mathcal{G}^{(n+1)} U,$$

$\mathcal{G}^{(n+1)}$ étant le déterminant de la transformation : on voit que

$$U' Q' = U \mathcal{G}^{(n)} Q,$$

$$Q' = \frac{\mathcal{G}^{(n)}}{\mathcal{G}^{(n+1)}} Q,$$

$\mathcal{G}^{(n)}$ est l'adjointe de l'homographie \mathcal{G} , tandis que $\frac{\mathcal{G}^{(n)}}{\mathcal{G}^{(n+1)}}$ est dite *contragrédiente* à \mathcal{G} .

Les substitutions contragrédientes \mathcal{G} et $\frac{\mathcal{G}^{(n)}}{\mathcal{G}^{(n+1)}}$, opérant respectivement

(¹) Pour ce qui concerne les produits et puissances extérieurs d'homographies et réciprociétés, voir R. Mehmke (P. V.).

sur les point et copoint \mathbf{p} et \mathbf{Q} , conservent leur produit extérieur¹

$$[\mathbf{Q}'\mathbf{p}'] \quad [\mathbf{Q}\mathbf{p}].$$

La contragrédiente et l'adjointe d'une homographie ξ sont identiques si ξ est unimodulaire (à déterminant unité) : les homographies unimodulaires forment un sous-groupe G_{up} du groupe projectif G_p ; par les opérations de ce sous-groupe l'unité scalaire U et les produits extérieurs d'ordre $n+1$ sont invariants : nous resterons désormais à l'intérieur du sous-groupe G_{up} .

II. — Quelques opérations de l'algèbre tensorielle.

3. Si l'on échange l'ordre des termes \mathbf{Q} et \mathbf{p} du produit extérieur $[\mathbf{Q}\mathbf{p}]$, on a

$$[\mathbf{p}\mathbf{Q}] - (-1)^n [\mathbf{Q}\mathbf{p}],$$

aussi est-il préférable, pour éviter les changements de signes, d'introduire un nouveau produit :

$$(1) \quad \mathbf{Q}! \mathbf{p} = \mathbf{p}! \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}\mathbf{p}]$$

dit *produit scalaire* (à liaison simple) des éléments d'ordres 1 et n ; ce produit est invariant dans G_{up} .

Dans tout repère, la dualité déjà signalée permet de faire correspondre aux unités contrevariantes \mathbf{e}_i les unités covariantes \mathbf{E}_i telles que

$$\mathbf{E}_i! \mathbf{e}_i = 1, \quad \mathbf{E}_i! \mathbf{e}_j = 0 \quad (j \neq i).$$

Les éléments \mathbf{e}_i et \mathbf{E}_i sont polaires réciproques par rapport à l'hyperquadrique d'équation ponctuelle $\Sigma(x^i)^2 = 0$, et le premier membre de cette équation est contrevariant pour les transformations ξ_j^i .

Faisons à ce sujet la remarque suivante : les transformations ξ_j^i opèrent sous différentes formes sur les éléments géométriques qui peuvent être sujets à des variances diverses : invariance, covariance, contrevariance, variances mixtes ; il sera commode d'employer le mot *comitants* (1) pour désigner les éléments ainsi conservés ou transformés, chaque fois qu'il ne sera pas nécessaire de préciser le mode de variance.

La multiplication scalaire n'est qu'un terme d'une suite d'opérations analogues, douées de la propriété distributive, qui interviennent dans la

(1) R. WEITZENBÖCK, *Invarianten Theorie*.

théorie générale des tenseurs ; l'algèbre moderne désigne par ce nom de tenseur toute forme multilinéaire ou multiple de variables (coordonnées) ; le calcul géométrique arrive à la même notion de la façon suivante : soit par exemple

$$abCDEf$$

une *succession* d'ordre 6, ou produit *sans liaison* de 6 éléments ordonnés ; considérons en même temps la succession

$$VuTzYX$$

d'éléments à variances opposées, rangés dans l'ordre inverse ; le produit

$$(2) \quad abCDEf:VuTzYX \quad (a!X)(b!Y)(C!z)(d!T)(E!u)(f!V) \\ - [Xa][Yb][Cz][Td][Eu][Vf]$$

est dit produit (scalaire) à *liaison sextuple*, ou d'ordre 6, des deux successions précédentes. De même

$$(3) \quad abCDEf:VuTzYX \quad abCd(Ef:Vu)TzYX \\ (Ef:Vu)abCdTzYX.$$

succession d'ordre 8, est le produit à *liaison double* (scalaire) des deux successions primitives, obtenu en ne saturant dans chacune que les deux éléments voisins du symbole d'opération, par les éléments opposés.

D'une manière générale, deux successions d'ordres p et q avec r éléments opposés à partir du symbole d'opération, et rangés en ordre inverse, donnent naissance par une multiplication à *liaison r -uple* (ou d'ordre $r \leq p, q$) à une succession d'ordre $p + q - 2r$; les produits sans liaison, à liaison simple, etc., le produit scalaire, rentrent dans cette définition générale.

Un tenseur géométrique, *noyau* (à multiplication scalaire) du tenseur algébrique correspondant, est une combinaison linéaire de successions de même ordre et de même constitution, c'est-à-dire où les éléments correspondants sont de même espèce : ses ordres covariant, contrevariant, total, sont ceux de ses termes monomes (successions) ; considéré comme opérateur et saturé par une succession opposée de même ordre total, regardée comme objet variable soumis à l'opération, il donne naissance au tenseur algébrique. Un tel noyau est nul quand son produit à liaison complète avec une succession arbitraire est nul, donc en même temps que le tenseur algébrique correspondant ; comme il est composé linéairement au moyen d'unités qui sont des successions de même constitution, ses coordonnées par rapport à ces unités sont alors toutes nulles.

En utilisant la forme multilinéaire des tenseurs et la propriété distributive des multiplications, on définit de même les produits à liaisons des tenseurs entre eux : en particulier, deux tenseurs, de même ordre ou non, sont apolaires quand leur produit à liaison maxima est nul.

Les tenseurs d'ordre zéro sont les nombres, ceux du premier ordre les points et copoints ; les plus utilisés ensuite, ceux du second ordre, représentent les transformations linéaires homographiques et dualistiques opérant sur des éléments d'ordre 1 ou n . Quand nous représenterons une homographie ou une réciprocity par une seule lettre (majuscule) nous sous-entendrons souvent (comme nous l'avons déjà fait) *à la droite de l'opérateur* le symbole d'opération ! du produit à liaison simple. Nous poserons ainsi, par exemple,

$$\mathcal{X} = \Sigma \mathbf{a} \mathbf{B}, \quad \mathcal{R} = \Sigma \mathbf{C} \mathbf{D}$$

pour les tenseurs produisant les transformations

$$\mathbf{x}' = \mathcal{X} \mathbf{x} = \Sigma (\mathbf{B}! \mathbf{x}) \mathbf{a}, \quad \mathbf{X}' = \mathcal{R} \mathbf{x} = \Sigma (\mathbf{D}! \mathbf{x}) \mathbf{C}.$$

Signalons en particulier le tenseur unité \mathcal{U} , ou transformation identique, qui sous cette forme opère sur les points avec le noyau

$$\mathcal{U} = \Sigma \mathbf{e}_i \mathbf{E}_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

tandis qu'il opère sur les copoints avec le noyau

$$\overline{\mathcal{U}} = \Sigma \mathbf{E}_i \mathbf{e}_i.$$

Les points et copoints étant les éléments fondamentaux de notre \mathbf{E}_{n+1} , on peut encore, avec MM. Burali-Forti et Boggio (E. C.) considérer l'action d'un tenseur d'ordre q sur une succession d'ordre $q - 1$ par une multiplication à liaison $(q - 1)$ -uple, le résultat étant alors un élément primitif : à ce point de vue, il est logique de considérer le tenseur d'ordre q comme une transformation (homographie au sens large) d'ordre $q - 1$.

4. Certaines propriétés importantes des tenseurs (indépendantes de leur rang) sont données par la constitution commune à leurs termes monomes ; nous dirons, par exemple, que $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{C} \mathbf{d} \mathbf{E} \mathbf{f}$ est le schéma de constitution d'un tenseur $\Sigma \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{C} \mathbf{d} \mathbf{E} \mathbf{f}$; un tel schéma met en évidence le rangement des éléments covariants et contravariants : par une extension du mot monome, il indiquera les groupements symétriques, alternés, cycliques, etc., que peuvent présenter les éléments. On pourra parfois

sous-entendre le signe de sommation et représenter symboliquement (nous dirons schématiquement) le noyau par son schéma.

Appelons isomères d'une succession celles qui s'en déduisent par permutation des éléments, isomère d'un tenseur un tenseur déduit du premier en remplaçant les termes de celui ci par leurs isomères provenant d'une même permutation. Considérons en particulier une succession $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_q$ d'éléments analogues : soient Σ_p la somme des isomères pairs (déduits de la succession par permutations paires), Σ_i la somme des isomères impairs (par permutations impaires) : les tenseurs

$$\overbrace{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_q} = \frac{1}{q!} (\Sigma_p + \Sigma_i),$$

$$\underbrace{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_q} = \frac{1}{q!} (\Sigma_p - \Sigma_i),$$

s'appellent respectivement *produits symétrique* (ou algébrique) et *alterné* des éléments ; dans les formules de composition, ce dernier joue un rôle analogue à celui du produit extérieur $[\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_q]$ des mêmes éléments (1) : ces deux produits sont isomorphes.

Remarquons qu'un tenseur d'ordre $n + 1$ de schéma $\overbrace{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n} \mathbf{p}$ a en même temps, à un facteur symbolique près, le schéma \mathbf{Qp} et peut ainsi être regardé comme du second ordre ; aussi qu'on pourrait, dans la définition des tenseurs, utiliser exclusivement les éléments d'une espèce : points ou copoints.

Un tenseur à schéma symétrique ou alterné est dit lui-même symétrique ou alterné ; ces groupements sont importants parce que dans un produit entre tenseurs où des éléments groupés en successions (au sens large) l'une symétrique, l'autre alternée, se trouvent complètement liés, le résultat est nul (2) ; ainsi

$$(\Sigma \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} \widehat{\mathbf{d} \mathbf{e} \mathbf{f}}) \mathbf{z} (\Sigma \mathbf{v} \widehat{\mathbf{u} \mathbf{t} \mathbf{z}} \mathbf{y} \mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } r \geq 3.$$

L'annulation d'un tenseur entraîne évidemment celle de tous ses iso-

(1) Ainsi, dans \mathbb{E}_{n+1} , tout tenseur alterné d'ordre $q > n + 1$ est nul.

(2) Signalons des formules de récurrence, comme

$$3! \overline{\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}} = 2! (\overline{\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}} + \overline{\mathbf{y} \mathbf{z} \mathbf{x}} + \overline{\mathbf{z} \mathbf{x} \mathbf{y}}), \quad 3! \widehat{\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}} = 2! (\widehat{\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}} + \widehat{\mathbf{y} \mathbf{z} \mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{z} \mathbf{x} \mathbf{y}}),$$

et des formes plus compliquées, par exemple

$$\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z} = \overline{\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}} + \overline{\mathbf{z} \mathbf{x} \mathbf{y}} + \overline{\mathbf{y} \mathbf{z} \mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z}} + \widehat{\mathbf{y} \mathbf{z} \mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{z} \mathbf{x} \mathbf{y}}$$

mères, l'ordre des éléments n'apparaissant plus dans le produit à liaison complète.

Les isomères d'une succession, puis d'un tenseur, pouvant s'obtenir par une suite de transpositions effectuées sur deux éléments, et même deux éléments consécutifs, on peut faire choix d'un symbole pour représenter une telle transposition, symbole affecté d'indices désignant la place des éléments qu'il intervertit; nous représenterons par $\mathbb{K}_{\alpha\beta}$ le symbole de transposition des éléments de rangs α et β (à partir de la droite), par $\mathbb{S}_{\alpha\beta}$ et $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$ les symboles produisant respectivement la symétrie et l'alternance des mêmes éléments; symboliquement

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_{\alpha\beta} \quad | \quad \mathbb{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbb{A}_{\alpha\beta} \quad | \quad -\mathbb{K}_{\alpha\beta} \end{array} \right.$$

Les indices seront supprimés quand il n'y aura que deux éléments en jeu.

III. — Les transformations linéaires.

§. Nous ferons usage, dans ce paragraphe, des schémas pour représenter les homographies et corrélations. Soient les homographies

$$\begin{array}{l} \mathcal{X} = \mathbf{aB}, \quad \mathcal{Y} = \mathbf{uV} \\ \text{les corrélations} \\ \mathcal{R} = \mathbf{CD}, \quad \mathcal{S}' = \mathbf{ef}. \end{array}$$

La transformée de \mathcal{Y} par \mathcal{X} s'obtient en agissant avec \mathcal{X} sur \mathbf{u} , avec $\mathcal{X}^{(n)}$ sur \mathbf{V} ; si l'on pose

$$\mathcal{X}^{(n)} = \mathbf{Pq}, \quad \overline{\mathcal{X}^{(n)}} = \mathbf{qP}, \quad \mathcal{X}^{(n)} \mathbf{V} = \mathbf{V}! \overline{\mathcal{X}^{(n)}}$$

il vient

$$\mathcal{Y}_* = \mathcal{X} \mathbf{u} \cdot \mathcal{X}^{(n)} \mathbf{V} = \mathcal{X}! \mathbf{uV}! \overline{\mathcal{X}^{(n)}} = \mathcal{X} \mathcal{Y} \overline{\mathcal{X}^{(n)}}$$

$\overline{\mathcal{X}^{(n)}}$ représentant la *conjointe* de $\mathcal{X}^{(n)}$, obtenue à partir de cette dernière et en renversant le schéma. D'après

$$(\overline{\mathcal{X}^{(n)}} \mathcal{X} \mathbf{x})! \mathbf{Y} = \mathbf{Y}! \overline{\mathcal{X}^{(n)}} \mathcal{X} \mathbf{x} = (\mathcal{X}^{(n)} \mathbf{Y})! \mathcal{X} \mathbf{x} = \mathcal{X}^{(n+1)}(\mathbf{Y}! \mathbf{x}) = \mathcal{X}^{(n+1)}(\mathbf{x}! \mathbf{Y}),$$

on voit que

$$\begin{array}{l} \overline{\mathcal{X}^{(n)}} \mathcal{X} = \mathcal{X}^{(n+1)}, \\ \overline{\mathcal{X}^{(n)}} = \mathcal{X}^{(n+1)} \mathcal{X}^{-1} \quad (\mathcal{X}^{-1} \text{ inverse de } \mathcal{X}) \end{array}$$

(pour le cas général où l'homographie \mathcal{H} n'est pas dégénérée, $\mathcal{H}^{(n+1)} \neq 0$), de sorte que la transformée de l'homographie \mathcal{J} est encore

$$(5) \quad \mathcal{J}_* = \mathcal{H}^{(n+1)} \cdot \mathcal{H} \mathcal{J} \mathcal{H}^{-1}.$$

De même \mathcal{S}' sera transformée (en utilisant la conjointe $\overline{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H}) en

$$\mathcal{S}'_* = \mathcal{H} \mathcal{S}' \overline{\mathcal{H}}$$

et \mathcal{R} en

$$\mathcal{R}_* = \mathcal{H}^{(n)} \mathcal{R} \overline{\mathcal{H}^{(n)}}.$$

En opérant avec une corrélation \mathcal{R} , par exemple, on obtient les transformées d'espèces différentes

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{R} \mathcal{H} \overline{\mathcal{R}^{(n)}}, \\ \mathcal{S} &= \mathcal{R} \mathcal{S}' \overline{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

($\mathcal{R}^{(n)}$ étant l'adjointe de \mathcal{R} , $\overline{\mathcal{R}^{(n)}}$ et $\overline{\mathcal{R}}$ les conjuguées de $\mathcal{R}^{(n)}$ et \mathcal{R}).

Parmi les homographies à rattacher à \mathcal{H} , et opérant comme elle sur les points, citons :

\mathcal{H}^{-1} , son inverse, ainsi que les diverses puissances (positives ou négatives) à liaison simple.

$\overline{\mathcal{H}^{(n)}}$, conjointe de l'adjointe (et adjointe de la conjointe), dont nous avons montré la relation à la précédente. Dans les homographies agissant sur les copoints :

$\overline{\mathcal{H}}$, conjointe, et $\mathcal{H}^{(n)}$, adjointe.

Rappelons qu'une homographie \mathcal{H} satisfait à une équation fondamentale de Hamilton-Cayley, de degré inférieur ou égal à $n + 1$, qui est une relation entre \mathcal{H} et l'homographie identique \mathcal{U} (cas particulier d'une relation symétrique plus générale entre $n + 1$ homographies) ; si l'on écrit cette relation

$$\sum (-1)^p \mathbf{I}_p(\mathcal{H}) \cdot \mathcal{H}^{n+1-p} \mathcal{U}^p = 0 \quad (p = 0, 1, \dots, n + 1)$$

le coefficient $\mathbf{I}_p(\mathcal{H})$, invariant d'ordre p de \mathcal{H} , a pour expression

$$\mathbf{I}_p(\mathcal{H}) = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} [\mathcal{H}^{(p)} \mathcal{U}^{(n+1-p)}] \quad \mathcal{H}^{(p)}[\mathcal{?}] \mathcal{U}^{(p)}, \quad \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{n+1} = 1$$

(le dernier produit étant un produit scalaire double entre tenseurs extérieurs d'ordre p). Il faut signaler en particulier l'invariant linéaire

$$(6) \quad \mathbf{I}_1 \mathcal{H} = (n+1) [\mathcal{H} \mathcal{U}^{(n)}] = \mathcal{H} \mathcal{U}.$$

Comme autres homographies importantes liées linéairement à \mathcal{X} , considérons encore

$$(7) \quad \mathcal{X}^* = \frac{1}{n} [\mathcal{X} \mathcal{U}^{(n-1)}] = \mathbb{1}_1 \mathcal{X} \cdot \overline{\mathcal{U}} - \overline{\mathcal{X}}$$

et sa conjointe, dite *cyclique de \mathcal{X}* (*),

$$(7') \quad \mathbb{C}\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}^*} = \mathbb{1}_1 \mathcal{X} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{X},$$

ainsi que l'homographie *normale* (à invariant linéaire nul)

$$(8) \quad \mathbb{N}\mathcal{X} = \mathcal{X} - \frac{\mathbb{1}_1 \mathcal{X}}{n-1} \mathcal{U},$$

permettant l'importante décomposition

$$(9) \quad \mathcal{X} = \frac{\mathbb{1}_1 \mathcal{X}}{n-1} \mathcal{U} + \mathbb{N}\mathcal{X}.$$

Enfin, aux opérations déjà envisagées sur les homographies, nous joindrons celle de la *parenthèse* (de S. Lie), définie par

$$(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X} = -(\mathcal{Y}\mathcal{X})$$

considérée comme une multiplication entre \mathcal{X} et \mathcal{Y} , et dont le produit est une homographie normale.

Quant aux corrélations, nous utiliserons leur propriété d'engendrer les homographies par une multiplication à liaison simple, soit

$$\mathcal{S}'\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathbb{C}\mathbb{D} \quad (\mathbb{1}_1 \mathbb{C} \mathbb{1}_1 \mathbb{D})$$

et le fait qu'une corrélation est la somme d'une partie symétrique (polarité) et d'une partie alternée

$$(10) \quad \mathcal{R} = \mathcal{S}\mathcal{R} + \mathbb{A}\mathcal{R}.$$

Si l'on introduit la réciprocité *conjuguée* (à schéma renversé)

$$(10') \quad \mathbb{K}\mathcal{R} = \mathcal{S}\mathcal{R} - \mathbb{A}\mathcal{R},$$

on aura les nouvelles décompositions

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{S}\mathcal{R} + \mathbb{K}\mathcal{R}, \\ \mathcal{R} &= \mathbb{A}\mathcal{R} + \mathbb{K}\mathcal{R} \quad (\text{de même pour } \mathcal{S}'). \end{aligned}$$

(*) W. WOITZ, *Göttingen Nachrichten*, 1904. — C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO (T. I₄). — J.-A. SCHOUTEN (V. A.).

Quant à l'adjointe $\mathcal{R}^{[n]}$ (ou $\mathcal{S}'^{[n]}$) d'une réciprocity, elle est d'espèce différente de celle-ci, ainsi que l'inverse $\mathcal{R}^{-1} = \frac{\mathcal{R}^{[n]}}{\mathcal{R}^{[n+1]}}$ (ou \mathcal{S}'^{-1}).

IV. — L'espace métrique et la polarité fondamentale.

6. Considérons dans E_{n+1} une polarité \mathcal{P} agissant sur les points et définie par une hyperquadrique non dégénérée ($\mathcal{P}^{[n+1]} \neq 0$); utilisons exclusivement les repères formés par les $(n+1)$ édres polaires réciproques par rapport à \mathcal{P} , de sorte que l'équation tangentielle de cette hyperquadrique soit $\Sigma(x_i)^2 = 0$, son équation ponctuelle $\Sigma(x^i)^2 = 0$; alors

$$\mathcal{P} = \Sigma \mathbf{E}_i^2, \quad \mathcal{P}' = \Sigma \mathbf{e}_i^2.$$

Les homographies de G_{np} conservant cette propriété des repères satisfont à

$$\mathcal{G} \mathcal{P}' \overline{\mathcal{G}} = \mathcal{P}'$$

et forment évidemment un sous-groupe de G_{np} , celui qui conserve l'hyperquadrique fondamentale, ou *absolu*; on vérifie du reste que les équations

$$\mathcal{G}_1 \mathcal{P}' \overline{\mathcal{G}_1} = \mathcal{G}_1 \mathcal{P}' \overline{\mathcal{G}_1} = \mathcal{P}'$$

entraînent

$$(\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1) \mathcal{P}' (\overline{\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1}) = \mathcal{P}'.$$

L'espace E_{n+1} soumis seulement aux transformations de ce sous-groupe, que nous désignerons par G_{um} , acquiert un caractère *métrique*: à tout élément, à tout tenseur, correspondent par la polarité fondamentale un élément, un tenseur, bien déterminés, et la correspondance est involutive. Considérons en particulier des éléments réciproques \mathbf{e}_i et \mathbf{E}_i

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_i = 1, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E}_i = 0 \quad (i \neq j).$$

Comme

$$\mathbf{E}_i = \mathcal{P} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = \mathcal{P}' \mathbf{E}_i,$$

le produit scalaire de deux éléments a les formes équivalentes

$$(11) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathcal{P} \mathbf{b} = \mathcal{P}' \widehat{\mathbf{a} \mathbf{b}} = \mathcal{P}' \widehat{\mathbf{A} \mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b};$$

conçu comme un produit entre \mathbf{a} et \mathbf{b} , ou \mathbf{A} et \mathbf{B} , on lui donne le nom de produit *intérieur* des éléments de même espèce et l'on peut le représenter par

$$\mathbf{a} | \mathbf{b} = \mathbf{A} | \mathbf{B}.$$

7. Ceci permet alors de substituer les éléments contrevariants aux covariants, ou inversement (identification symbolique d'éléments qui ne sont qu'isomorphes), à condition de substituer en même temps de façon convenable la multiplication intérieure à la multiplication scalaire ; une telle substitution n'est d'ailleurs valable qu'à l'intérieur du groupe G_{um} , où l'on peut toujours rétablir les éléments primitifs, et s'étend alors aux tenseurs de tous ordres et aux multiplications définies sur eux, en remplaçant les liaisons scalaires par des liaisons intérieures. Cette identification symbolique n'est d'ailleurs pas sans inconvénient ; c'est un moyen de calcul qui permet de représenter plusieurs formules (isomorphes) par une seule, et facilite le passage des formules relatives à un espace E_p à celles relatives à des espaces inclus (sections) $E_q (q < p)$ ou l'extension inverse, grâce aux propriétés connues des transformations par polaires réciproques, par exemple ; mais elle masque la réalité géométrique en mettant en évidence des éléments orthogonaux à ceux qui interviennent réellement, en ne permettant plus de distinguer à première vue, parmi les comitants, ceux où l'absolu n'intervient pas effectivement ; nous en ferons cependant usage.

Les polarités fondamentales \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' sont liées aux homographies identiques \mathfrak{U} et $\overline{\mathfrak{U}}$ par les relations

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}, \quad \overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'.$$

Après l'identification, ces quatre transformations sont représentées par le même noyau $\Sigma \theta_i^2$.

De même une homographie $\mathfrak{H} = \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ peut être écrite sous deux formes principales

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{S}'\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'\mathfrak{R}, \\ \mathfrak{R} &= \mathfrak{C}\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{e}\mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les comitants de \mathfrak{H} peuvent s'exprimer comme comitants de \mathfrak{S}' et \mathfrak{T} , ou de \mathfrak{T}' et \mathfrak{R} ; inversement

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}' &= \mathfrak{H}\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'\mathfrak{R}'\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'\mathfrak{R}'\mathfrak{H}', \\ \mathfrak{R} &= \mathfrak{H}\mathfrak{S}' = \mathfrak{T}'\mathfrak{S}'\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'\mathfrak{S}'\mathfrak{H}'. \end{aligned}$$

Ainsi l'invariant linéaire de \mathfrak{H} donne un invariant de \mathfrak{S}' et \mathfrak{T} , c'est-à-dire un invariant absolu de \mathfrak{S}'

$$I_1 \mathfrak{H} = \mathfrak{S}'\mathfrak{T}.$$

En particulier

$$I_1 \mathfrak{U} = \mathfrak{A}'\mathfrak{A} = n + 1.$$

Plus généralement, l'équation fondamentale de \mathcal{X} peut être considérée comme une relation identique entre \mathcal{S}' et \mathcal{X} , etc.

Sans développer davantage l'étude des analogies entre homographies et corrélations amenée par l'introduction de la polarité fondamentale qui définit la métrique de E_{n+1} , rappelons qu'on appelle *conjuguée* d'une homographie \mathcal{X} l'homographie de même espèce

$$(12) \quad \mathbf{K}\mathcal{X} = \mathcal{X}'\overline{\mathcal{X}}\mathcal{X} = (\overline{\mathcal{X}\mathcal{X}'\mathcal{X}}),$$

c'est-à-dire la transformée de sa conjointe par la polarité fondamentale, ou la conjointe de sa transformée ; il en résulte

$$\mathcal{X}\mathbf{K}\mathcal{X} = \mathcal{X}'\mathcal{X}'\overline{\mathcal{X}}\mathcal{X}'$$

et pour les homographies \mathcal{G} de G_{um}

$$(13) \quad \mathcal{G}\mathbf{K}\mathcal{G} - \mathcal{U} = \mathbf{K}\mathcal{G} \cdot \mathcal{G},$$

ce qui, sous la forme déjà donnée

$$\mathcal{G}'\mathcal{X}'\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{X}',$$

indique la conservation de la polarité absolue \mathcal{X}' par la transformation \mathcal{G} ,

8. Après l'identification symbolique

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}' - \overline{\mathcal{X}} - \overline{\mathcal{X}'} - \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}.$$

on attribuera indifféremment aux homographies ou réciprociétés les décompositions fournies par les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \frac{\mathbf{I}_1 \mathcal{X}}{n-1} \mathcal{U} - \mathbf{N}\mathcal{X} - \mathbf{I}_1 \mathcal{X} \cdot \mathcal{U} - \mathbf{C}\mathcal{X}, \\ \mathcal{X} &= \mathbf{S}\mathcal{X} - \mathbf{A}\mathcal{X} = \mathbf{S}\mathcal{X} - \mathbf{K}\mathcal{X}, \end{aligned}$$

ce qui mène à la décomposition du tenseur du second ordre en parties irréductibles ⁽¹⁾,

$$(14) \quad \mathcal{X} = \frac{\mathbf{I}_1 \mathcal{X}}{n-1} \mathcal{U} - \mathbf{N}\mathcal{X} - \mathbf{A}\mathcal{X}.$$

(1) Cette décomposition, pour l'espace vectoriel à trois dimensions, est due à J. A. Schouten (V. A.). Voir également, pour les décompositions plus générales, E. CARTAN, en particulier *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9^e série, t. I, 1922; J. A. SCHOUTEN, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (2) 13, 1920.

Nous poserons encore

$$(15) \quad \begin{cases} NS = SN = D, & \text{partie droite du tenseur,} \\ \frac{1}{n} \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{U}, \\ \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{G}, & \text{partie gauche du tenseur.} \end{cases}$$

Pour tous ces symboles s'appliquant aux tenseurs du second ordre, nous pourrons écrire symboliquement

$$1 = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \mathfrak{S} - \mathfrak{K} = (n - 1) \mathfrak{U} - \mathfrak{G}.$$

Tous ces symboles sont échangeables deux à deux, et en particulier,

$$\mathfrak{U} \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D} \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \mathfrak{U} = 0.$$

En outre, pour deux tenseurs \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' ,

$$\mathfrak{C} \mathfrak{C}' \quad \mathfrak{U} \mathfrak{C}' \mathfrak{U} \mathfrak{C} \quad \mathfrak{D} \mathfrak{C}' \mathfrak{D} \mathfrak{C} \quad \mathfrak{A} \mathfrak{C}' \mathfrak{A} \mathfrak{C},$$

les tenseurs partiels de noms différents étant apolaires; cette expression est aussi celle de l'invariant linéaire 1 , de $\mathfrak{C} \mathfrak{C}'$ (ou de $\mathfrak{C}' \mathfrak{C}$), ce qui permet de commencer la décomposition de ce tenseur; on n'obtient pas aussi facilement les autres parties de cette décomposition, car \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' conçus soit comme homographies, soit comme réciprociés, sont naturellement soumis à des décompositions différentes. On obtiendrait le résultat avec les schémas des diverses parties, mais pour l'exprimer simplement, il faudrait utiliser les relations d'incidence entre divers éléments générateurs de l'espace, ce que nous n'avons pas à développer ici.

Tous les symboles linéaires précédemment employés peuvent s'appliquer à des tenseurs d'ordres quelconques, en les affectant d'indices comme nous l'avons indiqué pour \mathfrak{S} , \mathfrak{A} , \mathfrak{K} .

On utilise aussi le symbole non linéaire \mathfrak{R} , *réciproque* de, pour représenter les transformées d'adjointes d'homographies ou corrélations

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) &= \mathfrak{C}' \mathfrak{C}^{[n]} \overline{\mathfrak{C}}, \\ \mathfrak{R}(\mathfrak{C}') &= \mathfrak{C} \mathfrak{C}'^{[n]} \overline{\mathfrak{C}'} \quad (\text{de même pour } \mathfrak{S}'). \end{aligned}$$

V. — L'espace affín et la métrique vectorielle; l'espace euclidien.

9. Laissons de côté dans E_{n+1} le sous-groupe G_{nm} précédemment considéré et portons notre attention sur le nouveau sous-groupe G_{na} des

homographies conservant un copoint ou hyperplan privilégié \mathbf{E}_0 , que nous représenterons désormais par \mathbf{V} ; imposons-nous, en outre, d'utiliser seulement des repères dont tous les sommets, sauf \mathbf{e}_0 , sont situés sur \mathbf{V} , tels que

$$[\mathbf{V}\mathbf{e}_0] = 1, \quad [\mathbf{V}\mathbf{e}_i] = 0 \quad (i \neq 0),$$

repères qui se déduisent les uns des autres par les homographies \mathcal{G} de G_{na} ; les relations

$$\mathcal{G}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{V}, \quad \mathcal{G}^{(m)}\mathcal{G}^{(n)} = (\mathcal{G}_2\mathcal{G}_1)^{(m)}$$

mettent bien en évidence le fait que ces homographies engendrent un groupe.

L'espace E_{n+1} , soumis aux opérations de G_{na} , devient un espace *affin* dont \mathbf{V} est l'hyperplan de l'infini, espace dit à n dimensions; la *masse* d'un point \mathbf{p} de E_{n+1} est le produit scalaire $[\mathbf{V}\mathbf{p}]$; cette masse est nulle pour les éléments de \mathbf{V} , appelés vecteurs, dépendant linéairement des vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$; les formes extérieures d'ordre q de ces vecteurs s'appellent encore formes vectorielles à q dimensions et comprennent en particulier les produits extérieurs : bivecteurs, trivecteurs, etc.

Comme nous l'avons vu, les éléments de \mathbf{V} forment un E_n inclus dans E_{n+1} ; une hyperquadrique à n dimensions de cet E_n , simplement dégénérée dans E_{n+1} , définit une polarité \mathcal{Q} ($\mathcal{Q}^{(n+1)} = 0, \mathcal{Q}^{(n)} \neq 0$), et les transformations de G_{na} conservant cette hyperquadrique, ou la polarité qu'elle détermine, forment un nouveau sous-groupe G_r ; l'espace E_{n+1} , soumis uniquement aux transformations de G_r , est l'espace *euclidien* à n dimensions dont les propriétés sont bien connues; les repères que nous utiliserons dans cet espace ont pour éléments de base un point \mathbf{e}_0 de masse unité et n vecteurs, deux à deux perpendiculaires et tous de longueur unité

$$[\mathbf{V}\mathbf{e}_0] = 1, \quad \mathbf{e}_i^2 = 1, \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = 0 \quad (j \neq i),$$

le symbole \times étant choisi pour la multiplication intérieure définie par \mathcal{Q} dans l'espace vectoriel \mathbf{V} . Dans cet E_n , soit ε_i l'élément conjugué à \mathbf{e}_i ,

$$\mathcal{Q} = \sum \varepsilon_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si l'on considère en même temps les hyperquadriques comitantes de E_{n+1} , non dégénérées

$$\mathcal{Q} = \mathbf{V}^2 - \sum \mathbf{E}_i^2,$$

on voit que pour des vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} ,

$$\mathcal{Q}^2 \mathbf{uv} = \mathcal{Q}^2 \mathbf{vu},$$

tandis que pour des points \mathbf{a} , \mathbf{b} ,

$$\mathcal{Q}^2 \mathbf{ab} = \Sigma[\varepsilon, \mathbf{a}][\varepsilon, \mathbf{b}]$$

a seul une signification absolue, $\mathcal{Q}^2 \mathbf{ab}$ variant avec l'hyperquadrique \mathcal{Q} choisie avec le centre \mathbf{e}_0 ; aussi le produit intérieur

$$(16) \quad \mathcal{Q}^2 \mathbf{ab} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

peut être appliqué non seulement aux vecteurs, mais aux formes du second ordre formées à volonté de points et de vecteurs. Les formes nouvelles ainsi obtenues représentent les hypersphères et hyperplans de \mathbf{E}_{n+1} ; nous en ferons usage au Chapitre III.

VI. — Différentiation et dérivation des formes géométriques.

10. Soient Φ , Φ_1 , Φ_2 , ..., Ψ , ... des formes géométriques quelconques de \mathbf{E}_{n+1} (qui peuvent être des nombres ou scalaires), les Φ étant de même espèce, et qui dépendent de q paramètres variables u^i ; nous définissons la différentielle $d\Phi$ à partir des dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$ par

$$d\Phi = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} du^i,$$

l'opération d ayant la propriété distributive

$$\begin{aligned} d(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots) &= d\Phi_1 + d\Phi_2 + \dots, \\ d(\Phi \circ \Psi) &= d\Phi \circ \Psi + \Phi \circ d\Psi, \end{aligned}$$

quelle que soit la multiplication représentée par le symbole \circ , à condition toutefois que cette multiplication soit une opération invariante par les opérations ζ_j^i du groupe fondamental G ou du sous-groupe dans lequel nous opérerons.

Si, en particulier, les u^i peuvent être regardés comme les coordonnées, curvilignes en général, d'un élément géométrique variable \mathbf{m} , de différentielle

$$d\mathbf{m} = \sum \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^i} du^i,$$

la différentielle $d\Phi$ peut se mettre sous la forme

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{d\mathbf{m}} d\mathbf{m}.$$

En effet, Φ étant fonction de \mathbf{m} , $d\Phi$ est linéaire en $d\mathbf{m}$ et $\frac{d\Phi}{d\mathbf{m}}$, dérivée de Φ par rapport à \mathbf{m} , représente l'opérateur, qui, agissant sur une différentielle $d\mathbf{m}$, $\partial\mathbf{m}$, ..., ou un élément de même espèce (et du même domaine) que celle-ci, donne la différentielle correspondante $d\Phi$, $\partial\Phi$, ..., ou une forme de même espèce que Φ ; sauf quand \mathbf{m} est un nombre, $\frac{d\Phi}{d\mathbf{m}}$ a, du reste, un noyau d'espèce différente de Φ .

Si les variables peuvent se grouper en coordonnées de différents éléments \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{p} , ..., on aura, de même,

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{m}} d\mathbf{m} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} d\mathbf{n} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{p}} d\mathbf{p} + \dots,$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{m}}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{p}}$, ... étant les dérivées partielles de Φ par rapport aux éléments variables \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{p} , ... qui peuvent d'ailleurs être d'espèces différentes.

On peut aussi utiliser les formules de changements de variables géométriques, avec des fonctions intermédiaires, du type

$$(17) \quad \frac{d\Phi}{d\mathbf{m}} = \frac{d\Phi}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{m}},$$

à condition que les opérateurs intermédiaires soient définis; du reste, nous ne soulèverons pas ici de difficultés sur l'existence des dérivées et supposons les formes employées Φ , Ψ , ..., \mathbf{m} , \mathbf{n} , ... (fonctions ou variables géométriques) dérivables autant qu'il en sera besoin, les dérivées et différentielles successives étant définies de proche en proche.

11. Considérons le cas qui nous intéressera davantage, où \mathbf{m} est un élément primitif, un point par exemple, et où la forme Φ dépend de \mathbf{m} seul; en isolant dans $\frac{d\Phi}{d\mathbf{m}}$ le noyau que nous représenterons par $\nabla\Phi$, noyau dérivé, ∇ , *nabla*, étant un opérateur différentiel agissant sur Φ , on aura (1)

$$(18) \quad d\Phi = \frac{d\Phi}{d\mathbf{m}} d\mathbf{m} = \nabla\Phi! d\mathbf{m}$$

(1) D.-J. Struik (M. D.) et J.-A. Schouten placent le noyau dérivé $\nabla\Phi$ à droite de la différentielle $d\mathbf{m}$.

et de même,

$$\delta\Phi = \nabla\Phi! \delta\mathbf{m}, \quad \mathfrak{S}\Phi = \nabla\Phi! \mathfrak{S}\mathbf{m}.$$

On aurait ensuite

$$\delta \, d\Phi - d \, \delta\Phi = \nabla^2\Phi^2(\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m} - d\mathbf{m} \, \delta\mathbf{m}) - \nabla^2\Phi^2 \overline{\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m}} - \nabla\Phi!(\delta \, d\mathbf{m} - d \, \delta\mathbf{m}),$$

d'où la combinaison importante

$$\delta \, d\Phi - d \, \delta\Phi = \nabla^2\Phi^2(\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m} - d\mathbf{m} \, \delta\mathbf{m}) - \nabla\Phi!(\delta \, d\mathbf{m} - d \, \delta\mathbf{m}).$$

Donc, pour les symboles de différentiation arbitraires d, δ échangeables

$$\nabla^2\Phi^2(\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m} - d\mathbf{m} \, \delta\mathbf{m}) - \nabla^2\Phi^2 \overline{\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m}} = 0,$$

c'est-à-dire que le tenseur $\nabla^2\Phi$ aura un schéma terminé à droite par deux facteurs échangeables, puisqu'il n'agit pas sur un produit alterné $\overline{\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m}}$; ces deux facteurs sont, du reste, covariants, les différentielles $d\mathbf{m}, \delta\mathbf{m}$ étant regardées comme contrevariantes.

Réciproquement, si l'on part d'une forme $\Psi_{,d}$ linéaire par rapport à la différentielle $d\mathbf{m}$ et qu'on peut écrire

$$\Psi_{,d} = \Theta! \, d\mathbf{m}, \\ \delta\Psi_{,d} - d\Psi_{,\delta} = \nabla\Theta^2 \overline{\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m}} - \Theta!(\delta \, d\mathbf{m} - d \, \delta\mathbf{m})$$

pour des symboles d, δ échangeables, $\Psi_{,d}$ sera une différentielle exacte si $\nabla\Theta$ a les deux derniers facteurs de droite de son schéma échangeables, c'est-à-dire peut s'écrire

$$\nabla\Theta = \mathbf{aB} \dots \widehat{\mathbf{UV}}.$$

puisque cela entraîne

$$\nabla\Theta! \overline{\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m}} - \mathbf{aB} \dots \left(\widehat{\mathbf{UV}^2 \overline{\delta\mathbf{m} \, d\mathbf{m}}} \right) = 0.$$

Si, en particulier, $\Psi_{,d}$ est une forme de Pfaff ω_d ,

$$\omega_d = \Sigma \alpha_i \, du^i,$$

on sait qu'on pose ⁽¹⁾

$$(19) \quad \omega' = \delta\omega_d - d\omega_\delta = \Sigma \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j} \right) [du^j \, du^i];$$

ω' étant le covariant bilinéaire ou différentielle extérieure de ω , et

$$[du^j \, du^i] = \delta u^j \, du^i - du^j \, \delta u^i$$

(1) Cf E. CARTAN (I. I.).

étant un produit extérieur de différentielles (par une extension aux nombres, déjà employée, de la notation du produit extérieur). Plus généralement,

$$(20) \quad [\omega^i \omega^j] = \omega^i_j \omega^j - \omega^j_i \omega^i$$

s'appelle produit extérieur des formes de Pfaff ω^i et ω^j ; si \mathbf{A}_i et \mathbf{A}_j sont les noyaux de ces formes, on a, du reste,

$$\begin{aligned} \omega^i_j &= \mathbf{A}_i! \cdot d\mathbf{m} = [\mathbf{A}_i, d\mathbf{m}], & \omega^j_i &= \mathbf{A}_j! \cdot d\mathbf{m} = [\mathbf{A}_j, d\mathbf{m}], \\ [\omega^i \omega^j] &= [\mathbf{A}_i, \delta\mathbf{m}] [\mathbf{A}_j, d\mathbf{m}] - [\mathbf{A}_i, d\mathbf{m}] [\mathbf{A}_j, \delta\mathbf{m}] \\ &= - \overline{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j}^2 \delta\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m} - \overline{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j}^2 \delta\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m}, \end{aligned}$$

expression alternée à la fois par rapport aux noyaux $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$ et aux différentielles $d\mathbf{m}, \delta\mathbf{m}$.

12. On se rend facilement compte, sur une succession de h éléments, et par suite sur le schéma d'un tenseur d'ordre h , que la différentiation donne un tenseur d'ordre h de même constitution que le tenseur primitif; par suite, qu'il en est de même pour le schéma formé par les h premiers éléments de gauche du schéma du noyau dérivé, qui est d'ordre $h + 1$ (c'est son ordre covariant qui a augmenté d'une unité par la dérivation). Soit ainsi

$$\begin{aligned} &\Phi \quad \widehat{aBCD} \overline{efg}H. \\ d\widehat{BC} &= \frac{1}{2} (d\widehat{B.C} \quad \widehat{B.C} \cdot dC \quad d\widehat{C.B} \quad \widehat{C.B} \cdot dB) = \frac{1}{2} (\widehat{d\widehat{B.C}} \quad \widehat{B.C} \cdot dC) \quad \widehat{B.C} \end{aligned}$$

schématiquement; de même,

$$\begin{aligned} d\overline{efg} &= \overline{e_1 f_1 g_1}, \\ d\Phi &= \widehat{a_2 B.C} \cdot \overline{D_2 e.f} \cdot g_2 H_2. \end{aligned}$$

Pour passer d'une différentielle $d\mathbf{p}$ à la dérivée $\nabla\mathbf{p}$, il faudra écrire

$$\nabla\mathbf{p} = \mathbf{qR},$$

de sorte que

$$d\mathbf{p} = \mathbf{q}(\mathbf{R}! d\mathbf{m}),$$

\mathbf{q} étant un élément de l'espèce de \mathbf{p} , \mathbf{R} un élément covariant: puis, dans la dérivée d'une forme Φ contenant un élément \mathbf{p} , laisser \mathbf{q} à la place de \mathbf{p} et renvoyer \mathbf{R} à la fin de la succession (à droite), de sorte que cet

élément \mathbf{R} soit le premier à agir sur une différentielle $d\mathbf{m}$, placée aussitôt après le symbole de multiplication (1).

Il s'ensuit que des tenseurs isomères ont des différentielles et des noyaux dérivés qui sont respectivement isomères entre eux; deux formes différentielles isomères dont le schéma a gardé le même dernier élément à droite sont par suite différentielles exactes ou non en même temps.

La combinaison alternée déjà utilisée $\partial\Psi_d - d\Psi_\partial$ qui, pour des symboles d, ∂ échangeables, éliminait les différentielles secondes et était, par suite, comitante aux différentielles premières, peut se généraliser avec un nombre quelconque de différentielles. Soit ainsi :

$$\Omega_{\partial d} = \Xi \overbrace{\partial \mathbf{m} \cdot d \mathbf{m}},$$

$$\Omega' = \mathfrak{S} \Omega_{\partial d} \quad \partial \Omega_{d \partial} \quad d \Omega_{\partial \partial} = \mathfrak{S} \overbrace{\Xi \mathfrak{S} \mathbf{m} \cdot \partial \mathbf{m} \cdot d \mathbf{m}}$$

dans les mêmes conditions. D'où, en particulier :

La différentielle extérieure d'une fonction bilinéaire alternée de différentielles échangeables est nulle quand cette forme est différentielle exacte, et réciproquement; c'est, pour les fonctions scalaires, la propriété connue du covariant trilinéaire. Un autre cas intéressant est le suivant :

La dérivée d'une forme symétrique, elle-même dérivée exacte, est une forme symétrique; et plus généralement :

Si une forme symétrique d'ordre h est dérivée exacte, elle est dérivée exacte d'ordre h d'un scalaire.

Les formules où figurent des produits extérieurs, ou alternés, de différentielles, ont cependant un intérêt particulier parce que ces produits intervenant sous les signes d'intégration, elles fournissent des relations entre intégrales de dimensions h et $h + 1$.

13. Si l'on part d'un scalaire φ , les premiers éléments dérivés sont

$$\nabla \varphi = \mathbf{F}_1 \quad \text{gradient de } \varphi.$$

$$\nabla^2 \varphi = \widehat{\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}_2} \quad \text{schématiquement.}$$

En partant d'un élément covariant du premier ordre \mathbf{P}_1 ,

$$\nabla \mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2$$

(1) On a donc, en général,

$$\nabla(\Phi \circ \Psi) \neq \nabla \Phi \circ \Psi + \Phi \circ \nabla \Psi.$$

comprend généralement la partie alternée

$$\Lambda \nabla \mathbf{P}_1 = \overline{\mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2},$$

et le double de cette partie s'appelle le *rotationnel* de \mathbf{P}_1 .

Si l'on part, au contraire, d'un élément contrevariant du premier ordre \mathbf{p}_1 ,

$$\nabla \mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2 \mathbf{P}_2$$

donne naissance à l'invariant

$$|_1 \nabla \mathbf{p}_1 - \nabla \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2 = | \mathbf{P}_2 \mathbf{q}_2 |$$

appelé *divergence* de \mathbf{p}_1 .

Dans le cas où l'on a substitué au groupe fondamental G un des sous-groupes conservant des éléments privilégiés (infini, absolu), les combinaisons de ces éléments avec les formes différentielles ou dérivées sont de nouvelles formes comitantes, que l'on considère comme obtenues par de nouveaux opérateurs différentiels; on a distribué à ces formes ou à ces opérateurs les noms de gradient, divergence, rotationnel, laplacien, etc., souvent après avoir employé, en particulier, l'identification symbolique, d'où une certaine confusion déjà signalée. Mais en particulier, le *laplacien* Δ peut être défini pour une forme Φ quelconque par

$$(21) \quad \Delta \Phi = \nabla^2 \Phi \mathfrak{Q}',$$

\mathfrak{Q}' étant la polarité absolue $\Sigma \mathfrak{e}_2^2$; le tenseur $\Delta \Phi$ est de même espèce que le tenseur primitif Φ , et en outre, les schémas de Φ et $\Delta \Phi$ ont même constitution, d'où l'importance de cet opérateur.

Remarque. — Quand les différentielles $d\mathbf{m}$, $\partial\mathbf{m}$, ... varient dans un domaine moins étendu que le E_{n+1} utilisé, il peut y avoir ambiguïté sur ce qu'il convient d'appeler noyau d'une forme différentielle, noyau dérivé, etc., un tel noyau pouvant être arbitrairement prolongé par des termes dont le produit par une différentielle quelconque du domaine restreint est nul; ce cas se présente déjà dans l'espace euclidien E_{n+1} où les différentielles d'un point variable de masse constante appartiennent à l'espace vectoriel à n dimensions. Les théorèmes précédemment établis ne s'appliquent pas alors au noyau prolongé, mais au noyau restreint susceptible d'agir sur ces différentielles; en d'autres termes, c'est, par exemple, la propriété de $\nabla \Theta^2 \overline{\partial\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m}}$ qui est à considérer plutôt que celle de $\nabla \Theta$; de même pour les autres noyaux dérivés.

14. À côté des différentielles arbitraires dm , δm , ..., un élément variable \mathbf{m} peut être soumis à une variation de forme $\mathbf{u} dt$, \mathbf{u} appartenant à un champ défini en fonction de \mathbf{m} dans un certain domaine; si l'on pose

$$\mathfrak{C}\mathbf{m} = \mathbf{u}.$$

\mathfrak{C} étant le symbole de la transformation infinitésimale considérée (c'est sensiblement la notation de S. Lie), une forme Φ fonction de \mathbf{m} aura la variation correspondante $\mathfrak{C}\Phi \cdot dt$, avec

$$(22) \quad \mathfrak{C}\Phi = \nabla\Phi! \mathfrak{C}\mathbf{m} - \nabla\Phi! \mathbf{u}.$$

notation analogue à celle des différentielles. Dans le cas où \mathbf{u} est défini dans le même domaine que \mathbf{m} , on peut considérer \mathfrak{C} comme une homographie à laquelle est soumis *seulement* l'élément \mathbf{m} ; mais \mathfrak{C} agit comme un symbole différentiel, et non comme une homographie, sur un élément autre que \mathbf{m} ; son action sur le bivecteur $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$, par exemple, sera de le transformer en

$$[\mathfrak{C}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] + [\mathbf{a} \cdot \mathfrak{C}\mathbf{b}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{C}\mathbf{u}] [\mathbf{a}\mathbf{b}]$$

et non en $\mathfrak{C}^{(2)}[\mathbf{a}\mathbf{b}]$.

La formule (22) permet de considérer $\mathfrak{C}\Phi$ comme dérivée de Φ pour l'élément \mathbf{u} (pour un point \mathbf{m} de masse unité, et un vecteur \mathbf{u} unitaire, c'est la dérivée dans la direction \mathbf{u}). Un symbole \mathfrak{C} est échangeable avec les symboles de différentielles ordinaires (échangeables), mais deux symboles \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' ne peuvent, en général, être échangés entre eux.

Si l'on effectue sur les symboles \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' l'opération alternée de la parenthèse

$$(\mathfrak{C}'\mathfrak{C})\Phi = \mathfrak{C}'\mathfrak{C}\Phi - \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\Phi - \nabla\Phi!(\mathfrak{C}'\mathbf{m} \cdot \mathfrak{C}\mathbf{m} - \mathfrak{C}\mathbf{m} \cdot \mathfrak{C}'\mathbf{m}) - \nabla\Phi!(\mathfrak{C}'\mathfrak{C})\mathbf{m}$$

à cause de la symétrie terminale de $\nabla^2\Phi$, on a

$$(23) \quad (\mathfrak{C}'\mathfrak{C})\Phi = \nabla\Phi!(\mathfrak{C}'\mathfrak{C})\mathbf{m},$$

de sorte que la combinante $(\mathfrak{C}'\mathfrak{C})$ de \mathfrak{C} et de \mathfrak{C}' est un nouveau symbole analogue à ceux-ci; on vérifie aussitôt l'identité de Jacobi relative à trois symboles \mathfrak{C} , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' ,

$$(\mathfrak{C}''(\mathfrak{C}'\mathfrak{C}))\mathbf{m} - (\mathfrak{C}'(\mathfrak{C}\mathfrak{C}''))\mathbf{m} + (\mathfrak{C}(\mathfrak{C}''\mathfrak{C}'))\mathbf{m} = 0.$$

Nous n'avons pas séparé ici dans les expressions $\mathfrak{C}\mathbf{m}$ le symbole \mathfrak{C} de l'objet \mathbf{m} , parce qu'on ne peut le faire dans le cas où \mathbf{m} n'appartiendrait

plus au domaine de définition de u , c'est-à-dire où \mathcal{C} ne serait pas une homographie de ce domaine.

VII. — La géométrie vectorielle du plan euclidien.

15. Dans le plan, domaine vectoriel à deux dimensions, nous prendrons un repère fixe e_1, e_2 avec

$$[e_1, e_2] = 1,$$

d'où les unités covariantes

$$E_1 = -\frac{e_2}{1}, \quad E_2 = \frac{e_1}{1},$$

puis, après introduction de la polarité fondamentale

$$\mathcal{U} = E_1^2 - E_2^2,$$

nous utiliserons l'identification symbolique en substituant aux opérations scalaires les opérations intérieures, la multiplication étant indiquée par le symbole \times , d'où

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} = e_1^2 - e_2^2.$$

À côté de ce tenseur, nous introduirons le verseur \mathcal{J} produisant la rotation directe d'un angle droit du vecteur qui lui est soumis,

$$\mathcal{J} = e_1 e_2 - e_2 e_1 = \sqrt{e_2 e_1},$$

\mathcal{J} satisfait à l'équation fondamentale

$$\mathcal{J}^2 = -\mathcal{U}^2 = -\mathcal{U},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \mathcal{J} &= \mathcal{J}^{-1} = -\mathcal{J}, & \mathbf{1}_1 \mathcal{J} &= \mathcal{J}_2^2 \mathcal{U} = 0, \\ \mathbf{1}_2(\mathcal{J}) &= \mathcal{J}^{(2)} = 1, & \mathbf{1}_1 \mathcal{J}^2 &= \mathcal{J}_2^2 \mathcal{J} = -2. \end{aligned}$$

Soit a un vecteur quelconque

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2, \\ \mathcal{J} a &= -a \times \mathcal{J} = -\alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2. \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs a, b ,

$$\sqrt{ab} = ab - ba = -\frac{[ab]}{1} (e_2 e_1 - e_1 e_2) =$$



Acceptons pour simplifier de représenter par $\mathbf{1}$ l'unité bivectorielle U , d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= -[ab] \mathcal{J}, \\ [ab] &= \sqrt{ab}^2 \mathcal{J} = ab^2 \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Par rapport aux deux vecteurs du repère, les opérations extérieure et intérieure font en quelque sorte double emploi depuis l'introduction de \mathcal{J} ,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a} = -[\mathbf{e}_2 \mathbf{a}] = -\mathcal{J} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_2 \times \mathcal{J} \mathbf{a}, \\ \alpha_2 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{a} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{a}] = \mathcal{J} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 \times \mathcal{J} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Pour les tenseurs du second ordre, nous pouvons, à côté de l'invariant intérieur \mathbb{I}_1 , introduire un invariant linéaire extérieur \mathbb{E}_1 ,

$$(24) \quad \mathbb{E}_1 \mathcal{K} = -\mathcal{K} \mathbb{E}_1 \mathcal{J} = -\mathbb{I}_1 (\mathcal{K} \mathcal{J}).$$

On complète alors la décomposition du tenseur \mathcal{K} en mettant la partie droite sous la forme

$$\mathbb{D} \mathcal{K} = \frac{1}{2} (\mathcal{K} - \mathcal{J} \mathcal{K} \mathcal{J}) = \frac{1}{2} (\mathcal{J} \mathcal{K}) \mathcal{J} = \frac{1}{2} \mathcal{J} (\mathcal{K} \mathcal{J})$$

($\mathbb{D} \mathcal{K} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les homographies \mathcal{K} et \mathcal{J} soient échangeables),

$$(25) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_1 \mathcal{K} \mathbb{U} + \mathbb{E}_1 \mathcal{K} \mathcal{J} - \mathcal{J} (\mathcal{K} \mathcal{J})).$$

En partant, pour cette décomposition de la forme dyadique

$$\mathcal{K} = \sum \alpha_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2).$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbb{U} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \mathbb{I}_1 \mathcal{K} \mathbb{U} = \frac{1}{2} (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \mathbb{U}, \\ \mathbb{A} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}_1 \mathcal{K} \mathcal{J} = \frac{1}{2} (\alpha_{21} - \alpha_{12}) \mathcal{J}, \\ \mathbb{D} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} (\alpha_{11} - \alpha_{22}) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \frac{1}{2} (\alpha_{11} - \alpha_{22}) (\mathbf{e}_1^2 - \mathbf{e}_2^2). \end{aligned} \right.$$

Pour une dyade \mathbf{ab} , la décomposition en parties gauche et droite est particulièrement intéressante ⁽¹⁾ :

$$\mathbb{G} \mathbf{ab} = \frac{1}{2} (\mathbf{ab} + \mathcal{J} \mathbf{a} \mathcal{J} \mathbf{b}),$$

$$\mathbb{D} \mathbf{ab} = \frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathcal{J} \mathbf{a} \mathcal{J} \mathbf{b}).$$

La première partie est une similitude, la seconde une antisimilitude, produit (à gauche ou à droite) d'une similitude par une symétrie *arbitraire*; cette décomposition s'étend donc aux homographies générales, mais pour une dyade on peut, par deux choix de la symétrie, mettre en

(1) P. C. DELLENS, *L'Enseignement mathématique*, t. XXIII, 1923.

facteur la similitude $\mathbb{G}ab$, de sorte que l'autre facteur représente une projection orthogonale; en effet,

$$\mathbb{D}ab = \alpha \mathbb{G}ab = \mathbb{G}ab \times \beta$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{U} - \nu(\mathcal{J}a_1)^2, & a_1 &= \frac{a}{\sqrt{a_1^2}}, \\ \beta &= \mathcal{U} - \nu(\mathcal{J}b_1)^2, & b_1 &= \frac{b}{\sqrt{b_1^2}}, \end{aligned}$$

ce qui ramène à

$$(27) \quad \begin{cases} \mathbb{a}b = (\mathcal{U} - \alpha)\mathbb{G}ab = a_1^2 \times (\mathbb{a}b \mathcal{J}a_1 \mathcal{J}b_1) - \nu a_1^2 \times \mathbb{G}ab, \\ \mathbb{a}b = (\mathbb{G}ab) \times (\mathcal{U} - \beta) = (\mathbb{a}b \mathcal{J}a_1 \mathcal{J}b_1) \times b_1^2 - \nu \mathbb{G}ab \times b_1^2. \end{cases}$$

Si, malgré l'emploi de l'identification symbolique et de l'opérateur \mathcal{J} , on préfère employer les formules établies avec des produits extérieurs, on pourra développer aussi les multiplications à liaisons extérieures simples ou multiples; il sera alors commode, dans une telle opération, de lier de préférence les éléments de même rang, soit à partir de la droite, soit à partir de la gauche, dans les deux tenseurs soumis à l'opération. On pourra ainsi poser, par exemple ⁽¹⁾,

$$(28) \quad \begin{cases} {}_2[(abc\dots)(uvw\dots)] \\ \quad = \nu[(ab)(uv)](c\dots)(wx\dots) - [au][bv](c\dots)(wx\dots), \\ [\dots defg](\dots yzt)_2 \\ \quad = [(fg)(zt)](\dots de)(\dots y) - [fz][gt](\dots de)(\dots y), \end{cases}$$

et l'on arrivera en particulier à des formes extérieurement apolaires à droite ou à gauche quand le produit correspondant, à liaison maxima, sera nul.

16. En géométrie différentielle, considérons différentes fonctions de deux variables indépendantes u_1, u_2 et les dérivées de ces fonctions. Pour un scalaire φ , nous écrirons ⁽²⁾

$$(29) \quad \mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi = \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2.$$

⁽¹⁾ La notation avec crochets employée pour les transformations linéaires est une simplification de celle ci, l'indice étant omis.

⁽²⁾ L'adjonction de nouveaux indices ($i, j, k \dots = 1, 2$) à une lettre déjà utilisée représente ici une dérivation partielle par rapport à des coordonnées cartésiennes x_1, x_2 , relatives au repère fixe $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, car

$$\mathbf{e}_1 = \nabla x_1, \quad \mathbf{e}_2 = \nabla x_2.$$

Pour un vecteur,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \\ \nabla \mathbf{a} &= \sum \alpha_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}_2; \\ (30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{E}_1 \nabla \alpha = \alpha_{21} - \alpha_{12} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{a}_2 \times \mathbf{e}_1, \quad \text{Rota} = 2 \mathbf{A} \nabla \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathcal{J}, \\ \text{div } \mathbf{a} = \mathbf{I}_1 \nabla \alpha = \alpha_{11} + \alpha_{22} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{e}_2, \quad \text{Div } \mathbf{a} = 2 \mathbf{U} \nabla \mathbf{a} = \text{div } \mathbf{a} \cdot \mathcal{U}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

de sorte que pour un gradient

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{grad} \varphi = 0, \\ \text{div } \mathbf{grad} \varphi = \Delta \varphi = \varphi_{11} + \varphi_{22}. \end{array} \right.$$

Pour deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} , formant un similirepère (figure semblable à un repère),

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{b} = \mathcal{J} \mathbf{a}, & \nabla \mathbf{b} = \mathcal{J} \nabla \mathbf{a}, \\ \text{rot } \mathbf{b} = \text{div } \mathbf{a}, & \text{Rot } \mathbf{b} = \mathcal{J} \text{ Div } \mathbf{a}, \\ \text{div } \mathbf{b} = -\text{rot } \mathbf{a}, & \text{Div } \mathbf{b} = \mathcal{J} \text{ Rota}. \end{array} \right.$$

Pour une homographie

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum \gamma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{h}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{h}_2 \mathbf{e}_2, \\ \nabla \mathcal{H} &= \sum \gamma_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = (\mathcal{H}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathcal{H}_2) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

(les parenthèses enfermant les opérateurs \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 indiquant que ceux-ci ne sont pas liés aux vecteurs qui les suivent).

Convenons d'appliquer les symboles \mathbf{I}_1 , \mathbf{E}_1 , \mathbf{h} , etc., sans nouveaux indices, aux deux facteurs *de droite* d'un schéma d'ordre quelconque ⁽¹⁾; nous introduirons les vecteurs

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathcal{H} = \mathbf{E}_1 \nabla \mathcal{H} = \mathbf{h}_{21} - \mathbf{h}_{12} = \mathcal{H}_1 \mathbf{e}_2 - \mathcal{H}_2 \mathbf{e}_1, \\ \text{div } \mathcal{H} = \mathbf{I}_1 \nabla \mathcal{H} = \mathbf{h}_{11} + \mathbf{h}_{22} = \mathcal{H}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{H}_2 \mathbf{e}_2. \end{array} \right.$$

Dans le cas du noyau dérivé d'un vecteur

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \nabla \mathbf{a} = 0, \\ \text{div } \nabla \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}. \end{array} \right.$$

Pour une homographie numérique $\varphi \mathcal{U}$,

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \varphi \mathcal{U} = \mathbf{grad} \varphi, \\ \text{rot } \varphi \mathcal{U} = \mathcal{J} \mathbf{grad} \varphi. \end{array} \right.$$

etc.

(1) On peut généraliser les notations

$\text{rot} = \mathbf{E}_1 \nabla$ $\text{div} = \mathbf{I}_1 \nabla$ $\text{Rot} = 2 \mathbf{A} \nabla$ $\text{Div} = 2 \mathbf{U} \nabla$ $\text{rot } \nabla = \nabla^2 = \mathbf{E}_1 \nabla^2$ $\text{div } \nabla = \Delta = \mathbf{I}_1 \nabla^2$
pour des homographies d'ordre quelconque.

17. Nous aurons en particulier à nous occuper des vecteurs de longueur constante ; soit, par exemple, un vecteur unitaire \mathbf{a}_1 , et soit $\mathbf{a}_2 = \mathcal{J}\mathbf{a}_1$, le vecteur formant repère avec le premier. La relation

$$\mathbf{a}_1^2 = 1$$

donne par dérivation

$$(36) \quad \mathbf{a}_1 \times \nabla \mathbf{a}_1 + \mathcal{K} \nabla \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_1 \times \nabla \mathbf{a}_1 = 0.$$

Il s'ensuit l'importante propriété que le noyau dérivé d'un vecteur unitaire est une dyade, homographie dégénérée de rang un. En effet,

$$[\mathbf{a}_1 \times \nabla \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \nabla \mathbf{a}_1] - [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2](\nabla \mathbf{a}_1)^{(1)} - (\nabla \mathbf{a}_1)^{(2)} = 0.$$

On peut écrire cette dyade sous la forme

$$\nabla \mathbf{a}_1 = \mathcal{J} \mathbf{a}_1 \mathbf{f} = \mathbf{a}_2 \mathbf{f}.$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_1 \times \nabla \mathbf{a}_1$$

et aussi, d'après (26),

$$(37) \quad \begin{aligned} \mathcal{G} \nabla \mathbf{a}_1 &= \frac{1}{2} (\text{rota}_1 \cdot \mathcal{J} + \text{diva}_1 \cdot \mathcal{U}), \\ \nabla \mathbf{a}_1 &= \nu \mathbf{a}_2^2 \times \mathcal{G} \nabla \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 (\text{rota}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \text{diva}_1 \cdot \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{f} &= \text{rota}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \text{diva}_1 \cdot \mathcal{J} \mathbf{a}_1 = \text{rota}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \text{rota}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \\ &= -\text{Rota}_1 \times \mathbf{a}_2 + \text{Rota}_2 \times \mathbf{a}_1. \end{aligned}$$

Le vecteur \mathbf{f} a d'autres propriétés remarquables ; en effet, si l'on pose

$$(38) \quad \mathbf{a}_1 = e^{j\alpha} \mathbf{e}_1,$$

$$(39) \quad \begin{aligned} \nabla \mathbf{a}_1 &= \mathcal{J} e^{j\alpha} \mathbf{e}_1 \nabla \alpha - \mathcal{J} \mathbf{a}_1 \nabla \alpha = \mathbf{a}_2 \nabla \alpha, \\ \mathbf{f} &= \nabla \alpha \quad \text{grad} \alpha. \end{aligned}$$

En outre, le vecteur \mathbf{f} est le même pour tout vecteur unitaire \mathbf{b} , faisant un angle constant avec \mathbf{a}_1 .

Quant à la propriété de $\nabla \mathbf{a}_1$ d'être une dyade, elle n'est pas particulière aux vecteurs unitaires ; soit, en effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nu \mathbf{a}_1, \\ \nabla \mathbf{v} &= \nu \nabla \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \nabla \nu - \nu \mathbf{a}_2 \nabla \alpha + \mathbf{a}_1 \nabla \nu, \end{aligned}$$

\mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 étant des vecteurs différents, la condition nécessaire et suffisante pour que $\nabla \mathbf{v}$ soit une dyade est

$$[\nabla \alpha, \nabla \nu] = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} v &= F(\alpha), & \nabla v &= F'(\alpha) \nabla \alpha, \\ \nabla v &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} \nabla \alpha, \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{v} = F(\alpha) \mathbf{a}_1 = \mathbf{v}(\alpha),$$

donc la longueur du vecteur \mathbf{v} doit être fonction seulement de son inclinaison ⁽¹⁾; c'est évidemment une propriété qu'a tout vecteur de longueur constante, mais qu'il était bon de rappeler. En outre, la formule (39) montre que

$$\mathbf{a}_2 = \nabla \mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \alpha} \quad (2).$$

D'autres vecteurs importants sont rattachés à \mathbf{a}_1 ; l'équation (36) entraîne

$$\nabla \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = \nabla \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = \nabla \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = \text{Rota}_1 \times \mathbf{a}_1$$

soit différentes formes du vecteur qui représente la dérivée de \mathbf{a}_1 dans sa propre direction.

Supposons en particulier que les variables u_1, u_2 soient les coordonnées (curvilignes en général) d'un vecteur \mathbf{m} d'origine fixe et considérons *une courbe* décrite par l'extrémité de ce vecteur, \mathbf{a}_1 étant le vecteur unitaire porté par la tangente à cette courbe dans le sens des arcs croissants; modifions un peu les notations en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = \mathbf{t} &= \frac{d\mathbf{m}}{ds}, & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{p} \quad [\text{normale principale } (3)], \\ \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \nabla \mathbf{t} \times \mathbf{t} = \text{Rota} \times \mathbf{t} = \mathbf{p} \mathbf{f} \times \mathbf{t} = \mathbf{p} \nabla z \times \frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \mathbf{p} = \frac{1}{\rho} \mathbf{p} \end{aligned}$$

est alors le vecteur de courbure \mathbf{k} de cette courbe et

$$(40) \quad \text{rota} = -\text{div} \mathbf{p} = \mathbf{t} \times \mathbf{f} = -[\mathbf{p} \mathbf{f}] = \frac{1}{\rho}$$

est la courbure. Soit plus généralement sur la courbe un vecteur vitesse \mathbf{v} [sur la courbe les paramètres s, α, t (temps) sont fonctions

(1) C'est à dire que \mathbf{v} ne dépend que d'un paramètre: $(\nabla \mathbf{v})^{(2)} = 0$ traduit la propriété connue du déterminant fonctionnel.

(2) Cette opération de dérivation angulaire ne s'applique chez M. H. Neville (M. F.) qu'aux vecteurs soumis à un noyau géométrique et non à ceux qui constituent ce noyau.

(3) Nous adoptons la convention de M. H. Neville (M. F.), d'après laquelle le rayon de courbure et la courbure d'une courbe plane ou gauche sont des mesures algébriques suivant la normale principale, orientée à volonté.

l'un de l'autre],

$$(41) \quad \mathbf{v} = v(\alpha)\mathbf{t},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \nabla\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{p} + \frac{dv}{dt} \mathbf{t}$$

est le vecteur accélération; mais ces considérations demandent à être étendues à des familles de courbes et des champs de vecteurs, ce que nous ferons plus loin.

Si l'on tient compte de

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0,$$

après dérivation, on voit qu'on peut donner à \mathbf{f} les formes

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_2 \times \nabla\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \times \nabla\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\rho} (\mathbf{a}_2 \times \nabla\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \times \nabla\mathbf{a}_2),$$

mais on a aussi évidemment, puisque

$$\nabla\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \mathbf{f}, \quad \nabla\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{f},$$

$$\mathbf{f} = \nabla\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 - \nabla\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1,$$

formule qui prend une signification remarquable pour les champs de vecteurs quand on introduit les transformations infinitésimales

$$(42) \quad \mathfrak{C}_1 \mathbf{m} = \mathbf{a}_1, \quad \mathfrak{C}_2 \mathbf{m} = \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{f} = (\mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_1) \mathbf{m}.$$

Enfin le vecteur $\mathbf{g} = \mathcal{J}\mathbf{f}$ formant similitrepère avec le premier jouera aussi un rôle important dans la suite :

$$(42') \quad \mathbf{g} = \nabla\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 - \nabla\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1 = \text{Rota}_1 \times \mathbf{a}_2 - \text{Rota}_2 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2,$$

$$\mathbf{g} = \text{rota}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - \text{rota}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \text{rota}_1 \cdot \mathcal{J}\mathbf{a}_1 - \text{diva}_1 \cdot \mathbf{a}_1,$$

\mathbf{g}_1 et \mathbf{g}_2 étant les vecteurs de courbure des courbes dont \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 sont les tangentes unitaires. Nous aurons à revenir sur ce sujet et lui donner d'amples développements.

18. Nous résumons ici ce qui concerne les équations différentielles de Pfaff au point de vue des transformations infinitésimales, les notations employées permettant un exposé concis et concret de la question. Soit

$$(43) \quad \omega = \mathbf{b} \times d\mathbf{m} = \mathcal{J}\mathbf{a} \times d\mathbf{m} = [\mathbf{a} \cdot d\mathbf{m}] = [\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot d\mathbf{m}] = 0$$

une équation de Pfaff dont les courbes intégrales forment la famille

$$f(u_1, u_2) = \text{const.}$$

d'équation différentielle

$$df = \nabla f \times d\mathbf{m} = 0.$$

On a donc aussi

$$(44) \quad \mathcal{E}f = \nabla f \times \mathcal{E}\mathbf{m} = 0.$$

c'est-à-dire que la fonction f est invariante pour la transformation \mathcal{E} , qui conserve individuellement les intégrales de l'équation donnée. D'ailleurs, si F est une fonction arbitraire de f , d'après

$$\nabla F = F'(f) \cdot \nabla f,$$

la fonction F est également invariante pour la transformation \mathcal{E} définie par l'équation différentielle, et dont les courbes intégrales sont les caractéristiques ou trajectoires.

Les courbes intégrales de (43) sont conservées dans leur ensemble, mais échangées entre elles par une transformation infinitésimale \mathcal{E} si

$$(45) \quad \mathcal{E}f = \nabla f \times \mathcal{E}\mathbf{m} - F(f),$$

fonction arbitraire de f .

On vérifie aussitôt qu'alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}\mathcal{E})f &= \mathcal{E}F - \mathcal{E}\mathcal{E}f = 0, \\ \nabla f \times (\mathcal{E}\mathcal{E})\mathbf{m} &= 0, \end{aligned}$$

d'où, par comparaison avec (44),

$$(46) \quad \begin{aligned} |(\mathcal{E}\mathcal{E})\mathbf{m} \cdot \mathcal{E}\mathbf{m}| &= 0, \\ (\mathcal{E}\mathcal{E})\mathbf{m} &= \lambda(u_1, u_2)\mathcal{E}\mathbf{m}, \end{aligned}$$

λ étant une fonction arbitraire des variables. C'est la condition pour que l'équation (43) admette la transformation infinitésimale \mathcal{E} ; elle admet évidemment, dans ces conditions, la transformation \mathcal{E} , mais celle-ci est alors caduque pour elle, de même que ses multiples $\mu\mathcal{E}$. Quant à la transformation \mathcal{E} , sa connaissance donne un facteur intégrant, aussi nous pourrions dire que $\mathcal{E}\mathbf{m} = \mathbf{u}$ constitue un *vecteur intégrant* de l'équation (43). En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \nabla f &= \rho(u_1, u_2)\mathcal{E}\mathbf{m}, \\ \nabla f \times \mathcal{E}\mathbf{m} &= \rho[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{E}\mathbf{m}] = F(f). \end{aligned}$$

Donc

$$\nabla f = \frac{F(f)}{[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{E}\mathbf{m}]} \mathcal{E}\mathbf{m}$$

est le gradient d'une fonction intégrale f ; le facteur intégrant essentiel est

$$(47) \quad [\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{C}\mathbf{m}] = \frac{1}{[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}]} = \frac{1}{\mathbf{b} \times \mathbf{u}}.$$

Si l'équation (43) admet une nouvelle transformation infinitésimale définie par $\mathcal{C}'\mathbf{m} = \mathbf{u}'$, on a également

$$\rho[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{C}'\mathbf{m}] = G(f),$$

fonction arbitraire de f ,

$$\begin{aligned} G[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{C}\mathbf{m}] &= F[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{C}'\mathbf{m}], \\ [\mathcal{E}\mathbf{m}(G\mathcal{C}\mathbf{m} - F\mathcal{C}'\mathbf{m})] &= 0, \end{aligned}$$

ce qui indique entre les vecteurs $\mathcal{E}\mathbf{m}$, $\mathcal{C}\mathbf{m}$, $\mathcal{C}'\mathbf{m}$ une relation de la forme

$$(48) \quad G(f)\mathcal{C}\mathbf{m} - F(f)\mathcal{C}'\mathbf{m} + v(u_1, u_2)\mathcal{E}\mathbf{m} = 0$$

et donne l'intégrale

$$(49) \quad \frac{G(f)}{F(f)} = \frac{[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{C}'\mathbf{m}]}{[\mathcal{E}\mathbf{m} \cdot \mathcal{C}\mathbf{m}]} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{u}'}{\mathbf{b} \times \mathbf{u}} = \text{const.}$$



CHAPITRE II.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE EUCLIDIENNE DES COURBES ET SURFACES.

I. — Le déplacement général du repère mobile.

19. Nous nous plaçons ici dans l'espace euclidien E_3 à trois dimensions, soumis aux opérations du groupe fondamental G , indiqué au paragraphe 9, et utilisons les repères normaux congruents que nous avons choisis pour ce cas. Mais nous établirons d'abord les formules relatives au groupe plus étendu G_{np} du paragraphe 2. L'unité scalaire U^1 étant invariante par les opérations de ce groupe pourra encore être remplacée par 1, et la distinction entre plans et copoints disparaîtra.

Considérons un repère fixe e_0, e_1, e_2, e_3 et un repère mobile a_0, a_1, a_2, a_3 doué de la liberté la plus grande possible, c'est-à-dire dépendant primitivement de 15 paramètres; soient a un élément arbitraire (point ou vecteur), invariablement lié au repère mobile, e l'élément homologue du repère fixe; si \mathcal{C} est la transformation de G_{np} amenant le repère fixe en coïncidence avec le repère mobile,

$$a = \mathcal{C} e, \quad e = \mathcal{C}^{-1} a.$$

Pour un déplacement infinitésimal du repère mobile,

$$d a = d \mathcal{C} e = d \mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} a.$$

Posons

$$\begin{aligned} d \mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{K}_d = \mathcal{K}, \\ d a &= \mathcal{K}_d a. \end{aligned}$$

L'action de l'opérateur différentiel d , agissant sur a , peut donc être remplacée par celle de l'homographie \mathcal{K} ; en vertu des propriétés du symbole d , son action sur un tenseur exprimé au moyen des éléments contrevariants pourra de même être remplacée par celle d'un tenseur approprié, fonction linéaire de \mathcal{K}_d , dont nous allons voir l'expression dans quelques cas.

Pour un élément covariant (plan) $\mathbf{B} = [b_1, b_2, b_3]$, on a

$$d \mathbf{B} = [(\mathcal{K} b_1) b_2 b_3] + [b_1 (\mathcal{K} b_2) b_3] + [b_1 b_2 (\mathcal{K} b_3)] - 3[\mathcal{K} \mathcal{K} U^{(2)}] \mathbf{B},$$

ou, d'après (7),

$$d\mathbf{B} - \mathcal{X}^* \mathbf{B} = \mathbf{I}_1 \mathcal{X} \cdot \mathbf{B} - \overline{\mathcal{X}} \mathbf{B}.$$

Mais \mathcal{G} étant unimodulaire,

$$\mathcal{G}^{[3]} = \mathbf{I};$$

donc, par différentiation,

$$\{[d\mathcal{G} \cdot \mathcal{G}^{[3]}] - \{[(d\mathcal{G} \cdot \mathcal{G}^{-1})(\mathcal{G} \mathcal{G}^{-1})^{[3]}]\} = \{[\mathcal{X}\mathcal{U}^{[3]}] = \mathbf{I}_1 \mathcal{X} = \mathbf{0},$$

et il reste seulement

$$d\mathbf{B} = -\overline{\mathcal{X}} \mathbf{B}.$$

Pour une homographie $\mathcal{E} = \mathbf{a}\mathbf{B}$ schématiquement,

$$d\mathcal{E} = \mathcal{X} \mathbf{a}\mathbf{B} - \mathbf{a} \overline{\mathcal{X}} \mathbf{B} = \mathcal{X}\mathcal{E} - \mathcal{E}\overline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}\mathcal{E}).$$

Les réciprocités donneraient des formules analogues. Pour un scalaire

$$m = [\mathbf{B}\mathbf{a}] = \mathbf{a}! \mathbf{B}.$$

on vérifie aussitôt

$$dm = \mathcal{X} \mathbf{a}! \mathbf{B} - \mathbf{a}! \overline{\mathcal{X}} \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Il s'agit dans les formules précédentes de tenseurs fixes par rapport au repère mobile; pour un tenseur variable par rapport à ce repère, c'est-à-dire dont les coefficients par rapport aux tenseurs de même espèce formés avec les éléments du repère mobile sont variables, la différentielle comprend deux parties : la première, que nous indiquerons par l'indice ω , provient de la différentiation des coefficients et est donc une différentielle relative au repère; la seconde est celle qui a été précédemment calculée en considérant les coefficients comme constants. Nous aurons donc

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{u} = d_\omega \mathbf{u} + \mathcal{X} \mathbf{u}, \\ d\mathbf{W} = d_\omega \mathbf{W} - \overline{\mathcal{X}} \mathbf{W}, \\ d\mathcal{Y} = d_\omega \mathcal{Y} - (\mathcal{X}\mathcal{Y}), \\ d\varphi = d_\omega \varphi, \end{array} \right.$$

\mathbf{u} , \mathbf{W} , \mathcal{Y} , φ étant des point, plan, homographie, scalaire, à coefficients variables (en général) par rapport au repère mobile.

20. Tout élément mobile \mathbf{u} peut encore être déduit d'un élément fixe \mathbf{a} du repère mobile par une homographie arbitraire \mathcal{Y} qui ne serait définie que par la donnée de quatre paires d'éléments homologues. La formule

$$\mathbf{u} = \mathcal{Y}\mathbf{a}$$

donne par différentiation des relations en accord avec les précédentes.

Portons notre attention sur le cas où l'homographie \mathcal{Y} appartient elle aussi au groupe (i, p) ; modifions un peu les notations en posant pour un instant (\mathcal{C} pour \mathcal{C}_j , α pour \mathcal{H}),

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \mathcal{C} \mathbf{e}_i, & (i = 0, 1, 2, 3), \\ \mathbf{b}_i &= \mathcal{B} \mathbf{e}_i = \mathcal{C} \mathbf{a}_i, \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \mathcal{C}.$$

Les \mathbf{b}_i comme les \mathbf{a}_i constituent des repères mobiles par rapport au repère fixe \mathbf{e}_i , et l'homographie \mathcal{C} traduit le mouvement de \mathbf{b}_i par rapport à \mathbf{a}_i . Par différentiation,

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_i &= d\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} \mathbf{a}_i = \alpha \mathbf{a}_i, \\ d\mathbf{b}_i &= d\mathcal{B} \cdot \mathcal{B}^{-1} \mathbf{b}_i = \beta \mathbf{b}_i. \end{aligned}$$

Comme on a aussi

$$d\mathbf{b}_i = d\mathcal{C} \cdot \mathbf{a}_i + \mathcal{C} d\mathbf{a}_i = (d\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} + \mathcal{C} \alpha \mathcal{C}^{-1}) \mathbf{b}_i,$$

en posant

$$(51) \quad \begin{aligned} d\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} &= \gamma, \\ \beta &= \mathcal{C} \alpha \mathcal{C}^{-1} + \gamma. \end{aligned}$$

A cause de la présence de γ au second membre, cette formule montre que β n'est pas en général la transformée de α par \mathcal{C} , donc que α , liée au repère \mathbf{a}_i , ne varie pas de façon comitante avec ce repère. En outre,

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= d_\omega \mathcal{C} - (\alpha \mathcal{C}), \\ d\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} &= d_\omega \mathcal{C} \cdot \mathcal{C}^{-1} + \alpha - \mathcal{C} \alpha \mathcal{C}^{-1}, \\ \gamma &= \gamma_\omega + \alpha - \mathcal{C} \alpha \mathcal{C}^{-1}, \end{aligned}$$

et par suite,

$$(52) \quad \beta = \mathcal{C} \alpha \mathcal{C}^{-1} + \gamma = \gamma_\omega + \alpha.$$

Si l'on a ainsi une suite de repères en déplacements successifs chacun par rapport au précédent, jusqu'à

$$d\mathbf{l}_i = \lambda \mathbf{l}_i, \quad \lambda = d\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}$$

on aura

$$(53) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= \dots \mathcal{E} \mathcal{C} \mathcal{A}, \\ \lambda &= \dots + \varepsilon_\sigma + \gamma_\omega + \alpha, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_\sigma = d_\sigma \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^{-1}$ est la différentielle relative au repère \mathbf{b}_i précédent,

et ainsi de suite. Cette formule n'est autre que celle de composition des mouvements d'entraînement (à l'intérieur de G_{np}). Si le repère \mathbf{a}_i est caractérisé par rapport au repère fixe \mathbf{e}_i par des paramètres dont les différentielles introduisent des formes de Pfaff ω , le repère \mathbf{b}_i par des paramètres introduisant des formes ϖ , la formule (52) donne les ϖ en fonction des ω et des différentielles caractérisant les déplacements relatifs; de même pour la formule générale (53).

21. Revenons aux notations du paragraphe 19 et considérons en particulier la combinaison

$$\mathcal{X}' - \delta\mathcal{X}_d - d\mathcal{X}_\delta.$$

Posons de même

$$\mathcal{X}'_\omega = \delta_\omega\mathcal{X}_d - d_\omega\mathcal{X}_\delta.$$

Il résulte des formules (50)

$$(54) \quad \mathcal{X}' = \mathcal{X}'_\omega - (\mathcal{X}_\delta\mathcal{X}_d) - (\mathcal{X}_d\mathcal{X}_\delta) = \mathcal{X}'_\omega + \mathfrak{a}(\mathcal{X}_\delta\mathcal{X}_d).$$

Or, pour un élément fixe \mathbf{a} du repère \mathbf{a}_i ,

$$\begin{aligned} (d\mathbf{a})' &= \delta d\mathbf{a} - d\delta\mathbf{a} = \delta(\mathcal{X}_d\mathbf{a}) - d(\mathcal{X}_\delta\mathbf{a}) \\ &= (\delta\mathcal{X}_d - d\mathcal{X}_\delta - \mathcal{X}_d\mathcal{X}_\delta + \mathcal{X}_\delta\mathcal{X}_d)\mathbf{a} = (\mathcal{X}' - (\mathcal{X}_\delta\mathcal{X}_d))\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Mais $(d\mathbf{a})' = 0$, les symboles d et δ étant échangeables, donc

$$(55) \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}' - (\mathcal{X}_\delta\mathcal{X}_d) = \mathcal{X}'_\omega - (\mathcal{X}_\delta\mathcal{X}_d) = 0,$$

formule sur laquelle nous reviendrons.

22. Nous n'avons jusqu'ici tenu compte que des propriétés des transformations ξ_j du groupe G_{np} : pour passer aux transformations de G_r , nous devons faire intervenir l'infini et l'absolu, c'est-à-dire traduire la conservation du plan de l'infini et de la polarité absolue (ombilicale) par les transformations du groupe, soit

$$d\mathbf{V} = 0, \quad d\mathcal{Q} = 0.$$

Nous pouvons tenir compte de ces relations en utilisant le fait que G_r est le groupe des déplacements euclidiens. Comme on le sait, toute transformation infinitésimale de ce groupe est une combinaison linéaire des symboles des transformations infinitésimales génératrices du groupe

qui n'est plus qu'à 6 paramètres. Si nous rapportons au repère mobile ces six transformations, nous pourrions poser

$$(56) \quad \begin{cases} \alpha_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{A}_0 & \mathbf{a}_1 \mathbf{V}, & \alpha_2^2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{A}_3 = -\alpha_2^2, \\ \alpha_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{A}_0 & \mathbf{a}_2 \mathbf{V}, & \alpha_1^1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{A}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{A}_1 = -\alpha_1^1, \\ \alpha_3 & \mathbf{a}_3 \mathbf{A}_0 - \mathbf{a}_3 \mathbf{V}, & & \alpha_3^3 & \mathbf{a}_2 \mathbf{A}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{A}_2 = -\alpha_3^3, \end{cases}$$

de sorte que les α_i engendrent le groupe des translations, les α_i^j celui des rotations autour de \mathbf{a}_0 . Les formules de composition par parenthèse de ces transformations, ou formules de structure du groupe, sont

$$(57) \quad \begin{cases} (\alpha_i, \alpha_j) - (\alpha_i^k \alpha_j^k) = 0 & (i, j, k = 1, 2, 3), (k \neq i, j), \\ (\alpha_i^j \alpha_j^i) - \alpha_i, \\ (\alpha_i^j \alpha_j^i) = \alpha_i^j. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(58) \quad \mathcal{H} = \omega^1 \alpha_1 + \omega^2 \alpha_2 + \omega^3 \alpha_3 + \omega_2^1 \alpha_1^2 + \omega_1^2 \alpha_2^1 + \omega_1^3 \alpha_3^1,$$

les ω^i et les ω_j^i étant des formes de Pfaff, ou pour simplifier l'écriture,

$$(58') \quad \mathcal{H} = \sum_1^6 \omega^i \alpha_i$$

avec

$$\alpha_3^2 = \alpha_{11}, \quad \alpha_1^2 = \alpha_{22}, \quad \alpha_2^1 = \alpha_{33},$$

et de même pour les ω , on aura

$$(59) \quad \begin{cases} \mathcal{H}'_m = \sum_1^6 (\omega^i)' \alpha_i, \\ (\mathcal{H}'_2 \mathcal{H}'_1) - \sum_1^{12} [\omega^i \omega^j] (\alpha_i, \alpha_j) = \sum_1^{15} \left([\omega^i \omega^j] \sum_k c_{ijk} \alpha_k \right), \end{cases}$$

les c_{ijk} étant les coefficients de structure du groupe G_6 .

La formule (58) montre que \mathcal{H} est un symbole *infinitésimal* caractérisant le groupe des déplacements euclidiens; ce symbole diffère des symboles de transformations infinitésimales génératrices de groupes à un paramètre, en ce sens que les différentielles γ sont incorporées; la même formule met en évidence dans \mathcal{H} les deux parties relatives au groupe des translations et au groupe des rotations autour de \mathbf{a}_0 . Nous allons reprendre une décomposition analogue pour arriver à des formules uniquement vectorielles.

23. Considérons pour cela le déplacement \mathcal{G} comme résultant d'une rotation autour de \mathbf{e}_0 , suivie de la translation de \mathbf{e}_0 en \mathbf{a}_0 ; soit $\mathbf{e}_0 \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3$ la position prise par le repère après la rotation

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{j}_2 = \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{j}_3 = \mathbf{a}_3.$$

La rotation et la translation ont respectivement pour noyaux

$$\mathcal{R} = \sum_1^3 \mathbf{j}_i \mathbf{E}_i - \mathbf{e}_0 \mathbf{V},$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{U} - (\mathbf{a}_0 - \mathbf{e}_0) \mathbf{V}.$$

La relation

$$\mathcal{G} = \mathcal{T} \mathcal{R}$$

donne par différentiation

$$\mathcal{H} = d\mathcal{G} \cdot \mathcal{G}^{-1} = d\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^{-1} - \mathcal{T} (d\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^{-1}) \mathcal{T}^{-1}.$$

Tout point \mathbf{p} , de masse unité, peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{u},$$

où \mathbf{u} étant un vecteur quelconque que nous supposons ici fixe dans le repère mobile. Or

$$\mathcal{L}_d = d\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^{-1} = d\mathcal{T} = d\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathcal{A}_d = \mathcal{T} (d\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^{-1}) \mathcal{T}^{-1} = d\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^{-1} \mathcal{T}^{-1} = \sum_1^3 d\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_i^{-1} \mathcal{U} - (\mathbf{a}_0 - \mathbf{e}_0) \mathbf{V}^{-1},$$

$$\mathcal{A}_d = \sum_1^3 d\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{A}_i.$$

d'où

$$\mathcal{L}_d \mathbf{a}_0 = d\mathbf{a}_0, \quad \mathcal{L}_d \mathbf{u} = 0,$$

$$\mathcal{A}_d \mathbf{a}_0 = 0, \quad \mathcal{A}_d \mathbf{u} = d\mathbf{u}.$$

Dans

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} - \mathcal{A}$$

seule la première partie \mathcal{L} agit sur le point \mathbf{a}_0 , seule la seconde partie \mathcal{A} agit sur un vecteur \mathbf{u} .

\mathcal{H} étant ainsi séparé en deux composantes, on voit que

$$\mathcal{H}_\omega = \mathcal{L}_\omega - \mathcal{A}_\omega,$$

$$\left(\mathcal{H}_\delta \mathcal{H}_d \right) = \left(\mathcal{L}_\delta \mathcal{L}_d \right) + \left(\mathcal{L}_\delta \mathcal{A}_d \right) - \left(\mathcal{A}_\delta \mathcal{L}_d \right) - \left(\mathcal{A}_\delta \mathcal{A}_d \right)$$

ou

$$(60) \quad \left\{ \mathcal{H} \mathcal{H} \right\} = \left\{ \mathcal{L} \mathcal{L} \right\} - \left\{ \mathcal{A} \mathcal{A} \right\}$$

en posant, d'une manière générale,

$$(61) \quad \gamma \{ \mathcal{X}\mathcal{Y} \} = (\mathcal{X}_\delta \mathcal{Y}_d) \cdot (\mathcal{Y}_\delta \mathcal{X}_d), \quad \{ \mathcal{X}\mathcal{X} \} = (\mathcal{X}_\delta \mathcal{X}_d),$$

groupement symétrique pour \mathcal{X} et \mathcal{Y} , alterné pour d et δ ; puis en tenant compte de $(\mathcal{L}'_\delta \mathcal{L}'_d) = 0$.

Par suite, les formules (55) relatives au tenseur de courbure \mathcal{K} , nul dans l'espace euclidien, mettent en évidence les tenseurs, également nuls, de courbure de translation (ou torsion), et courbure de rotation

$$(62) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_1 = \mathcal{L}' = \mathcal{L}'_0 & \gamma \{ \mathcal{L}'\mathcal{L}' \} = 0. \\ \mathcal{K}_R = \mathcal{L}' - \gamma \{ \mathcal{L}'\mathcal{L}' \} - \{ \mathcal{L}'\mathcal{L}' \} - \mathcal{L}'_0 - \{ \mathcal{L}'\mathcal{L}' \} = 0. \end{cases}$$

Mais on peut maintenant ramener les opérations sur les points à des opérations sur les vecteurs et l'étude de la géométrie (différentielle) euclidienne à celle de la géométrie vectorielle. On peut, en effet, représenter la première composante \mathcal{L}' par le vecteur $d\mathbf{a}_0$ et substituer à la seconde composante \mathcal{L}' son isomorphe \mathcal{L}'_V de l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}'_V = \sum_1^i d\mathbf{a}_i \cdot \alpha_i.$$

En substituant de même à la rotation \mathcal{R} sa correspondante vectorielle

$$\mathcal{R}_V = \sum_1^i \mathbf{a}_i \varepsilon_i,$$

on voit immédiatement que l'on a

$$\mathcal{L}'_V = d\mathcal{R}_V \cdot \mathcal{R}_V^{-1}.$$

24. Nous utiliserons désormais uniquement les formules relatives à l'espace vectoriel métrique, aussi nous supprimerons l'indice V employé précédemment; mais nous ferons la réserve que le point n'intervenant plus, mais seulement ses différentielles qui sont des vecteurs, cette simplification nous prive des formules relatives aux droites et plans (représentés par les bivecteurs et trivecteurs glissants) et d'analogies avec les géométries projective et conforme; il sera d'ailleurs facile de revenir aussitôt aux formules de l'espace euclidien. En outre, pour simplifier les notations, nous utiliserons de nouveau l'identification des éléments covariants et contravariants, et, en conséquence, n'emploierons plus d'indices supérieurs.

Devant faire jouer un rôle primordial à l'origine du repère mobile, nous désignerons par \mathbf{m} cette origine, par \mathbf{o} celle du repère fixe. Rappelons alors les notations : repère fixe $\mathbf{o}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, repère mobile $\mathbf{m}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$; polarité fondamentale \mathcal{P} et homographie identique \mathcal{U} avec le noyau intérieur

$$\mathcal{P} = \mathcal{U} = \sum \mathbf{e}_i^2 = \sum \mathbf{a}_i^2.$$

L'homographie fondamentale caractérisant la rotation du repère mobile est

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \omega_{23}\mathcal{C}_{23}, \quad \omega_{31}\mathcal{C}_{31}, \quad \omega_{12}\mathcal{C}_{12} - \sum \omega_{ij}\mathcal{C}_{ji}, \\ \mathcal{C}_{ji} &= \mathbf{a}_j\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j, \end{aligned}$$

et les formules de déplacement de ce repère sont

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{m} - \sum_i \omega_i \mathbf{a}_i, \\ d\mathbf{a}_i - \sum_j \omega_{ij} \mathbf{a}_j = \mathcal{C} \mathbf{a}_i. \end{aligned} \right.$$

La propriété de la rotation finie \mathcal{R}

$$\mathcal{R} \mathcal{K} \mathcal{R} = \mathcal{U}$$

donne par différentiation la relation connue

$$\mathcal{C} \mathcal{K} \mathcal{C} = \mathbf{o} \quad \text{ou} \quad \omega_{ij} - \dot{\omega}_{ji} = \mathbf{o},$$

c'est-à-dire que l'homographie \mathcal{C} est alternée; on peut lui donner la forme

$$\mathcal{C} = \sum d\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = - \sum \mathbf{a}_i d\mathbf{a}_i - \sum \overline{d\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}$$

et la représenter par un bivecteur, ou le vecteur réciproque (rotation).

Les formules de courbure sont

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} (d\mathbf{m})' &= \sum_i \Omega_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o}, \\ (d\mathbf{a}_i)' &= \sum_j \Omega_{ij} \mathbf{a}_j = \mathcal{K} \mathcal{R} \mathbf{a}_i = \mathbf{o}, \end{aligned} \right.$$

soit, pour la translation,

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} (d\mathbf{m})' &= (d\mathbf{m})'_o - \mathcal{C} \delta d\mathbf{m} - \mathcal{C}_d \delta \mathbf{m} = \mathbf{o}, \\ \Omega_i &= \omega'_i - \sum_j [\omega_i, \omega_j] = \mathbf{o}, \end{aligned} \right.$$

et pour la rotation, par l'intermédiaire du tenseur \mathcal{K}_R ,

$$(65') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_R - \Sigma \Omega_{ij} \alpha_{ij}, \\ \mathcal{K}_R - \alpha' - \left\{ \alpha \alpha \right\} = \alpha'_m \quad \left\{ \alpha \alpha \right\} = 0, \\ \Omega_{ij} - \omega'_{ij} - \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] = 0. \end{array} \right.$$

On peut aussi écrire, pour un vecteur \mathbf{u} quelconque,

$$(\mathbf{d}\mathbf{u})' = (\mathbf{d}_\omega \mathbf{u})'_\omega \quad \mathcal{K} \mathbf{u}.$$

chacun des termes de l'équation étant nul.

II. — Formules relatives au déplacement à un paramètre.

25. Le déplacement du repère mobile est supposé défini par celui de son origine, qui décrit une courbe (ou une droite). Le cas est bien connu et nous nous contenterons de rappeler qu'on peut particulariser le repère en celui de Serret-Frenet \mathbf{mtpb} (\mathbf{t} tangente à la trajectoire, \mathbf{p} normale principale, \mathbf{b} binormale); le paramètre choisi étant l'arc de courbe, nous écrivons les équations

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}\mathbf{m} = \quad \mathbf{d}s \mathbf{t} \quad . \\ \mathbf{d}\mathbf{t} = \quad . \quad \frac{\mathbf{d}s}{\rho} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{d}s}{\rho} \mathbf{t} \quad . \quad + \frac{\mathbf{d}s}{\tau} \mathbf{b}, \\ \mathbf{d}\mathbf{b} = \quad . \quad - \frac{\mathbf{d}s}{\tau} \mathbf{p} \quad . \end{array} \right.$$

Les particularisations successives imposées au repère ont été, d'abord

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{t} \quad \text{ou} \quad \omega_1 = \mathbf{d}s, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

et les conséquences en résultant par différentiation extérieure : c'est la particularisation *fondamentale* qui fixe la connexion; puis

$$\mathbf{b} \times \mathbf{d}\mathbf{t} = \omega_{13} = 0,$$

particularisation *principale* (ou *osculatrice*); d'où

$$\omega_{12} = \frac{\mathbf{d}s}{\rho}, \quad \omega_{23} = \frac{\mathbf{d}s}{\tau},$$

$\frac{1}{\rho} = \kappa$ et $\frac{1}{\tau} = \eta$, courbure et torsion linéaires, étant les invariants de la

courbe et pouvant être des fonctions arbitraires de s ; l'homographie de la rotation a pour expression

$$(67) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{ds}{\tau} \alpha_{31} + \frac{ds}{\rho} \alpha_{11} - \frac{ds}{\rho} (\mathbf{pt} - \mathbf{tp}) - \frac{ds}{\tau} (\mathbf{bp} - \mathbf{pb}) \\ \alpha = \rho (\overline{dt.t} - \overline{db.b}) - \rho \overline{dp.p}, \end{cases}$$

la dernière forme mettant en évidence la rotation autour de la droite rectifiante (Lancret).

(On a encore, les accents indiquant les dérivées par rapport à l'arc,

$$(66') \quad \begin{cases} \mathbf{m}' - \mathbf{t} \\ \mathbf{m}'' - \mathbf{t}' - \mathbf{x}\mathbf{p} \\ \mathbf{m}''' - \mathbf{t}'' - \mathbf{x}^2\mathbf{t} \quad \mathbf{x}'\mathbf{p} \quad \mathbf{x}\mathbf{t}\mathbf{b}. \\ \mathbf{m}^{\text{iv}} - \mathbf{t}''' = -3\mathbf{x}'\mathbf{x}\mathbf{t} \quad (\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'^2 - \mathbf{x}\mathbf{t}^2)\mathbf{p} + (\rho\mathbf{x}'\mathbf{t}_1 + \mathbf{x}\mathbf{t}_1')\mathbf{b}, \end{cases}$$

d'où l'équation différentielle (¹)

$$(68) \quad \mathbf{x}^2\mathbf{t}_1\mathbf{m}^{\text{iv}} - (\rho\mathbf{x}'\mathbf{x}\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}^2\mathbf{t}_1')\mathbf{m}''' \\ - (\mathbf{x}''\mathbf{x}\mathbf{t}_1 - \rho\mathbf{x}'^2\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}'\mathbf{x}\mathbf{t}_1' - \mathbf{x}^2\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}^2\mathbf{t}_1^2)\mathbf{m}'' + (\mathbf{x}'\mathbf{x}^3\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}^4\mathbf{t}_1')\mathbf{m}' = 0,$$

qui se réduit à

$$(68') \quad \mathbf{x}\mathbf{m}''' - \mathbf{x}'\mathbf{m}'' - \mathbf{x}^2\mathbf{m}' = 0$$

(en annulant le coefficient de $\mathbf{x}\mathbf{t}'$ dans l'équation générale) pour les courbes planes.

Les conditions de contact local de deux courbes, résultant des formules (66) ou (66') sont connues; on peut amener deux courbes à un contact du premier ordre en un point quelconque; ce contact s'élève à l'ordre n si les valeurs de ρ et de ses $n - 2$ premières dérivées ($n \geq 2$), de τ et de ses $n - 3$ premières dérivées ($n \geq 3$), sont égales au point considéré. Pour les contacts d'ordres 1, 2, 3, on peut ainsi substituer à la courbe sa tangente, son cercle de courbure, une hélice osculatrice (par exemple, cylindro-conique ou sphérique).

L'applicabilité sans déformation de deux courbes peut être considérée comme la possibilité d'un contact prolongé; pour deux courbes, l'applicabilité du premier ordre est toujours possible; celle du second ordre l'est si pour chacune ρ est la même fonction de s ; celle du troisième ordre a lieu si ρ et τ sont respectivement les mêmes fonctions de s : les

(¹) Les solutions \mathbf{m} de l'équation (68) doivent satisfaire à $\mathbf{m}'^2 - \mathbf{t}^2 = 1$.

deux courbes sont alors égales, avec les mêmes équations naturelles, ou la même équation différentielle (68).

La connexion induite d'une courbe, considérée comme espace à une dimension, résulte d'une projection orthogonale sur la tangente; elle fournit les formules

$$(69) \quad \begin{cases} d_c \mathbf{m} = d s \mathbf{t}, \\ d_c \mathbf{t} = 0. \end{cases}$$

Par suite, deux courbes quelconques sont isomorphes (applicables avec déformation).

On pourrait aussi considérer une projection orthogonale sur le plan osculateur

$$(69') \quad \begin{cases} \delta_c \mathbf{m} = d s \mathbf{t} . \\ \delta_c \mathbf{t} = \frac{d s}{\rho} \mathbf{p} \\ \delta_c \mathbf{p} = - \frac{d s}{\rho} \mathbf{t} . \end{cases}$$

Les formules (69) font correspondre à la courbe donnée sa *rectifiée*, les formules (69') son *aplanie*, la correspondance étant réalisée, dans le premier cas, sur la développable décrite par les tangentes à la courbe, au moyen des trajectoires orthogonales des génératrices: dans le second cas, par les trajectoires orthogonales du plan osculateur issues des points de la courbe: l'applicabilité du premier ou du deuxième ordre correspond alors à l'égalité des rectifiées ou des aplanies de deux courbes.

III. — Déplacement à deux paramètres. Connexion induite d'une surface.

26. Nous reprenons la méthode de M. Cartan des particularisations successives du repère mobile jusqu'à ce que son déplacement soit défini par celui de son origine, qui décrit une surface. Cette méthode consiste encore en une réduction de l'homographie \mathcal{C} .

La particularisation *fondamentale* consiste à prendre la normale \mathbf{n} comme troisième vecteur du repère

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \times d\mathbf{m} = \omega_3 = 0,$$

et dans la suite nous supposons toujours effectuée cette première particularisation.

Le mouvement du repère ne dépend plus dès lors que de trois para-

mètres : les deux paramètres u_1, u_2 , qui fixent la position de \mathbf{m} et un paramètre ν pour la rotation autour de la normale. Les formules du déplacement sont ramenées à

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{m} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2 \\ d\mathbf{a}_1 = \omega_{12} \mathbf{a}_2 + \omega_{13} \mathbf{n} \\ d\mathbf{a}_2 = \omega_{21} \mathbf{a}_1 + \omega_{23} \mathbf{n} \\ d\mathbf{n} = \omega_{31} \mathbf{a}_1 + \omega_{32} \mathbf{a}_2 \end{array} \right.$$

Nous pourrons séparer, dans les vecteurs précédents et les tenseurs constitués avec eux, les composantes à la surface (éléments internes), que nous affecterons de l'indice s , et les composantes externes avec l'indice e . De même, les opérations entre tenseurs superficiels attachés au point \mathbf{m} , c'est-à-dire considérés comme faisant partie de l'espace euclidien à deux dimensions constitué par le plan tangent à la surface en \mathbf{m} , seront indiquées par le même indice s (qui pourra être sous-entendu).

Les éléments superficiels se déduisent de leurs correspondants spatiaux par projection orthogonale sur le plan tangent, l'homographie réalisant cette projection et s'appliquant aux vecteurs étant

$$\mathcal{I}_s = \mathcal{U}_s = \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2.$$

La surface se trouve ainsi pourvue d'une connexion induite (de l'espace euclidien ambiant), caractérisée par les formules (1)

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_s d\mathbf{m} = d_s \mathbf{m} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2 = d\mathbf{m}, \\ \mathcal{I}_s d\mathbf{a}_1 = d_s \mathbf{a}_1 = \omega_{12} \mathbf{a}_2 + \mathcal{A}_s \mathbf{a}_1, \\ \mathcal{I}_s d\mathbf{a}_2 = d_s \mathbf{a}_2 = \omega_{21} \mathbf{a}_1 + \mathcal{A}_s \mathbf{a}_2 \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{A}_s = \omega_{12} \mathcal{A}_{21}.$$

Dans l'espace, ces formules sont complétées par

$$(71') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}_e = \mathbf{n}^2; \\ \mathcal{I}_e d\mathbf{a}_1 = d_e \mathbf{a}_1 = \omega_{13} \mathbf{n} = \mathcal{A}_e \mathbf{a}_1, \\ \mathcal{I}_e d\mathbf{a}_2 = d_e \mathbf{a}_2 = \omega_{23} \mathbf{n} = \mathcal{A}_e \mathbf{a}_2, \\ \mathcal{I}_s d\mathbf{n} = d_s \mathbf{n} = \omega_{31} \mathbf{a}_1 + \omega_{32} \mathbf{a}_2 = d\mathbf{n} = \mathcal{A}_e \mathbf{n} \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{A}_e = \omega_{23} \mathcal{A}_{32} + \omega_{31} \mathcal{A}_{13}.$$

(1) $d_s \mathbf{m}, d_s \mathbf{a}_1, d_s \mathbf{a}_2, d_s \mathbf{n}$ sont équivalents à $\mathcal{I}_s d\mathbf{m}, \mathcal{I}_s d\mathbf{a}_1, \mathcal{I}_s d\mathbf{a}_2, \mathcal{I}_s d\mathbf{n}$; de même pour les termes en d_e ; cette équivalence ne subsiste plus en général pour les pseudo différentielles d'ordre supérieur. Pour les diverses différentiations comitantes, voir E. CARTAN (E. R.).

Les homographies α_s et α_e peuvent s'écrire

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_s = \overline{d_s \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} + \overline{d_s \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2} = \overline{d \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} + \overline{d \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2} - \overline{d \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}, \\ \alpha_e = \nu \overline{d \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}. \end{array} \right.$$

Il est bien entendu que les symboles d_s ne sont plus de vrais symboles de différentiation, c'est-à-dire ne jouissent plus des propriétés des symboles usuels d et en particulier qu'ils ne seront plus en général échangeables; leurs propriétés les rapprochent plutôt des symboles infinitésimaux de transformations. Mais nous aurons à considérer des expressions différentielles dont les noyaux, composés de vecteurs superficiels, agissent de la même façon sur des différentielles en d et des différentielles en d , et pour lesquelles, par suite, le calcul ne sera pas modifié. Ce sera le cas en particulier pour les formes de Pfaff ω et les formes extérieures plus générales introduites par M. Cartan, et c'est ce qui fait l'intérêt de ces méthodes.

Pour la courbure de translation, on a maintenant, d'après (65),

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_s(d\mathbf{m})' = (d_s \mathbf{m})'_s - \omega, \\ \mathcal{R}_e(d\mathbf{m})' = -(\delta \mathbf{n} \times d\mathbf{m} - d\mathbf{n} \times \delta \mathbf{m}) \mathbf{n} = 0. \end{array} \right.$$

De même, les formules relatives à la courbure de rotation se scindent en

$$(73') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_s \mathcal{K}_R = \alpha'_s - \nu \{ \alpha_e \alpha_s \} - \{ \alpha_e \alpha_e \} = \alpha'_{s\omega} + \{ \alpha_e \alpha_e \} = 0, \\ \mathcal{R}_e \mathcal{K}_R = \alpha'_e - \nu \{ \alpha_e \alpha_e \} = \alpha'_{e\omega} - \nu \{ \alpha_e \alpha_s \} = 0, \end{array} \right.$$

dont la première détermine le tenseur de rotation superficiel \mathcal{K}_R , la seconde étant équivalente aux équations de Codazzi pour la surface.

$$\mathcal{K}_{R_s} = \alpha'_{s\omega} = - \{ \alpha_e \alpha_e \} = - \frac{1}{2} \alpha'_s.$$

formules qui permettent de calculer ce tenseur sous ses diverses formes, soit

$$\mathcal{K}_{R_s} = - \nu \left(\overline{\delta_s \mathbf{a}_1 \cdot d_s \mathbf{a}_1} + \overline{\delta_s \mathbf{a}_2 \cdot d_s \mathbf{a}_2} \right) = \nu \overline{\delta \mathbf{n} \cdot d \mathbf{n}}.$$

27. Avant de terminer la particularisation du repère, on peut profiter du degré de liberté qui lui est laissé pour rechercher les comitants locaux par la méthode des transformations infinitésimales compatibles avec les liaisons déjà imposées; la particularisation fondamentale a

et l'on a aussi les formules détaillées

$$\begin{aligned} \delta\omega_1 &= \omega_2 \delta\nu, & \delta\omega_{13} &= \omega_{23} \delta\nu, \\ \delta\omega_2 &= -\omega_1 \delta\nu, & \delta\omega_{23} &= -\omega_{13} \delta\nu, \\ \delta\omega_3 &= 0, & \delta\omega_{12} &= d\delta\nu. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement

$$\delta ds^2 = 0, \quad \delta\varphi^{(2)} = 0, \quad \delta[\omega_1\omega_2] = 0, \quad \delta[\omega_{13}\omega_{23}] = 0$$

ou

$$\delta(d\mathbf{m})^2 = 0, \quad -\delta(d\mathbf{n} \times d\mathbf{m}) = 0, \quad \delta[d_1\mathbf{m} \cdot d_1\mathbf{m}]_s = 0, \quad \delta[d_1\mathbf{n} \cdot d_2\mathbf{n}]_s = 0.$$

Les paramètres k_1, k_2, k_3 sont soumis aux variations \

$$\delta k_1 = 2k_3 \delta\nu, \quad \delta k_3 = (k_2 - k_1) \delta\nu, \quad \delta k_2 = -2k_3 \delta\nu$$

ou

$$\delta(k_1 + k_2) = 0, \quad \delta k_3 = 2 \frac{k_2 - k_1}{2} \delta\nu, \quad \delta \frac{k_2 - k_1}{2} = -2k_3 \delta\nu,$$

d'où aussi

$$\delta \left(k_3^2 + \frac{(k_2 - k_1)^2}{4} \right) = 0.$$

Nous choisirons de préférence comme invariants locaux

$$H = \frac{1}{9}(k_1 - k_2), \quad -K = k_3^2 - k_1 k_2.$$

Quand on aura annulé $\delta\nu$, la rotation du repère autour de la normale ne dépendra plus que des paramètres de position u_1, u_2 ; les formules précédentes montrent qu'on peut en particulier donner au repère la particularisation *principale*

$$e_{12} = \delta\nu = 0, \quad k_3 = 0.$$

les vecteurs du repère étant suivant les directions principales de la surface, tangentes aux lignes de courbure en \mathbf{m} (nous écartons le cas des ombilics).

Toute autre particularisation finale annulant $\delta\nu$ est également acceptable pourvu qu'on tienne compte des relations entre k_1, k_2, k_3 résultant de l'existence des invariants H et K .

Le repère étant fixé, on a alors

$$(75) \quad \begin{cases} \omega_{12} = g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2 = \mathbf{f} \times d\mathbf{m}, \\ \mathbf{f} = g_1 \mathbf{a}_1 + g_2 \mathbf{a}_2, \end{cases}$$

g_1 et g_2 étant aussi des invariants locaux dépendant de la dernière particularisation choisie.

Avant de revenir sur les relations différentielles qui existent entre k_1, k_2, k_3, g_1, g_2 , nous allons reprendre les formules de différentiation dans le calcul géométrique.

28. En considérant $(\mathcal{A}_{21})_s$, comme un opérateur superficiel, nous poserons

$$(\mathcal{A}_{21})_s = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathcal{J} \quad (1)$$

de sorte que le déplacement d'un vecteur superficiel \mathbf{u} sera

$$d_s \mathbf{u} = d_\omega \mathbf{u} - \omega_{12} \mathcal{J} \mathbf{u}.$$

Pour un noyau superficiel Φ , schématiquement

$$\Phi = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_p,$$

$$d_s \Phi = d_\omega \Phi - \omega_{1i} \sum_i \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{i-1} (\mathcal{J} \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_p \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

nous écrirons

$$(76) \quad d_s \Phi = d_\omega \Phi + \omega_{1i} (\mathcal{J} \times \Phi).$$

Pour les noyaux du second ordre, cette notation coïncide avec celle de la parenthèse de S. Lie, et cette parenthèse est un noyau symétrique; en outre, si le noyau primitif est symétrique, cette parenthèse représente la jacobienne de la forme considérée avec l'ombilicale. Nous étendrons cette notation aux formes géométriques ou numériques quelconques; rappelons que pour une forme scalaire, finie ou différentielle, φ

$$d_s \varphi = d_\omega \varphi \quad (\mathcal{J} \times \varphi) = 0.$$

On aurait pu, au paragraphe précédent, rechercher les formes constantes locales par

$$\delta \Phi = \delta_\omega \Phi - \delta \nu (\mathcal{J} \times \Phi) = 0.$$

Les formules de différentiation donnent aussitôt (une fois le repère fixé) celles relatives aux noyaux dérivés

$$(76') \quad \nabla_s \Phi = \nabla_\omega \Phi + (\mathcal{J} \times \Phi) \cdot \mathbf{f} \quad (2),$$

$$\nabla_s \varphi = \nabla_\omega \varphi.$$

(1) On a évidemment, pour \mathcal{J} comme pour \mathcal{A}_s ,

$$d_s \mathcal{A}_s = 0, \quad d_s \mathcal{J} = 0.$$

(2) La formule (76') permet le calcul effectif du noyau dérivé $\nabla_s \Phi$ sans représentation schématique.

Remarquons que pour les formes différentielles, scalaires ou non,

$$\Psi = \Phi_{\lambda}^{\mu} d_1 \mathbf{m} \cdot d_1 \mathbf{m} \dots d_l \mathbf{m} = \Phi_{\lambda}^{\mu} \Delta \quad (\text{les } d \text{ étant superficiels}),$$

$$d_s \Psi = d_s \Phi_{\lambda}^{\mu} \Delta + \Phi_{\lambda}^{\mu} d_s \Delta;$$

le second terme, comprenant des différentielles du second ordre, ne disparaîtra que dans des cas très particuliers, comme pour les covariants bilinéaires des formes de Pfaff, ou encore dans les formules du paragraphe précédent

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mathbf{a}_1 \times d\mathbf{m}, & \varphi^{(1)} &= \mathbf{f}^{(1)\lambda} (d\mathbf{m})^2, \\ \delta\omega_1 &= \delta\mathbf{a}_1 \times d\mathbf{m}, & \delta\varphi^{(1)} &= \delta\mathbf{f}^{(1)\lambda} (d\mathbf{m})^2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

à cause de $\delta d\mathbf{m} = 0$.

29. Un type de formules, peu différentes des précédentes, avec les dérivées *intrinsèques*, est d'un usage courant; supposant toujours désormais le repère complètement fixé, nous pourrons, pour une forme finie Φ , écrire la différentielle et la dérivée

$$(77) \quad \begin{cases} d_s \Phi = \Phi_1 \omega_1 + \Phi_2 \omega_2, \\ \nabla_s \Phi = \Phi_1 \mathbf{a}_1 + \Phi_2 \mathbf{a}_2. \end{cases}$$

Φ_1 et Φ_2 sont de même ordre et même constitution que la forme primitive Φ ⁽¹⁾, et comme

$$\nabla_s \Phi = \nabla_s \Phi \times (\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2) = (\nabla_s \Phi \times \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + (\nabla_s \Phi \times \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_2,$$

on voit que Φ_1 et Φ_2 sont les *dérivées* de Φ dans les directions \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , qu'on peut écrire ⁽²⁾

$$\Phi_1 = \nabla_s \Phi \times \mathbf{a}_1 = \frac{d\Phi}{ds_1}, \quad \Phi_2 = \nabla_s \Phi \times \mathbf{a}_2 = \frac{d\Phi}{ds_2}.$$

Les formules

$$\begin{aligned} d_s \Phi &= \frac{d\Phi}{ds_1} \omega_1 + \frac{d\Phi}{ds_2} \omega_2, \\ \nabla_s \Phi &= \frac{d\Phi}{ds_1} \mathbf{a}_1 + \frac{d\Phi}{ds_2} \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

montrent d'ailleurs bien les analogies et différences entre ces dérivées intrinsèques et les dérivées ordinaires, les formes de Pfaff et les différentielles, etc., comme aussi les oppositions de variances. Avec ces notations, en particulier, les vecteurs unitaires \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 représentent les

(1) Voir les paragraphes 12 et suivants du Chapitre I.

(2) Comparer E. Cesàro (N. G.).

dérivées de \mathbf{m} suivant les axes du repère, donc sont mis à la place de \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 pour le repère choisi.

Les formules

$$(78) \quad \begin{cases} d_s \mathbf{a}_1 - \omega_{12} \mathbf{a}_2 = (g_1 \mathbf{a}_2) \omega_1 + (g_2 \mathbf{a}_2) \omega_2 = \mathbf{a}_{11} \omega_1 - \mathbf{a}_{12} \omega_2, \\ d_s \mathbf{a}_2 = -\omega_{12} \mathbf{a}_1 = -(g_1 \mathbf{a}_1) \omega_1 - (g_2 \mathbf{a}_1) \omega_2 = \mathbf{a}_{21} \omega_1 + \mathbf{a}_{22} \omega_2. \end{cases}$$

donnent

$$(79) \quad \mathbf{f} = g_1 \mathbf{a}_1 - g_2 \mathbf{a}_2 = -(\mathbf{a}_{21} - \mathbf{a}_{12}),$$

c'est-à-dire sous l'apparence d'un rotationnel d'homographie, mais rappellent que, même appliqués à \mathbf{m} (\mathbf{a}_1 pour \mathbf{m}_1 , \mathbf{a}_2 pour \mathbf{m}_2), les symboles $\frac{d}{ds_1}$, $\frac{d}{ds_2}$ ne sont généralement pas échangeables, mais sont en réalité des symboles \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 de transformations infinitésimales ⁽¹⁾ (sauf pour les coordonnées cartésiennes du plan, les courbes $s_1 = \text{const.}$, $s_2 = \text{const.}$, ne peuvent coïncider chacune avec les courbes le long desquelles sont comptés les arcs s_2 et s_1).

De même

$$(80) \quad \mathbf{g} = \mathcal{J} \mathbf{f} = -g_2 \mathbf{a}_1 + g_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{22}$$

à l'apparence d'une divergence d'homographie. Si nous revenons d'ailleurs à l'homographie du déplacement superficiel

$$\mathbf{c}_s = \omega_{12} \mathcal{J} = \mathcal{J} (\mathbf{f} \times d\mathbf{m}),$$

on peut en isoler le noyau

$$(81) \quad \mathbf{A}_s = (\mathcal{J}) \mathbf{f},$$

d'où les deux vecteurs comitants

$$(81') \quad \begin{cases} \mathbf{I}_1 \mathbf{A}_s = \mathcal{J} \mathbf{f} = \mathbf{g}, \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{A}_s = \mathcal{J}^2 \mathbf{f} = -\mathbf{f} \quad (2). \end{cases}$$

On peut compléter les formules (77) en posant

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_\omega \Phi = \Phi_{\omega_1} \omega_1 + \Phi_{\omega_2} \omega_2, \\ \nabla_\omega \Phi = \Phi_{\omega_1} \mathbf{a}_1 + \Phi_{\omega_2} \mathbf{a}_2, \\ \Phi_{\omega_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_1}, \quad \Phi_{\omega_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}, \quad (\mathcal{J} \times \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \end{array} \right.$$

(1) Formule (47), § 17.

(2) Aux symboles usuels de Christoffel correspondrait plutôt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_s &= \kappa \mathbf{A}_s = \mathbf{a}_2 \mathbf{f} \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{f} \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{B}_s &= \mathbf{g}, \quad \mathbf{E}_1 \mathbf{B}_s = \mathbf{f}, \\ \nabla_s \mathbf{u} &= \nabla_\omega \mathbf{u} + \mathbf{B}_s \times \mathbf{u}. \end{aligned}$$

d'où symboliquement

$$\frac{d}{ds_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} + g_1 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{d}{ds_2} = \frac{\partial}{\partial s_2} + g_2 \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

30. Les particularisations faites, nous allons revenir aux formules de structure et courbure, dans le calcul avec composantes d'abord, pour établir les relations qu'elles introduisent entre les invariants ou comitants précédemment attachés au repère. Nous avons posé

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{11} = \omega'_1 - [\omega_1 \omega_2] = 0, & \Omega_{12} = \omega'_{12} - [\omega_{13} \omega_{23}], \\ \Omega_{21} = \omega'_2 - [\omega_{21} \omega_1] = 0, & \omega'_{13} - [\omega_{12} \omega_{23}] = 0, \\ \omega'_3 = 0, & \omega'_{23} - [\omega_{31} \omega_{13}] = 0 \end{array} \right.$$

et

$$\omega_{11} = g_1 \omega_1 \quad g_2 \omega_2, \quad \omega_{13} = k_1 \omega_1 + k_3 \omega_2, \quad \omega_{23} = k_3 \omega_1 + k_2 \omega_2.$$

Des deux premières équations, on tire

$$g_1 = \frac{\omega'_1}{[\omega_1 \omega_2]}, \quad g_2 = \frac{\omega'_2}{[\omega_1 \omega_2]},$$

$$\omega_{12} = \frac{\omega'_1 \omega_1 + \omega'_2 \omega_2}{[\omega_1 \omega_2]}.$$

La quatrième équation donne le tenseur de courbure (de rotation) superficiel

$$(83') \quad \Omega_{212} = -K[\omega_1 \omega_2] = -[\omega_{13} \omega_{23}],$$

$$(84) \quad -K = g_1^2 \cdot g_2^2 + g_{21} - g_{12} = k_3^2 - k_1 k_2$$

avec toutes ses interprétations bien connues, qui seront précisées quand nous aurons rattaché les invariants locaux aux courbures et torsions des courbes tracées sur la surface. Les cinquième et sixième équations se développent en

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} (k_1 - k_2)g_1 + 2k_3g_2 + k_{31} - k_{12} = 0, \\ 2k_3g_1 + (k_3 - k_1)g_2 + k_{21} - k_{32} = 0, \end{array} \right.$$

et sont les conditions d'intégrabilité pour la forme $\varphi^{(2)}$, connues sous le nom d'équations de Codazzi. Sans faire le calcul sous forme développée, on voit qu'on avait également

$$\omega_{12} = \frac{\omega'_{13} \omega_{13} + \omega'_{23} \omega_{23}}{[\omega_{13} \omega_{23}]},$$

donc qu'on peut tirer des trois équations précédentes, par élimination de g_1 et g_2

$$(86) \quad -[\omega_{13} \omega_{23}] = \left(\frac{\omega'_{13} \omega_{13} + \omega'_{23} \omega_{23}}{[\omega_{13} \omega_{23}]} \right)',$$

où ne figurent plus que les formes de Pfaff relatives à la représentation sphérique de la surface.

31. Reprenons les formules précédentes avec les vecteurs et les noyaux géométriques déjà introduits. En partant de

$$\nabla_s \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \mathbf{f}, \quad \nabla_s \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{f},$$

on obtient

$$(87) \quad \begin{cases} \text{rot}_s \mathbf{a}_1 = -[\mathbf{a}_2 \mathbf{f}]_s = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{f} = -\text{div}_s \mathbf{a}_2 = g_1, \\ \text{rot}_s \mathbf{a}_2 = [\mathbf{a}_1 \mathbf{f}]_s = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{f} = \text{div}_s \mathbf{a}_1 = g_2, \\ \mathbf{f} = \text{rot}_s \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \text{rot}_s \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{g} = \mathcal{J} \mathbf{f} = -(\text{div}_s \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \text{div}_s \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2). \end{cases}$$

Puis

$$(88) \quad \begin{cases} -K = \text{rot}_s \mathbf{f} = \text{rot}_\omega \mathbf{f} - [\mathbf{g} \mathbf{f}]_s = \mathbf{f}^2 + \text{rot}_\omega \mathbf{f}, \\ K = \text{div}_s \mathbf{g} = \text{div}_\omega \mathbf{g} - \mathbf{g}^2 \end{cases}$$

ou encore

$$(89) \quad K = -\text{rot}_s \mathbb{E}_1 \mathbf{A}_s = \text{div}_s \mathbb{I}_1 \mathbf{A}_s.$$

En passant aux dérivées secondes de \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , on a du reste

$$(90) \quad \begin{cases} \nabla_s^2 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \mathbf{f}^2 + \mathbf{a}_2 \nabla_s \mathbf{f}, \\ \nabla_s^2 \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_2 \mathbf{f}^2 - \mathbf{a}_1 \nabla_s \mathbf{f}, \end{cases}$$

ce qui est bien d'accord avec

$$(91) \quad \mathcal{K}_{R_s} \mathbf{a}_1 = \mathcal{A} \nabla_s^2 \mathbf{a}_1 \overline{\delta \mathbf{m} \cdot / \mathbf{m}} = \text{rot}_s \mathbf{f} [\delta \mathbf{m} \cdot / \mathbf{m}]_s \mathcal{J} \mathbf{a}_1 = \text{rot}_s \mathbf{f} (\mathcal{J}^2 \delta \mathbf{m} / \mathbf{m}) \mathcal{J} \mathbf{a}_1$$

(de même pour \mathbf{a}_2); posons ⁽¹⁾

$$(90') \quad \begin{cases} \mathbb{E}_1 \nabla_s^2 \mathbf{a}_1 = \nabla_s \mathbf{a}_1 = \text{rot}_s \mathbf{f} \cdot \mathcal{J} \mathbf{a}_1 = \text{rot}_s \mathbf{f} \cdot \mathbf{a}_2 = -K \mathbf{a}_2, \\ \nabla_s \mathbf{a}_2 = K \mathbf{a}_1, \quad -K = \mathbf{a}_2 \times \nabla_s \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \times \nabla_s \mathbf{a}_2. \end{cases}$$

On peut encore isoler dans \mathcal{K}_{R_s} le noyau doublement alterné

$$(92) \quad \mathfrak{K}_{R_s} = \text{rot}_s \mathbf{f} (\mathcal{J}) (\mathcal{J}) = (\mathcal{J}) (\text{Rot}_s \mathbf{f}) = \text{Rot}_s \mathbf{A}_s.$$

Pour les formules relatives à la forme asymptotique $\mathbf{f}^{(2)}$ (74'), nous représenterons ainsi cette forme par \mathcal{J} ($-\mathcal{J}$ étant l'homographie de la

(1) Le symbole introduit $\nabla_s = \mathbb{E}_1 \nabla^2$ n'a pas la signification de ${}_2 \nabla$ dans les travaux de MM. Schouten et Struik.

représentation sphérique)

$$(84') \quad \mathcal{J}c_{n_3} = \overline{\delta \mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}} - [\delta \mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}], \mathcal{J} = -\mathcal{J}^{(2)}[\delta \mathbf{m} \cdot d\mathbf{m}]_s \mathcal{J},$$

$$K = \mathcal{J}^{(1)} = \mathbf{I}_s(\mathcal{J}) = [c_1 c_2]_s.$$

[Rappelons en passant que $2H = \mathbf{I}_s \mathcal{J}$], et qu'à côté des deux premières formes fondamentales \mathcal{U}_s et \mathcal{J} , on peut en considérer une troisième, donnant l'élément linéaire de la représentation sphérique

$$\mathcal{J}' = c_1^2 + c_2^2, \quad \mathcal{J}'_{,X} (d\mathbf{m})^2 = (d\mathbf{n})^2$$

liée aux précédentes par la relation identique

$$\mathcal{J}' = H\mathcal{J} - K\mathcal{U}_s = 0.$$

Nous avons vu qu'en considérant \mathcal{J} comme un tenseur spatial, on avait

$$\mathcal{J} = -\nabla \mathbf{n} = -\nabla^* u_3.$$

Le tenseur dérivé spatial $\nabla^2 u_3$ est alors complètement symétrique et pour les déplacements superficiels, il se réduit à

$$-\nabla_s \mathcal{J} = \nabla_s^2 \mathbf{n}$$

donc le tenseur $\nabla_s \mathcal{J}$ est aussi complètement symétrique et cela s'exprime en ce qui concerne la symétrie à droite, par

$$(93) \quad \nabla_s \mathcal{J}_{,X} \partial = -\mathbf{E}_1 \nabla_s \mathcal{J} = -\text{rot}_s \mathcal{J} = 0.$$

Nous poserons

$$\mathbf{f}^{(3)} = \nabla_s \mathcal{J} = -\nabla_s^2 \mathbf{n}, \quad \varphi^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}_{,X} (d\mathbf{m})^2$$

pour représenter cette forme symétrique du troisième ordre. Comme $\nabla^2 \mathbf{n}$ et $\nabla_s \mathbf{n}$ sont des tenseurs différents, cette symétrie n'existera plus pour les noyaux dérivés superficiels suivants. La forme $\mathbf{f}^{(3)}$ a été appelée forme de Codazzi par M. Neville (M. F.) qui a montré qu'en opérant sur des vecteurs convenables, elle donnait les fonctions de Darboux et de Laguerre relatives à une courbe tracée sur la surface.

En dérivant

$$c_1 = \mathcal{J} a_1.$$

et tenant compte de la symétrie de $\nabla_s \mathcal{J}$, on obtient

$$\nabla_s c_1 = \mathbf{a}_1 \times \nabla_s \mathcal{J} - \mathcal{J} \times \nabla_s \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \times \nabla_s \mathcal{J} - \mathcal{J} \times \mathbf{a}_1 \mathbf{f} = \mathbf{a}_1 \times \nabla_s \mathcal{J} + c_2 \mathbf{f}.$$

De même

$$c_2 = \mathcal{J} a_2, \quad \nabla_s c_2 = \mathbf{a}_2 \times \nabla_s \mathcal{J} - c_1 \mathbf{f},$$

d'où en prenant les rotationnels

$$(8') \quad \text{rot}_r \mathbf{c}_1 = -[\mathbf{c}_0 \mathbf{f}]_r, \quad \text{rot}_r \mathbf{c}_0 = [\mathbf{c}_1 \mathbf{f}]_r,$$

soit les deux équations de Codazzi, en fait équivalentes à

$$(93) \quad \text{rot}_r \mathcal{J} = 0.$$

On a ensuite identiquement

$$[\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_0]_s \mathbf{f} = [\mathbf{c}_1 \mathbf{f}]_s \mathbf{c}_0 - [\mathbf{c}_2 \mathbf{f}]_s \mathbf{c}_1,$$

$$\mathbf{f} = \frac{\text{rot}_r \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \text{rot}_r \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2}{K}$$

et comme

$$\mathbf{h} = [\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_0]_s = -\text{rot}_r \mathbf{f} \quad (1),$$

$$(86') \quad -[\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2]_s = \text{rot}_r \frac{\text{rot}_r \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 - \text{rot}_r \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2}{[\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_0]_s}.$$

Voici ce qu'il faut entendre par la dernière condition; la forme $\mathbf{f}^{(2)}$ étant déterminée par rapport au repère choisi par les coefficients k_1, k_2, k_3 :

$$\mathcal{J} = \mathbf{f}^{(1)} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \widehat{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2} + k_3 \mathbf{a}_3,$$

$$\nabla_r \mathcal{J} = \nabla_\omega \mathcal{J} + (\mathcal{J} \mathcal{J}) \cdot \mathbf{f},$$

le vecteur \mathbf{f} est donné en fonction de ces coefficients et de leurs dérivées par l'équation

$$(93') \quad \text{rot}_r \mathcal{J} = \text{rot}_\omega \mathcal{J} - ((\mathcal{J} \mathcal{J}) \cdot \mathbf{f}) \mathcal{J} = 0,$$

et la relation

$$(94) \quad \mathcal{J}^{(2)} = -\text{rot}_r \mathbf{f} = -\text{rot}_\omega \mathbf{f} - \mathbf{f}^2$$

doit avoir lieu entre les coefficients k_1, k_2, k_3 et leurs dérivées du premier et du second ordre.

32. A côté des conditions d'intégrabilité de la forme $\mathbf{f}^{(2)}$, conçue comme une dérivée spatiale, nous allons établir des conditions analogues pour les dérivées superficielles; Φ étant une forme géométrique finie, nous avons, avec les notations du paragraphe 29,

$$\nabla_r \Phi = \Phi_1 \mathbf{a}_1 + \Phi_2 \mathbf{a}_2,$$

$$\nabla_s^2 \Phi = (\Phi_{11} - g_1 \Phi_s) \mathbf{a}_1^2 - (\Phi_{12} - g_1 \Phi_s) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 - (\Phi_{21} + g_1 \Phi_s) \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 - (\Phi_{22} + g_2 \Phi_s) \mathbf{a}_2^2,$$

(1) Signalons la symétrie de la formule

$$\mathbf{c}_1 \text{rot}_s \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \text{rot}_s \mathbf{c}_2 + \mathbf{f} \text{rot}_s \mathbf{f} = 0.$$

d'où en particulier

$$(95) \quad \begin{cases} \mathbf{I}_1 \nabla_2^2 \Phi = \Delta_2 \Phi = \Phi_{11} + \Phi_{22} + g_2 \Phi_1 - g_1 \Phi_2, \\ \mathbf{E}_1 \nabla_2^2 \Phi = \nabla_2 \Phi = \Phi_{21} - \Phi_{12} + g_1 \Phi_1 + g_2 \Phi_2, \end{cases}$$

mettant en évidence les opérateurs

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{d^2}{ds_1^2} + \frac{d^2}{ds_2^2} + g_1 \frac{d}{ds_1} - g_2 \frac{d}{ds_2}, \\ \nabla_2 &= \frac{d^2}{ds_2 ds_1} - \frac{d}{ds_1 ds_2} + g_1 \frac{d}{ds_1} + g_2 \frac{d}{ds_2} \quad \left(\frac{d}{d\beta} \frac{d}{d\alpha} = \frac{d^2}{d\alpha d\beta} \right), \end{aligned}$$

dont le second a une importance particulière, grâce à la relation

$$(84) \quad -K = g_{11} - g_{22} = g_1^2 - g_2^2 = \text{rot. } \mathbf{f}.$$

Nous rappelons d'abord qu'en opérant sur $\nabla_2 \mathbf{m} = \mathbf{U}$,

$$\nabla_2^2 \mathbf{m} = 0$$

correspond aux formules (78) déjà établies

$$(78') \quad \begin{cases} \mathbf{a}_{11} = g_1 \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_{12} = g_2 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_{21} = -g_1 \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_{22} = -g_2 \mathbf{a}_2; \end{cases}$$

$$(79) \quad \Delta_2 \mathbf{m} = \mathbf{a}_{11} \quad \mathbf{a}_{22} - \mathbf{g} = 0;$$

$$(80) \quad \nabla_2 \mathbf{m} = \mathbf{a}_{21} - \mathbf{a}_{12} \quad \mathbf{f} = 0.$$

Pour un scalaire φ , en considérant les courbes $\varphi = \text{const.}$ comme sections de la surface par des surfaces orthogonales $\varphi = \text{const.}$, on pourra confondre sur la surface $\nabla_2 \varphi$ et $\nabla_1 \varphi$, donc on aura

$$\nabla_1^2 \varphi = \nabla_2^2 \varphi$$

pour les vecteurs superficiels, et par suite $\nabla_2^2 \varphi$ sera symétrique

$$(95') \quad \nabla_2 \varphi = \varphi_{21} - \varphi_{12} + g_1 \varphi_1 + g_2 \varphi_2 = 0.$$

Pour une forme Φ différente d'un scalaire, on pourra alors poser

$$\Phi = \Psi_1 \mathbf{a}_1 + \Psi_2 \mathbf{a}_2.$$

$$(96) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \Psi_{11} \mathbf{a}_1 + \Psi_1 \mathbf{a}_{21} + \Psi_{21} \mathbf{a}_2 & \Psi_1 \mathbf{a}_{11} = (\Psi_{11} - g_1 \Psi_1) \mathbf{a}_1 + (\Psi_{21} + g_1 \Psi_1) \mathbf{a}_2, \\ \Phi_2 = \Psi_{12} \mathbf{a}_1 + \Psi_1 \mathbf{a}_{12} + \Psi_{22} \mathbf{a}_2 & \Psi_2 \mathbf{a}_{22} = (\Psi_{22} - g_2 \Psi_2) \mathbf{a}_1 + (\Psi_{12} + g_2 \Psi_2) \mathbf{a}_2. \end{cases}$$

En continuant le calcul, on obtient

$$(97) \quad \begin{aligned} \nabla_1 \Phi &= (\nabla_1 \Psi_1 - \mathbf{K} \Psi_2) \mathbf{a}_1 + (\nabla_1 \Psi_2 - \mathbf{K} \Psi_1) \mathbf{a}_2, \\ \nabla_2 \Phi &= \mathbf{K} \Phi \times \mathcal{N} + \nabla_2 \Psi_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \nabla_2 \Psi_2 \cdot \mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

Si Φ est un vecteur \mathbf{u} , Ψ_1 et Ψ_2 sont des scalaires φ_1 et φ_2

$$\nabla_2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla_1 \varphi_2 = 0, \quad \nabla_1 \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} \times \mathcal{J} = -\mathbf{K} \mathcal{J} \mathbf{u}.$$

Si Φ est une homographie \mathcal{E} , Ψ_1 et Ψ_2 sont des vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2

$$\nabla_2 \mathbf{u}_1 = -\mathbf{K} \mathcal{J} \mathbf{u}_1, \quad \nabla_2 \mathbf{u}_2 = -\mathbf{K} \mathcal{J} \mathbf{u}_2, \quad \nabla_1 \mathcal{E} = \mathbf{K} (\mathcal{E} \mathcal{J}) = -\mathbf{K} (\mathcal{J} \mathcal{E}).$$

En poursuivant avec des homographies d'ordre supérieur, on voit qu'on aura en général

$$(98) \quad \nabla_2 \Phi = -\mathbf{K} (\mathcal{J} \times \Phi),$$

avec une notation déjà adoptée.

[On aurait pu procéder un peu différemment en partant de

$$\nabla_1 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{K} \mathcal{J} \mathbf{a}_1,$$

puis, pour un vecteur \mathbf{u} le long duquel on peut choisir l'axe \mathbf{a}_1 du repère

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \lambda \mathbf{a}_1, \\ \nabla_2 \mathbf{u} &= \mathbf{a}_1 \nabla_2 \lambda + \lambda \nabla_2 \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \nabla_2 \lambda + \lambda \mathbf{a}_2 \mathbf{f}, \\ \nabla_2^2 \mathbf{u} &= \mathbf{a}_1 \nabla_2^2 \lambda - \mathbf{a}_2 \mathbf{f} \widehat{\nabla_2 \lambda} + \mathcal{J} \mathbf{u} \nabla_2 \mathbf{f}, \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla_2 \mathbf{u} = \text{rot. f. } \mathcal{J} \mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathcal{J} \mathbf{u},$$

et de là passer au cas d'une forme Φ , donnée schématiquement,

$$\Phi = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_p \quad (1).$$

On peut encore écrire, en posant pour l'élément d'aire

$$[\delta \mathbf{m} \delta \mathbf{m}], = \Delta \mathbf{S},$$

pour un vecteur \mathbf{u}

$$(\delta, \mathbf{u})' = \mathcal{K}_R \mathbf{u} = -\mathbf{K} \Delta \mathbf{S} \mathcal{J} \mathbf{u},$$

et pour une forme géométrique Φ

$$(99) \quad (\delta, \Phi)' = (\mathcal{K}_R \times \Phi) = -\mathbf{K} \Delta \mathbf{S} (\mathcal{J} \times \Phi).$$

33. Les formules (96) donnent en particulier les divergence et rota-

(1) Qu'il s'agisse de vraies ou de pseudo-différentielles, l'opérateur alterné $(d)' = \delta d - \delta d$ a la propriété distributive

$$(d)'(\Phi + \Theta) = (d)'\Phi + (d)'\Theta, \quad (d)'\Phi\Theta = (d)'\Phi \cdot \Theta + \Phi (d)'\Theta.$$

tionnel d'un tenseur

$$\Phi = \Psi'_1 \mathbf{a}_1 - \Psi'_2 \mathbf{a}_2;$$

$$(100) \begin{cases} \mathbf{H}_1 \nabla, \Phi = \Psi'_{11} + \Psi'_{22} + g_2 \Psi'_1 - g_1 \Psi'_2 = \nabla_s (\Phi \times \mathbf{a}_1) \times \mathbf{a}_1 - \nabla_s (\Phi \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_2 - \Phi \times \mathbf{g}, \\ \mathbf{E}_1 \nabla, \Phi = \Psi'_{21} - \Psi'_{12} - g_1 \Psi'_1 - g_2 \Psi'_2 = \nabla_s (\Phi \times \mathbf{a}_1) \times \mathbf{a}_1 - \nabla_s (\Phi \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_2 - \Phi \times \mathbf{f}, \end{cases}$$

sous des formes qu'il ne faut pas confondre avec

$$(101) \begin{cases} \mathbf{H}_1 \nabla, \Phi - \mathbf{H}_1 \nabla_\omega \Phi - (\mathcal{J} \times \Phi) \times \mathbf{f}, \\ \mathbf{E}_1 \nabla, \Phi - \mathbf{E}_1 \nabla_\omega \Phi - (\mathcal{J} \times \Phi) \times \mathbf{g}, \end{cases}$$

, car c'est seulement pour un vecteur

$$\mathbf{u} = \varphi_1 \mathbf{a}_1 + \varphi_2 \mathbf{a}_2,$$

qu'on aura

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 \nabla_\omega \mathbf{u} &= \varphi_{11} - \varphi_{22}, & (\mathcal{J} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{f} &= (\mathcal{J} \mathbf{u}) \times \mathbf{f} = -\mathbf{u} \times \mathbf{g}, \\ \mathbf{E}_1 \nabla_\omega \mathbf{u} &= \varphi_{21} - \varphi_{12}, & (\mathcal{J} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{g} &= (\mathcal{J} \mathbf{u}) \times \mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{f}. \end{aligned}$$

D'après ce que nous avons vu, la condition d'intégrabilité superficielle d'une forme Φ ou d'une équation

$$(102) \quad \Phi = \nabla, \Psi'$$

est donnée en adjoignant la relation

$$(103) \quad \mathbf{E}_1 \nabla, \Phi = -\mathbf{K}(\mathcal{J} \times \Phi).$$

Quant aux expressions (100) ou (101), on les emploiera suivant les cas et elles pourront diriger le calcul de façons différentes. Ainsi la condition de Codazzi écrite

$$\mathbf{c}_{,1} - \mathbf{c}_{,2} - \mathcal{J} \mathbf{f} = 0$$

donne en général

$$\mathbf{f} = -\mathcal{J}^{-1}(\mathbf{c}_{,1} - \mathbf{c}_{,2}),$$

mais ceci suppose l'inversion de l'homographie \mathcal{J} , donc $\mathbf{K} \neq 0$; si $\mathbf{K} = 0$ il y aura à envisager le cas du plan et celui des surfaces développables, pour lequel on peut poser

$$\mathcal{J} = \mathbf{j}.$$

On aura à écrire d'abord une première condition

$$[(\mathbf{c}_{,1} - \mathbf{c}_{,2}) \mathbf{j}], = 0.$$

et la composante de \mathbf{f} perpendiculaire à \mathbf{j} ne sera donné qu'à la fin.

Si l'on part au contraire de l'équation mise sous la forme

$$\text{rot}_\omega \mathcal{J} - (\mathcal{J} \mathcal{J}) \times \mathbf{g} = 0$$

ce sera sur l'homographie ($\mathcal{J}\mathcal{J}$) que se portera d'abord l'attention et, sauf dans le cas de la sphère et du plan, on pourra obtenir \mathbf{g} , puis \mathbf{f} , dès cette équation.

IV. — Contact, applicabilité et isomorphisme des surfaces.

34. Prenons pour repère fixe une position initiale $\mathbf{o}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ du repère mobile $\mathbf{m}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{n}$ et supposons que les variables indépendantes dont dépend celui-ci sont les coordonnées cartésiennes x, y de son origine par rapport au repère fixe, la troisième coordonnée z étant la fonction de ces variables définie par l'équation de la surface

$$z = f(x, y)$$

Par rapport au repère fixe, nous aurons les relations successives

$$\begin{aligned} d\mathbf{m} &= dx \cdot \mathbf{e}_1 + dy \cdot \mathbf{e}_2 + dz \cdot \mathbf{e}_3, \\ d^{p+1}\mathbf{m} &= \dots + d^{p+1}z \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

et de même par rapport au repère mobile

$$(104) \quad \begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2, \\ d^{p+1}\mathbf{m} &= \omega_1^{p+1} \mathbf{a}_1 + \omega_2^{p+1} \mathbf{a}_2 + \omega_3^{p+1} \mathbf{n}, \end{aligned}$$

les $\omega^{(p+1)}$ étant des formes différentielles d'ordre $p+1$ en dx et dy , telles que

$$\omega_1^{(1)} = \omega_1, \quad \omega_2^{(1)} = \omega_2, \quad \omega_3^{(1)} = \omega_3 = 0.$$

et se déduisant les unes des autres par des formules de récurrence

$$(105) \quad \omega_i^{(p+1)} = d\omega_i^{(p)} - \sum_j \omega_{ij} \omega_j^{(p)} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Si nous tenons compte maintenant de la coïncidence initiale des deux repères, nous obtiendrons une suite de formules, *établies seulement pour les valeurs des paramètres et des fonctions en \mathbf{o}* , se calculant de proche en proche en tenant compte des réductions déjà acquises

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_2, & \mathbf{n} &= \mathbf{e}_3, \\ \omega_1 &= dx, & \omega_2 &= dy, & \omega_3 &= dz, \\ \omega_1^{(p+1)} &= 0, & \omega_2^{(p+1)} &= 0, & \omega_3^{(p+1)} &= d^{p+1}z \end{aligned}$$

Ces formules donnent les valeurs initiales des différentielles $d^p\omega_1$, et $d^p\omega_2$, d'une part, et la suite des formes $d^{p+1}z$, d'autre part, c'est-

à-dire les termes du développement de

$$\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{m} = \Delta z = dz + \frac{1}{2!} d^2 z + \dots + \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} z + \dots,$$

en formes différentielles homogènes des différents degrés en dx et dy ⁽¹⁾

$$\Delta z = \frac{1}{2!} \varphi^{(2)} + \dots + \frac{1}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)} + \dots$$

Les premières formules montrent qu'initialement

$$d\omega_1 = \omega_{12} \omega_2, \quad d\omega_2 = -\omega_{12} \omega_1,$$

de sorte qu'on a affaire ici à des différentielles comitantes, ce qui se poursuit pour les différentielles suivantes; les autres donnent

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}, \\ \varphi^{(p+1)} &= d\varphi^{(p)} = d\omega \varphi^{(p)} + \omega_{12} (\mathcal{J} \times \mathbf{f}^{(p)}) \times (d\mathbf{m})^p, \end{aligned}$$

grâce à l'emploi des différentielles comitantes; en effet, si

$$\varphi^{(p)} = \mathbf{f}^{(p)} \times (d\mathbf{m})^p \quad (p \geq 2),$$

le terme $p \mathbf{f}^{(p)} \times (d\mathbf{m})^{p-1} d^2 \mathbf{m}$, obtenu dans la différentiation, est ici nul parce que $\mathbf{f}^{(p)}$ est un noyau superficiel, tandis que $d^2 \mathbf{m}$ est réduit à sa composante normale

$$(\mathbf{n} \times d^2 \mathbf{m}) \mathbf{n} = d^2 z \cdot \mathbf{n}.$$

On a donc

$$\varphi^{(p+1)} = \mathbf{f}^{(p+1)} \times (d\mathbf{m})^{p+1}, \quad \mathbf{f}^{(p+1)} = \nabla_s \mathbf{f}^{(p)},$$

les noyaux symétriques $\mathbf{f}^{(2)}$ et $\mathbf{f}^{(3)}$ ayant déjà été introduits, et les formes $\varphi^{(p+1)}$ pouvant être considérées comme symétriques, parce que $\mathbf{f}^{(p+1)}$ opère ici sur des éléments symétriques $(d\mathbf{m})^{p+1}$.

On pourrait former de même d'autres suites de formes géométriques comitantes, relatives par exemple à l'accroissement géométrique $\Delta \mathbf{n}$ de la normale en \mathbf{m} , ou de toute autre forme liée intrinsèquement à \mathbf{m} .

La formule de développement

$$(106) \quad \Delta \mathbf{m} = d\mathbf{m} + \left(\frac{1}{2!} \varphi^{(2)} + \dots + \frac{1}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)} + \dots \right) \mathbf{n},$$

établie avec les variables x, y , et d'ailleurs indépendante de ce choix,

⁽¹⁾ Cf. E. CARTAN, *Sur les formes différentielles en géométrie* (C. R. de l'Ac. des Sc., 7 janvier 1924).

puisque

$$d\mathbf{m} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2,$$

$$\varphi^{(\rho+1)} = \mathbf{f}^{(\rho+1)} \rho_{\mathbf{x}}^{-1} (d\mathbf{m})^{\rho+1} = -\nabla_{\mathbf{x}}' \rho_{\mathbf{x}}^{-1} (d\mathbf{m})^{\rho+1}$$

permet d'étudier simplement le contact de deux surfaces en un point \mathbf{m} ; ce contact peut toujours être du premier ordre, \mathbf{m} et \mathbf{n} pouvant être communs aux deux surfaces; il est d'ordre $\rho + 1$ si au point \mathbf{m} la normale \mathbf{n} et ses ρ premiers noyaux dérivés $\nabla' \mathbf{n}$ sont communs aux deux surfaces.

De même deux surfaces seront applicables sans déformation du premier ordre si leurs $d\mathbf{m}$ peuvent être rendus identiques, c'est-à-dire si elles ont même $(d\mathbf{m})^2$; applicables au second ordre si \mathbf{n} est la même fonction de \mathbf{m} , elles seront alors égales, tous les $\nabla' \mathbf{n}$ coïncidant.

L'isomorphisme ou applicabilité avec déformation ne met en jeu que les éléments superficiels. L'isomorphisme du premier ordre, égalité des $(d\mathbf{m})^2$, entraîne l'isomorphisme complet.

**V. — Les courbes tracées sur les surfaces.
Exposé de quelques problèmes.**

35. A une courbe tracée sur une surface nous attacherons un repère \mathbf{mtqn} issu du point courant \mathbf{m} , et dont les vecteurs seront la tangente \mathbf{t} à la courbe, sa normale \mathbf{q} dans le plan tangent à la surface, la normale \mathbf{n} à la surface. Si l'on appelle θ l'angle de la binormale \mathbf{b} de la courbe avec la normale \mathbf{n} , et si l'on pose

$$(107) \quad \left. \begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega_1 \mathbf{t} & . & = ds \mathbf{t} \\ d\mathbf{t} &= \omega_{12} \mathbf{q} + \omega_{13} \mathbf{n} & = \frac{ds}{r} \mathbf{q} + \frac{ds}{R} \mathbf{n} \\ d\mathbf{q} &= -\omega_{12} \mathbf{t} & + \omega_{23} \mathbf{n} = -\frac{ds}{r} \mathbf{t} & + \frac{ds}{T} \mathbf{n} \\ d\mathbf{n} &= -\omega_{13} \mathbf{t} - \omega_{23} \mathbf{q} & . & = -\frac{ds}{R} \mathbf{t} - \frac{ds}{T} \mathbf{q} \end{aligned} \right\}$$

les formules

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} \cos \theta - \mathbf{b} \sin \theta, \quad \mathbf{p} = \mathbf{q} \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta,$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{p} \sin \theta - \mathbf{b} \cos \theta, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{q} \sin \theta + \mathbf{n} \cos \theta$$

donnent aussitôt

$$(108) \quad g = \frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{\rho}, \quad k = \frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{\rho}, \quad h = \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} - \frac{d\theta}{ds},$$

que nous appellerons respectivement courbure géodésique, courbure normale et torsion normale ⁽¹⁾ de la courbe en \mathbf{m} . Pour rattacher ces éléments aux fonctions relatives à la surface, nous ferons d'abord usage d'un second repère mobile, dont les vecteurs seront représentés par des lettres accentuées, les formes de Pfaff par des lettres ω , et résultant du repère arbitrairement fixé par une rotation d'un angle φ autour de la normale \mathbf{n} ; d'où

$$(109) \quad \begin{cases} \mathbf{a}'_1 = e^{-\lambda\varphi} \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}'_2 = e^{\lambda\varphi} \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{f}' = \mathbf{f} + \nabla_s \varphi, & \mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathcal{J} \nabla_s \varphi \end{cases}$$

ou

$$(109') \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi, \\ \omega_2 = -\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi, \\ \omega_{1,3} = \omega_{1,3} + d\varphi, \\ \omega_{1,3} = \omega_{1,3} \cos \varphi + \omega_{2,3} \sin \varphi, \\ \omega_{2,3} = -\omega_{1,3} \sin \varphi + \omega_{2,3} \cos \varphi. \end{cases}$$

En faisant entrer la courbe considérée dans une famille de courbes coordonnées tracées sur la surface, nous pourrons, le long de cette courbe, identifier les repères $\mathbf{ma}'_1 \mathbf{a}'_2 \mathbf{n}$ et \mathbf{mtqn} : alors

$$\begin{aligned} \omega_1 &= ds = \frac{\omega_1}{\cos \varphi} = \frac{\omega_2}{\sin \varphi}, & \omega_3 &= 0, \\ \omega_{1,2} &= \omega_{1,2} - \frac{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \\ \omega_{1,3} &= \frac{\omega_1 \omega_{1,3} + \omega_2 \omega_{2,3}}{\omega_1^2 + \omega_2^2}, & \omega_{2,3} &= \frac{\omega_1 \omega_{2,3} - \omega_2 \omega_{1,3}}{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(110) \quad \begin{cases} \varepsilon^{(2)} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = ds^2 = (d\mathbf{m})^2, \\ \varphi^{(2)} = \omega_1 \omega_{1,3} + \omega_2 \omega_{2,3} = k_1 \omega_1^2 + 2k_3 \omega_1 \omega_2 + k_2 \omega_2^2 = -d\mathbf{n} \times d\mathbf{m}, \\ \gamma^{(2)} = \omega_1 \omega_{2,3} - \omega_2 \omega_{1,3} = k_3 (\omega_1^2 - \omega_2^2) + (k_1 - k_2) \omega_1 \omega_2 = -[d\mathbf{m} \cdot d\mathbf{n}]_s, \\ \eta^{(2)} = [\omega_1 \omega_2] = [d_1 \mathbf{m} \cdot d_2 \mathbf{m}]_s, \end{cases}$$

formes dont les noyaux sont

$$(110') \quad \begin{cases} \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{a}'_1^2 + \mathbf{a}'_2^2 = \nabla_s \mathbf{m} = \mathcal{U}_s, \\ \mathbf{f}^{(2)} = k_1 \mathbf{a}'_1^2 + k_3 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + k_2 \mathbf{a}'_2^2 = -\nabla_s \mathbf{n} = \mathcal{J}, \\ \mathbf{g}^{(2)} = k_1 (\mathbf{a}'_1^2 - \mathbf{a}'_2^2) + \frac{k_2 - k_1}{2} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) = -\frac{1}{2} (\mathcal{J} \mathcal{J}), \\ \mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathcal{J}, \end{cases}$$

les trois premières formes étant symétriques, la dernière alternée. Intro-

⁽¹⁾ Nous disons torsion *normale* au lieu de torsion *géodésique*.

duisons en outre

$$(111) \quad \Gamma = \omega_{12} ds^2 + \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 = [d\mathbf{m} \cdot d^2\mathbf{m}]_s = [\mathbf{n} d\mathbf{m} \cdot d^2\mathbf{m}].$$

On aura alors les formules connues

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} g' = \frac{\varpi_{12}}{ds} = \frac{\Gamma}{\varepsilon^{(1)2}} = g_1 \cos \varphi + g_2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds}, \\ k = \frac{\varpi_{13}}{ds} = \frac{\varphi^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} = k_1 \cos^2 \varphi + 2k_3 \sin \varphi \cos \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \\ h = \frac{\varpi_{23}}{ds} = \frac{\gamma^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} = k_3(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (k_2 - k_1) \sin \varphi \cos \varphi. \end{array} \right.$$

Pour la première ligne coordonnée $\varphi = 0$,

$$g' = g_1, \quad k = k_1, \quad h = k_3;$$

pour la seconde ligne coordonnée $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (les paramètres correspondants étant accentués)

$$g' = g_2, \quad k' = k_2, \quad h' = -k_3.$$

Si le premier repère est principal, $k_3 = 0$, \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_{11} étant les tangentes aux lignes de courbure, k_1 et k_{11} les courbures principales, etc., on retrouve

$$(112') \quad \left\{ \begin{array}{l} k = k_1 \cos^2 \hat{\varphi} + k_{11} \sin^2 \hat{\varphi}, \\ h = (k_{11} - k_1) \sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi}, \end{array} \right.$$

et leurs conséquences bien connues sur lesquelles nous n'insistons pas. Mais nous allons revenir sur les expressions vectorielles des quantités attachées à une courbe

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} g' = \frac{1}{r} = \mathbf{f}' \times \mathbf{t} = \mathbf{g}' \times \mathbf{q} = \text{rot}_s \mathbf{t} = -\text{div}_s \mathbf{q}, \\ k = \frac{1}{R} = \mathbf{f}^{(2)} \underset{\times}{\times} \mathbf{t}' = H - \mathbf{g}^{(2)} \underset{\times}{\times} \mathbf{t}\mathbf{q}, \\ h = \frac{1}{T} = \mathbf{g}^{(2)} \underset{\times}{\times} \mathbf{t}' = \mathbf{f}^{(1)} \underset{\times}{\times} \mathbf{t}\mathbf{q}. \end{array} \right.$$

Les formes données à k et h , éléments communs à toutes les courbes tangentes en \mathbf{m} , proviennent des relations

$$\begin{aligned} (\mathcal{J} \times \mathbf{f}^{(1)}) &= (\mathcal{J} \times \mathbf{D}\mathbf{f}^{(2)}) = -2\mathbf{g}^{(2)}, \\ (\mathcal{J} \times \mathbf{g}^{(2)}) - \mathbf{D}\mathbf{f}^{(1)} &= 2(\mathbf{f}^{(2)} - H\mathbf{e}^{(2)}) \end{aligned}$$

et des développements de

$$\left(\mathcal{J} \times (\mathbf{f}^{(2)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}') \right) = \left(\mathcal{J} \times (\mathbf{g}^{(2)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}^2) \right) = 0.$$

On parvient aux expressions de Laguerre, Darboux, et autres analogues de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_s k &= \nabla_s (\mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}') - \mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' - \mathbf{f}^{(2)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t} \nabla_s \mathbf{t}, & \nabla_s \mathbf{t} &= \mathbf{q} \mathbf{f}', \\ \frac{dk}{ds} &= \nabla_s k \times \mathbf{t} = \mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' + (\mathbf{f}^{(2)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t} \mathbf{q}) (\mathbf{f}' \times \mathbf{t}), \\ \frac{dh}{ds} &= \nabla_s h = \mathbf{f}^{(3)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' \end{aligned}$$

et de même, en utilisant la symétrie de $\mathbf{f}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \nabla_s h \times \mathbf{t} - \mathbf{f}^{(3)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' \mathbf{q} - (\mathbf{g}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t} \mathbf{q}) (\mathbf{f}' \times \mathbf{t}), \\ \frac{dh}{ds} &= \nabla_s (H - k) = \mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' \mathbf{q}. \end{aligned}$$

De même que nous avons posé

$$\mathbf{f}^{(\mu+1)} = \nabla_s \mathbf{f}^{(\mu)},$$

nous poserons

$$\mathbf{g}^{(\mu+1)} = \nabla_s \mathbf{g}^{(\mu)} \quad (\mu \geq 2).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(2)} &= -\frac{1}{\lambda} \left(\mathcal{J} \times \mathbf{f}^{(2)} \right) = -\mathcal{J} \times \mathbb{D} \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{H} \mathcal{J} - \mathcal{J} \times \mathbf{f}^{(2)}, \\ \mathbf{f}^{(1)} &= \mathbf{H} \mathcal{U}_\tau, \quad \mathcal{J} \times \mathbf{g}^{(1)}, \\ \mathbf{g}^{(\mu)} &= (\mathcal{J}) \nabla_s^{\mu-2} \mathbf{H} - \mathcal{J} \times \mathbf{f}^{(\mu)}, \\ \mathbf{f}^{(\mu)} &= (\mathcal{U}_\tau) \nabla_s^{\mu-2} \mathbf{H} - \mathcal{J} \times \mathbf{g}^{(\mu)}. \end{aligned}$$

La propriété de symétrie de $\mathbf{f}^{(3)}$ entraîne

$$(114) \quad \frac{1}{2} \mathbf{f}^{(3)} \underset{\lambda}{\times} \mathcal{U}_\tau = \mathbf{g}^{(3)} \underset{\lambda}{\times} \mathcal{J} = \nabla_s \mathbf{H} = -\Delta_s \mathbf{n},$$

donc $\mathbf{g}^{(4)}$ n'est symétrique que pour les surfaces à courbure moyenne constante; et en général les $\mathbf{g}^{(\mu)}$, comme les $\mathbf{f}^{(\mu)}$, ne sont pas totalement symétriques.

La fonction de Laguerre est

$$\mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{H}}{ds} - \mathbf{g}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' \mathbf{q},$$

celle de Darboux

$$\mathbf{g}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' - \mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \mathbf{t}' \mathbf{q} = \mathbf{f}^{(1)} \underset{\lambda}{\times} \widehat{\mathbf{t}' \mathbf{q}}.$$

Il est commode de modifier la fonction de Laguerre en substituant

à $\mathbf{f}^{(2)}$ sa partie droite

$$(115) \quad \begin{cases} \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{D}\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}, & -\mathbf{H}\mathbf{e}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathcal{J} \times \mathbf{g}^{(2)}) = \mathcal{J}\mathbf{g}^{(2)}, \\ \mathbf{g}^{(2)} = -\frac{1}{2}(\mathcal{J} \times \mathbf{d}^{(2)}) = -\mathcal{J}\mathbf{d}^{(2)}. \end{cases}$$

et de considérer aussi la suite des noyaux dérivés

$$\mathbf{d}^{(p+1)} = \nabla \cdot \mathbf{d}^{(p)} \quad (p \geq 1), \quad \mathbf{d}^{(p+1)} = \mathcal{J}\mathbf{g}^{(p+1)}, \quad \mathbf{g}^{(p+1)} = -\mathcal{J}\mathbf{d}^{(p+1)}.$$

Nous poserons encore

$$\begin{aligned} D_p &= \mathbf{d}^{(p)} \times \mathbf{t}^p, & D_2 &= k - H = \frac{1}{2}(k - k') = e \quad (\text{excès de courbure normale}), \\ G_p &= \mathbf{g}^{(p)} \times \mathbf{t}^p, & G_2 &= h. \end{aligned}$$

D'où la loi de formation générale

$$(116) \quad \begin{cases} D_{p+1} = \frac{dD_p}{ds} - g(\mathcal{J} \times \mathbf{d}^{(p)}) \times \mathbf{t}^p, \\ G_{p+1} = \frac{dG_p}{ds} - g(\mathcal{J} \times \mathbf{g}^{(p)}) \times \mathbf{t}^p, \end{cases}$$

qui, pour $p = 2$, donne la fonction de Laguerre modifiée et celle de Darboux ⁽¹⁾

$$(116') \quad \begin{cases} D_3 = \frac{dD_2}{ds} - gG_2 = \frac{de}{ds} - ggh, \\ G_3 = \frac{dG_2}{ds} + 2gD_2 = \frac{dh}{ds} - gge. \end{cases}$$

Les fonctions D_p et G_p ($p \geq 2$) sont les fonctions les plus simples communes aux courbes tracées sur la surface et tangentes en un point; les noyaux $\mathbf{d}^{(p)}$ et $\mathbf{g}^{(p)}$ en fournissent d'ailleurs d'autres quand on opère avec eux sur des successions de facteurs \mathbf{t} et \mathbf{q} rangés dans différents ordres : les diverses fonctions ainsi formées sont liées par des équations dues aux formes initiales de $\mathbf{d}^{(2)}$ et $\mathbf{g}^{(2)}$ (homographies droites), à la symétrie de $\mathbf{f}^{(3)}$, et aux relations introduites par dérivation des noyaux.

(1) De même pour la fonction de Laguerre F_3 et la courbure normale F_2 ,

$$F_3 = \frac{dF_2}{ds} - gG_2 = \frac{dk}{ds} - 2gh.$$

Voir une Note de l'auteur dans l'*Enseignement Mathématique*, t. XXV, 1926, nos 1, 2, 3 (erratum corrigé au numéro suivant).

36. De (106) on tire les formules superficielles relatives aux courbes

$$(107') \quad \begin{cases} d_s \mathbf{m} = ds \mathbf{t} \\ d_s \mathbf{t} = \frac{ds}{r} \mathbf{q} \\ d_s \mathbf{q} = -\frac{ds}{r} \mathbf{t} \end{cases}$$

qui mettent en évidence l'unique invariant superficiel $g = \frac{1}{r}$. Ajoutons que pour la connexion induite d'une courbe tracée sur la surface, on retrouve

$$(69) \quad \begin{cases} d_r \mathbf{m} = ds \cdot \mathbf{t}, \\ d_c \mathbf{t} = 0, \end{cases}$$

qui montrent que cette connexion coïncide avec celle qu'a la courbe dans l'espace, indépendamment de la surface sur laquelle elle est tracée.

37. Pour traiter les problèmes relatifs à des lignes tracées sur la surface et douées de certaines propriétés géométriques, deux procédés, à la vérité assez voisins, peuvent être employés.

Dans le premier, une ligne possédant une propriété sera caractérisée par un système de Pfaff déterminé, dont les équations devront être compatibles; si la ligne doit posséder également d'autres propriétés correspondant à un second système de Pfaff, il en résultera un système de Pfaff total dont les conditions de compatibilité devront être formées; on pourra aboutir à une impossibilité ou à une indétermination plus ou moins grande, ou chercher les conditions à imposer à la surface pour arriver à certaine compatibilité. Les méthodes de discussion des systèmes de Pfaff établies par M. Cartan permettent de poser et résoudre ces problèmes.

L'emploi de tels systèmes de Pfaff revient au fond à une différentiation le long des lignes considérées. Ainsi les lignes asymptotiques, les lignes de courbure, les lignes géodésiques sont caractérisées respectivement par les systèmes de Pfaff

$$\varpi_1 = \varpi_{13} = 0, \quad \varpi_2 = \varpi_{23} = 0, \quad \varpi_3 = \varpi_{12} = 0,$$

équivalents aux conditions géométriques

$$k = 0, \quad h = 0, \quad g = 0.$$

Dans le deuxième procédé, que nous allons employer, on ne s'attachera plus à une ligne jouissant de la propriété considérée, mais à

l'ensemble des lignes répondant à la question en considérant l'équation différentielle qui définit toutes ces lignes sur la surface, et que l'on sait du reste obtenir à partir du système de Pfaff précédent. Asymptotiques, lignes de courbure, géodésiques, seront ainsi données par les équations, rapportées à un repère arbitrairement fixé

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = 0, \\ \gamma^{(1)} &= \omega_1 \omega'_{23} - \omega_2 \omega_{13} = 0, \\ \Gamma &= \omega_{12}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 = 0. \end{aligned}$$

Si une ligne doit jouir des propriétés caractérisées ainsi par des équations différentielles (non linéaires en général), on devra ici encore établir les conditions de compatibilité d'un tel système. Et pour cela, les équations différentielles qui le composent pouvant être d'ordres différents, on prolongera le système par des différentiations (et l'on effectuera, au besoin, les intégrations possibles) jusqu'à ce que les éliminations des dérivées d'ordre supérieur permettent d'arriver à un système d'équations du premier ordre, dont la compatibilité exigera qu'elles aient un ou plusieurs systèmes de solutions communes. On se trouvera ainsi ramené à la discussion algébrique de racines communes à un système de formes binaires. Le calcul peut naturellement se faire après le choix de paramètres u_1 et u_2 sur la surface, cas auquel on se ramène à des équations différentielles ordinaires; il peut également se poursuivre avec des formes de Pfaff indépendantes ω_1 et ω_2 et des dérivées par rapport à ces formes. Dans les exemples suivants, nous emploierons les méthodes équivalentes du calcul géométrique.

38. LIGNES DROITES SUR UNE SURFACE — Elles sont caractérisées par

$$(117) \quad [d\mathbf{m} \cdot d'\mathbf{m}] - [d\mathbf{m}(d^2\mathbf{m} - \varphi^{(2)}\mathbf{n})] = 0,$$

soit

$$(117') \quad \begin{cases} \Gamma = [d\mathbf{m} \cdot d^2\mathbf{m}]_s = 0, \\ \varphi^{(1)} = \mathbf{f}^{(2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (d\mathbf{m})' = 0. \end{cases}$$

Elles sont donc considérées à la fois comme géodésiques et asymptotiques, et deux des équations entraînent la troisième; $\Gamma = 0$ donne

$$d^2\mathbf{m} = \lambda d\mathbf{m}.$$

Différentions la seconde équation et tenons compte de cette condition

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{f}^{(2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (d\mathbf{m})' &\rightarrow \mathbf{f}^{(2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} d\mathbf{m} \cdot d^2\mathbf{m} = 0, \\ \mathbf{f}^{(3)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (d\mathbf{m})' &\rightarrow \lambda \mathbf{f}^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (d\mathbf{m})^2 = 0. \end{aligned}$$

Bornons-nous au cas $\lambda \neq 0$; on peut remplacer le système donné par

$$(118) \quad \begin{cases} \varphi^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} \times (\mathbf{d}\mathbf{m})^2 = 0, \\ \varphi^{(3)} = \mathbf{f}^{(3)} \times (\mathbf{d}\mathbf{m})^3 = 0 \end{cases} \quad (\text{fonction de Laguerre nulle}),$$

c'est-à-dire que les formes symétriques $\mathbf{f}^{(2)}$ et $\mathbf{f}^{(3)}$ devront avoir au moins une direction commune; ou si l'on préfère, les formes algébriques $\varphi^{(2)}$ et $\varphi^{(3)}$ en ω_1 et ω_2 , au moins une solution commune. On sait discuter complètement à ce point de vue le système de deux telles équations, une du second degré, l'autre du troisième. On peut donc former les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients de $\varphi^{(2)}$ et $\varphi^{(3)}$ pour que la surface considérée soit simplement ou doublement réglée, ou développable; on remarque dans ce dernier cas que si $\mathbf{f}^{(2)}$ a une direction double, celle-ci appartient à $\mathbf{f}^{(3)}$. Il est du reste plus commode pour la discussion de revenir aux noyaux extérieurs, en posant

$$\mathbf{f}^{(2)} \times (\mathbf{d}\mathbf{m})^2 = \{ \mathbf{f}^{(2)} \cdot (\mathbf{d}\mathbf{m})^2 \}, \quad \mathbf{f}^{(3)} \times (\mathbf{d}\mathbf{m})^3 = \{ \mathbf{f}^{(3)} \cdot (\mathbf{d}\mathbf{m})^3 \}.$$

Remarquons que le procédé suivi indique que si une géodésique fait partie d'une famille de lignes caractérisée par un noyau géométrique, elle appartient aussi à celles qui sont caractérisées par tous les noyaux dérivés suivants. Dans le cas précédent, si les conditions de compatibilité sont satisfaites, les droites satisfont aussi aux équations

$$\varphi^{(p)} = \mathbf{f}^{(p)} \times (\mathbf{d}\mathbf{m})^p = 0.$$

39. LIGNES PLANES SUR UNE SURFACE. — Leur équation différentielle est

$$(119) \quad \frac{ds^6}{\varphi^2 \tau} = [\mathbf{d}\mathbf{m} \cdot d^2 \mathbf{m} \cdot d^3 \mathbf{m}] = 0 \quad (1).$$

Nous allons établir des formules de récurrence, analogues aux formules (104) et (105) du paragraphe 34, à partir du repère $\mathbf{m}\mathbf{t}\mathbf{q}\mathbf{n}$ et de formes différentielles $\varpi^{(2)}$; nous écrirons ds, d^2s, \dots pour $\varpi_1, d\varpi_1, \dots$, en nous rappelant que nous avons posé $\varepsilon^{(2)} = ds^2$. Avec

$$(104') \quad \begin{aligned} d^{p+1} \mathbf{m} &= \varpi_1^{(p+1)} \mathbf{t} - \varpi_2^{(p+1)} \mathbf{q} + \varpi_3^{(p+1)} \mathbf{n}, \\ \varpi_1^{(1)} &= \varpi_1, & \varpi_2^{(1)} &= 0, & \varpi_3^{(1)} &= 0, \\ \varpi_{12} &= \frac{\Gamma}{ds^2}, & \varpi_{13} &= \frac{\varphi^{(2)}}{ds}, & \varpi_{23} &= \frac{\gamma^{(2)}}{ds}; \end{aligned}$$

(1) Nous écarterons en général le cas des lignes isotropes et autres cas singuliers.

(2) On pourrait établir des formules analogues à partir des trois vecteurs $\mathbf{d}\mathbf{m}, \mathcal{J}\mathbf{d}\mathbf{m}, \mathbf{n}$, ou de $\mathbf{d}\mathbf{m}, \mathbf{d}\mathbf{n}, \mathbf{n}$, de même les formules pour $d^{(p+1)}\mathbf{n}$, et aussi employer les différentielles de $\mathcal{A}, \mathcal{A}_s, \mathcal{A}_e$.

nous aurons comme précédemment

$$(105') \quad \omega^{(p+1)} = d\omega^{(p)} - \sum \omega_{ij} \omega^{(p)} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Soit d'autre part une forme différentielle à noyau *superficiel*

$$\begin{aligned} \alpha^{(p)} &= \mathbf{a}^{(p)} \underset{\times}{\int} (d\mathbf{m})^p = \mathbf{a}^{(p)} \underset{\times}{\int} \mathbf{t}^p ds^p, \\ d\alpha^{(p)} &= \nabla_{\mathbf{a}^{(p)}} \underset{\times}{\int} (d\mathbf{m})^{p+1} - p \omega_{1i} \mathbf{a}^{(p)} \underset{\times}{\int} \mathbf{t}^{p-1} \mathbf{q} ds^p - p \alpha^{(p)} \frac{d^2 s}{ds}. \end{aligned}$$

Nous avons pu écrire ici $\nabla_{\mathbf{a}^{(p)}} = \mathbf{a}^{(p+1)}$ au lieu de $\nabla_{\mathbf{a}^{(p)}}$ parce que ce noyau n'opérait que sur des vecteurs superficiels $d\mathbf{m}$, et $d_s \mathbf{t} = \omega_{1i} \mathbf{q}$ au lieu de $d\mathbf{t}$ parce que le noyau $\mathbf{a}^{(p)}$ était superficiel. On a dans ces conditions

$$(120) \quad d\alpha^{(p)} = \alpha^{(p+1)} - \left(\underset{\times}{\int} \mathbf{a}^{(p)} \right) \underset{\times}{\int} (d\mathbf{m})^p \frac{\Gamma}{ds} - p \alpha^{(p)} \frac{d^2 s}{ds},$$

formule à laquelle il n'y a rien à changer si l'on différentie en d_s .

Pour les premières différentielles de $d\mathbf{m}$, on aura

$$(121) \quad \left. \begin{aligned} d^2 \mathbf{m} &= d^2 s \cdot \mathbf{t} - \frac{\Gamma}{ds} \mathbf{q} - \varphi^{(2)} \mathbf{n}, \\ d^3 \mathbf{m} &= \omega_{1i}^{(3)} \mathbf{t} - \omega_{2i}^{(3)} \mathbf{q} - \omega_{3i}^{(3)} \mathbf{n}, \\ \omega_{1i}^{(3)} &= d^3 s - \frac{\Gamma^2}{ds^2} - \frac{\varphi^{(2)} \gamma^{(2)}}{ds}, \\ \omega_{2i}^{(3)} &= d \left(\frac{\Gamma}{ds} \right) - \frac{\Gamma}{ds^2} d^2 s - \frac{\varphi^{(2)} \gamma^{(2)}}{ds} = \frac{d\Gamma - \varphi^{(2)} \gamma^{(2)}}{ds}, \\ \omega_{3i}^{(3)} &= d\varphi^{(2)} - \frac{\varphi^{(2)}}{ds} d^2 s - \frac{\Gamma \gamma^{(2)}}{ds^2}. \end{aligned} \right\} (122)$$

Mais d'après (120)

$$(123) \quad d\varphi^{(2)} = \varphi^{(3)} + 2 \frac{\Gamma \gamma^{(2)}}{ds^2} + 2 \frac{\varphi^{(2)}}{ds} d^2 s;$$

aussi on peut écrire

$$(122') \quad \omega_{3i}^{(3)} = \varphi^{(3)} + 3 \frac{\Gamma \gamma^{(2)} + \varphi^{(2)} ds \cdot d^2 s}{ds^2} = \frac{3 d\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)}}{ds}.$$

Dans le cas des différentielles superficielles, les formules (104') et (105') sont à modifier. Avec de nouveaux coefficients $\tilde{\omega}$

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} d_s^{p+1} \mathbf{m} &= \tilde{\omega}_i^{(p+1)} \mathbf{t} - \tilde{\omega}_j^{(p+1)} \mathbf{q}, \\ \tilde{\omega}_i^{(p+1)} &= d\tilde{\omega}_i^{(p)} - \omega_{ij} \tilde{\omega}_j^{(p)} \quad (i, j = 1, 2), \end{aligned} \right.$$

les \mathbf{n} , \mathfrak{w}_{13} , \mathfrak{w}_{23} n'intervenant plus. On voit dès le troisième ordre la différence entre $(d^3\mathbf{m})_s$ et $d_s^3\mathbf{m}$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^3 &= d^3s - \frac{\Gamma'}{ds^2}, & \tilde{\omega}_2^3 &= d\left(\frac{\Gamma}{ds}\right) + \frac{\Gamma}{ds^2} d^2s, \\ (d^3\mathbf{m})_s &= d_s^3\mathbf{m} - \frac{\varphi^{(2)3}}{ds} \mathbf{t} - \frac{\varphi^{(2)}\gamma^{(2)}}{ds} \mathbf{q} = d_s^3\mathbf{m} + \varphi^{(2)} d\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Si nous revenons au problème posé, l'équation différentielle du troisième ordre des lignes planes peut s'écrire

$$(119') \quad \mathfrak{w}_3^3 \Gamma - \varphi^{(2)}(d\Gamma - \varphi^{(2)}\gamma^{(2)}) = 0,$$

\mathfrak{w}_3^3 pouvant prendre les formes (122) ou (122').

40. LIGNES GÉODÉSIQUES PLANES. — On a alors

$$\Gamma = d\Gamma = 0,$$

et l'équation (119') se réduit à

$$\varphi^{(2)3}\gamma^{(2)} = 0,$$

donc les lignes géodésiques planes sont asymptotiques ou principales. Le premier cas, traité au paragraphe 38, nous ramène à des droites. Le second, cas particulier des lignes de courbure planes, correspond au système

$$\begin{cases} \Gamma = [d\mathbf{m}, d_s^2\mathbf{m}]_t = 0, \\ \gamma^{(2)} = \mathbf{g}^{(1)} \times (d\mathbf{m})^2 = 0. \end{cases}$$

Il se traite comme précédemment et nous sommes ramenés à

$$(125) \quad \begin{cases} \gamma^{(2)} = \mathbf{g}^{(2)} \times (d\mathbf{m})^2 = 0 \\ \gamma^{(1)} = \mathbf{g}^{(1)} \times (d\mathbf{m})^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{fonction de Darboux nulle}).$$

Les conditions de compatibilité de ces deux équations mèneront, suivant les cas, aux surfaces avec un système de lignes de courbure géodésiques et planes, ou les deux. Comme $(d\mathbf{m})^3$ est symétrique, on peut du reste substituer à $\mathbf{g}^{(3)}$ sa partie totalement symétrique, et considérer ainsi $\mathbf{g}^{(2)}$ et $\mathbf{g}^{(3)}$ comme symétriques. Ici encore $\gamma^{(p)} = 0$ tout le long de telles lignes.

LIGNES DE COURBURE PLANES. — En employant pour \mathfrak{w}_3^3 la forme (122), l'équation (119') s'écrit, en tenant compte de $\gamma^{(2)} = 0$,

$$\begin{aligned} \left(d\varphi^{(1)} + \varphi^{(1)} \frac{d^1s}{ds}\right) \Gamma - \varphi^{(2)} d\Gamma &= 0, \\ \frac{\Gamma}{ds} \frac{d\varphi^{(2)}}{\varphi^{(2)}} + \frac{\Gamma d^2s - d\Gamma ds}{ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

et en intégrant

$$(126) \quad \frac{\varphi^{(2)} ds}{\Gamma} = \frac{k}{g} = \text{tang } \theta_0, \quad \text{constante.}$$

Ce résultat connu nous mène au système

$$\begin{cases} \gamma^{(2)} = 0, \\ \Gamma - \varphi^{(2)} ds \cot \theta_0 = 0. \end{cases}$$

En différentiant la première de ces équations, d'après (120)

$$(127) \quad d\gamma^{(2)} - \gamma^{(3)} - 2 \frac{\Gamma \delta^{(2)}}{ds^2} + 2 \frac{\gamma^{(2)}}{ds} d^2 s,$$

et tenant compte du système précédent, on est ramené à

$$\begin{cases} \gamma^{(2)} = 0, \\ \gamma^{(3)} - 2 \cot \theta_0 \frac{\varphi^{(2)} \delta^{(2)}}{ds} = 0, \end{cases}$$

ou plutôt, en rendant rationnelle la dernière équation,

$$(128) \quad \begin{cases} \gamma^{(2)} = \mathbf{g}^{(2)} \times (d\mathbf{m})' = 0, \\ \mathbf{m}^{(6)} = \varepsilon^{(2)} \gamma^{(3)} - 4 \cot^2 \theta_0 \cdot \varphi^{(2)} \delta^{(2)} = \mathbf{p}^{(6)} \times (d\mathbf{m})^6 = 0. \end{cases}$$

On a à chercher ici les solutions communes à deux équations, l'une du second, l'autre du sixième degré avec un coefficient variable ⁽¹⁾, pour discuter le cas des surfaces à un ou deux systèmes de lignes de courbure planes. Si les conditions requises sont satisfaites, on retrouve un énoncé géométrique correspondant à l'expression de la fonction de Darboux $\frac{\gamma^{(3)}}{ds^3}$ le long de ces lignes

$$\frac{\gamma^{(3)}}{ds^3} = 2 \cot \theta_0 \cdot ke = 2 ge, \\ G_3 = 2 g D_2,$$

cas particulier de (116').

41. LIGNES DE LAGUERRE PLANES. — Nous entendons par lignes de Laguerre celles le long desquelles s'annule la fonction de Laguerre et qui satisfont par suite à l'équation

$$(129) \quad \varphi^{(1)} = d\varphi^{(2)} - 2 \frac{\Gamma \gamma^{(2)}}{ds^2} - 2 \frac{\varphi^{(2)}}{ds} d^2 s = 0,$$

⁽¹⁾ Plus exactement, le système (128) correspond aux lignes de courbure planes dont les plans coupent la surface sous le même angle θ_0 ; pour étudier le cas général, il faudra une nouvelle élimination de θ_0 après dérivation. La même remarque est valable pour tous les cas où l'on aura procédé à des intégrations.

d'où l'on peut tirer

$$\gamma^{(2)} = \frac{ds}{2\Gamma} (ds \cdot d\varphi^{(2)} - \nu d^2s \cdot \varphi^{(2)}).$$

On a alors aussi

$$\varpi_3^{(3)} = \frac{3}{2} d\varphi^{(2)}.$$

Pour les lignes de Laguerre, l'équation des lignes planes se réduit à

$$\begin{aligned} 3\Gamma d\varphi^{(2)} - 2\varphi^{(2)} d\Gamma - \frac{ds}{\Gamma} (ds \cdot d\varphi^{(2)} - \nu d^2s \cdot \varphi^{(2)}) \varphi^{(2)} &= 0, \\ \nu \varphi^{(2)} \Gamma d\Gamma - 3\Gamma^2 d\varphi^{(2)} - \frac{\nu \varphi^{(2)} (ds \cdot d^2s - ds^2 \cdot d\varphi^{(2)})}{\varphi^{(2)2}} &= 0, \\ d\left(\frac{\Gamma^2}{\varphi^{(2)2}}\right) \cdot d\left(\frac{ds^2}{\varphi^{(2)}}\right) &= 0. \end{aligned}$$

En intégrant

$$\frac{\Gamma^2}{\varphi^{(2)2}} + \frac{ds^2}{\varphi^{(2)}} = c_0, \quad \text{constante.}$$

Géométriquement, ceci exprime que le long des lignes de Laguerre planes

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{k^3} + \frac{1}{k} &= \frac{x^2}{k^3} = c_0, \\ \frac{1}{z} = \rho = c_0 \sin^2 \theta & \quad \text{ou} \quad \frac{1}{k} = R = c_0 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Pour former le système algébrique à discuter, on éliminera Γ entre les deux équations

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= (c_0 \varphi^{(2)} - \varepsilon^{(2)}) \varphi^{(2)2}, \\ d\varphi^{(2)} &= \varphi^{(2)} + 3\gamma^{(1)} \frac{\Gamma}{\varepsilon^{(2)}} = 0. \end{aligned}$$

On obtient l'équation du douzième degré

$$(130) \quad \mathfrak{D}^{(12)} = \varepsilon^{(2)2} \varphi^{(2)2} - 9(c_0 \varphi^{(2)} - \varepsilon^{(2)}) \varphi^{(2)2} \gamma^{(1)2} = 0,$$

contenant le coefficient arbitraire c_0 , qui avec

$$(129) \quad \varphi^{(2)} = 0$$

forme le système cherché.

42. CERCLES GÉODÉSIIQUES. — Leur équation est

$$(140) \quad \begin{cases} \frac{\Gamma}{ds^3} = g_0, & \text{constante} \\ \text{ou} \\ d\Gamma \cdot ds - 3\Gamma d^2s = 0. \end{cases}$$

On fera facilement l'étude des lignes asymptotiques ou principales qui seraient des cercles géodésiques. Pour les lignes asymptotiques, on obtient ainsi le système (dans lequel la seconde équation a été rendue rationnelle)

$$(141) \quad \begin{cases} \varphi^{(1)} = 0, \\ \varphi^{(2)} - \{g_0^2 z^{(2)}\} \gamma^{(2)} = 0. \end{cases}$$

formé d'une équation du second degré et d'une du sixième avec la constante arbitraire g_0 , donc possible à discuter.

Pour les lignes de courbure, on aura le système analogue

$$(142) \quad \begin{cases} \gamma^{(1)} = 0, \\ \gamma^{(2)} - \{g_0^2 z^{(2)}\} \delta^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Les cercles géodésiques plans donnent un système plus compliqué; l'élimination de Γ , $d\Gamma$ et d^2s montre qu'ils satisfont à l'équation

$$g_0 ds^3 (\varphi^{(1)} - 3g_0 ds, \gamma^{(1)}) - \varphi^{(2)} \gamma^{(2)} = 0$$

qui, rendue rationnelle, est du douzième degré, soit

$$\chi^{(12)} = \mathbf{q}^{(1)} \chi^2 (d\mathbf{m})^{12} = 0.$$

Par dérivation et nouvelle élimination de Γ , on obtient

$$\chi^{(13)} - \left(\mathbf{j} \times \mathbf{q}^{(1)} \right) \chi^3 (d\mathbf{m})^{12} g_0 ds = 0$$

ou, en tenant compte de l'équation irrationnelle précédente, une équation rationnelle du dix-huitième degré, qui avec l'équation du douzième degré, forme le système algébrique à considérer.

VI. — Déplacement parallèle et réseaux angulaires.

43. Les formules

$$(107') \quad \begin{cases} d_s \mathbf{m} = ds \mathbf{t} \\ d_s \mathbf{t} = \frac{ds}{r} \mathbf{q} \\ d_s \mathbf{q} = -\frac{ds}{r} \mathbf{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{a}_1 \cos \varphi & \mathbf{a}_2 \sin \varphi. \\ \mathbf{q} &= -\mathbf{a}_1 \sin \varphi & \mathbf{a}_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

permettent, à partir d'un point \mathbf{m}_0 de la surface, le développement sur

le plan tangent en ce point des courbes issues du point et tracées sur la surface; il suffit, pour obtenir ces aplanies, de remplacer dans (107') les différentielles en d_r par des différentielles en d . On sait que ce mode de développement permet l'introduction de la notion de déplacement parallèle (translation géodésique) sur une surface, et a donné naissance au groupe d'holonomie de M. Cartan. Nous allons reprendre ici la théorie du déplacement parallèle; les formules générales

$$(76) \quad d_r \Phi = d_\omega \Phi + \omega_{12} (\mathcal{J} \times \Phi),$$

$$(76') \quad \nabla_r \Phi = \nabla_\omega \Phi + (\mathcal{J} \times \Phi) \cdot \mathbf{f}$$

s'appliquant en particulier aux vecteurs

$$d_s \mathbf{u} = d_\omega \mathbf{u} + \omega_{12} \mathcal{J} \mathbf{u}$$

montrent que la différentielle comitante d_r se réduit à la différentielle relative au repère d_ω pour un déplacement le long des lignes d'équation

$$\omega_1 + \mathbf{f} \times d\mathbf{m} - [\mathbf{g} d\mathbf{m}] = 0,$$

c'est-à-dire pour un déplacement tangent en chaque point au vecteur \mathbf{g} attaché au repère. A côté du double faisceau tracé sur la surface par les lignes de base, trajectoires des champs de vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2

$$\omega_1 + \mathbf{a}_1 \times d\mathbf{m} - [\mathbf{a}_2 d\mathbf{m}] = 0,$$

$$\omega_2 + \mathbf{a}_2 \times d\mathbf{m} - [\mathbf{a}_1 d\mathbf{m}] = 0,$$

il y a donc intérêt à étudier les champs de vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{g} et les faisceaux orthogonaux de trajectoires qui leur correspondent; nous poserons

$$\omega_{12} = \mathbf{g} \times d\mathbf{m} = [\mathbf{f} d\mathbf{m}].$$

Mais si l'on passe du repère superficiel $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ à un autre repère $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$, les formules

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}'_1 = e^{-\mathcal{J}\varphi} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}'_2 = e^{\mathcal{J}\varphi} \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{f}' = \mathbf{f} + \nabla\varphi, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathcal{J} \nabla\varphi \end{array} \right.$$

montrent que les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{g} restent les mêmes si le second repère fait avec le premier un angle φ constant; on a aussi dans ce cas

$$d_{\sigma'} = d_\omega, \quad \nabla_{\sigma'} = \nabla_\omega.$$

Aux champs de vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , ou aux champs de repères $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, on peut donc, pour ce qui concerne les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{g} , substituer les champs d'étoiles, une étoile étant constituée par un corps superficiel de vecteurs

unitaires invariablement liés entre eux. De même les faisceaux de trajectoires $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ seront remplacés par un *réseau angulaire* ⁽¹⁾, défini à partir d'un faisceau \mathbf{a} , par exemple, par tous les faisceaux de courbes coupant les premières sous des angles constants; l'équation différentielle d'un tel réseau est par suite

$$(143) \quad \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 - ds^2 \cdot d\varphi = 0, \quad [\mathbf{g} d\mathbf{m}]_s (\mathbf{d}\mathbf{m})^2 \quad [d\mathbf{m} \cdot d'\mathbf{m}]_s = 0.$$

Nous avons parlé de vecteurs unitaires, mais à un champ de vecteurs quelconques \mathbf{v} on peut évidemment superposer un champ unitaire \mathbf{a}_1 , de sorte qu'un faisceau \mathbf{v} donne naissance au même réseau angulaire, et à la même étoile en chaque point, que le faisceau \mathbf{a}_1 superposé.

Toute distribution ou champ de vecteurs \mathbf{v} sur une surface fait donc apparaître sur cette surface un réseau angulaire, et tous les vecteurs des étoiles correspondantes sont transportés parallèlement à eux-mêmes (au sens de Levi-Civita) si l'origine ou centre de l'étoile se déplace en chaque point tangentiellement au vecteur \mathbf{g} , c'est-à-dire suivant les trajectoires du faisceau d'équation $\omega_{1,2} = 0$ (correspondant au réseau $\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1 = 0$). Nous proposons d'appeler ces courbes les *directrices* ⁽²⁾ du réseau angulaire, leurs trajectoires orthogonales, auxquelles \mathbf{f} reste tangent, les *lignes de front* correspondantes; le vecteur \mathbf{f} peut s'appeler *front* du réseau, \mathbf{g} *guide* ou *géodèse* du réseau (ou de l'étoile).

Il ne s'agit naturellement pas, dans le déplacement parallèle, d'un déplacement d'ensemble qui aurait lieu simultanément sur toutes les directrices du réseau, mais seulement le long de l'une d'elles.

44. Les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{g} étant assujettis à la seule condition

$$(88) \quad \text{rot}_s \mathbf{f} = -\text{div}_s \mathbf{g} = -\mathbf{K},$$

$$(83') \quad \omega'_{1,2} = -\mathbf{K}[\omega_1 \omega_2].$$

une famille de courbes donnée par une équation de Pfaff $\Pi = 0$ peut être considérée à volonté comme un faisceau de directrices ou de lignes de front pour un ou plusieurs réseaux angulaires à déterminer, et une ligne quelconque de la surface peut entrer arbitrairement dans un tel faisceau.

⁽¹⁾ Nos réseaux angulaires sont les faisceaux de congruences de Ricci et Levi-Civita (*Math. Annalen*, t. 54, 1900). Ce sujet ne semble pas avoir reçu les développements qu'il comportait.

⁽²⁾ Ces courbes sont généralement désignées dans le plan comme *isoclines* d'un faisceau (générateur) de courbes intégrales; le nom de *directrices*, qui semble mieux convenir ici, leur avait été donné à l'origine par Jean Bernoulli.

Pour développer cette ligne comme on l'a exposé précédemment, il suffira ainsi de la considérer comme une directrice de déplacement parallèle, donc de choisir comme repère (pour la surface) le long de la ligne un de ceux qui sont contenus dans une étoile dont le guide \mathbf{g} est tangent à la ligne; on a alors le long de la ligne

$$\omega_{12} = 0, \quad \pi_{12} = \frac{ds}{s} = d\varepsilon.$$

Comme nous l'avons fait dans le plan (§ 17), cherchons quels vecteurs partagent avec les vecteurs unitaires la propriété que leur noyau dérivé superficiel soit une dyade. Soit \mathbf{v} un tel vecteur, et supposons que le champ \mathbf{a}_1 soit superposé au champ \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = \nu \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{w} = \partial \mathbf{v} = \nu \mathbf{a}_2,$$

$$\nabla_s \mathbf{v} = \mathbf{a}_1 \nabla_s \nu, \quad \mathbf{w} \mathbf{f} = \mathbf{v} \frac{\nabla \nu}{\nu} + \mathbf{w} \mathbf{f}.$$

les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} étant rectangulaires, $\nabla_s \mathbf{v}$ ne peut être une dyade que si

$$\left[\mathbf{f} \frac{\nabla \nu}{\nu} \right]_s = \mathbf{g} \times \frac{\nabla \nu}{\nu} = 0, \quad \left[\omega_{12} \frac{d\nu}{\nu} \right] = 0.$$

Les courbes $\nu = \text{const.}$ ou $d\nu = 0$ sont donc confondues avec les directrices $\omega_{12} = 0$ du réseau angulaire défini par le champ \mathbf{v} ; le long de ces directrices le vecteur \mathbf{v} reste de grandeur constante et est transporté par *équipollence*; autrement dit, la grandeur d'un vecteur \mathbf{v} répondant à la question n'est fonction que de son *inclinaison*, si l'on considère celle-ci comme invariable le long d'une directrice correspondant au champ.

La formule obtenue pour $\nabla_s \mathbf{v}$ peut être écrite dans le cas général

$$(144) \quad \nabla_s \mathbf{v} = \mathbf{v} \frac{\nabla \log \nu'}{\nu'} + \mathbf{w} \mathbf{f} \quad (\nu' = \nu^2).$$

de sorte que les deux termes du second membre se rapportent, l'un au module du vecteur, l'autre à sa direction ou son inclinaison; en comparant (144) à

$$\nabla_s \mathbf{v} = \frac{1}{\nu^2} (\mathbf{v}' - \mathbf{w}^2) \times \nabla_s \mathbf{v}.$$

on voit que \mathbf{f} est bien défini à partir d'un champ \mathbf{v} quelconque par

$$(145) \quad \mathbf{f} = \frac{1}{\nu'} \mathbf{w} \times \nabla_s \mathbf{v}.$$

On a aussi évidemment

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{v} \times \nabla_s \mathbf{w} = \frac{1}{2\rho^2} (\mathbf{w} \times \nabla_s \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \nabla_s \mathbf{w}),$$

mais on voit par contre que

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \nabla_s \mathbf{w} \times \mathbf{v} &= \nu^2 \left(\mathbf{f} - \frac{\mathcal{J} \nabla \log \nu^2}{2} \right), \\ \text{rot}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \text{rot}_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= \nu^2 \left(\mathbf{f} + \frac{\mathcal{J} \nabla \log \nu^2}{2} \right). \end{aligned}$$

La dernière formule donne

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{\rho^2} \left(\text{rot}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \text{rot}_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathcal{J} \nabla \nu^2}{2} \right), \\ \mathbf{g} &= \frac{1}{\rho^2} \left(\text{Rot}_s \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \text{Rot}_s \mathbf{w} \times \mathbf{w} + \frac{\nabla \nu^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left(\text{rot}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \text{rot}_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \frac{\nabla \nu^2}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

De (144) et (146), on tire

$$(147) \quad \begin{aligned} \nabla_s \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho^2} \left(\text{div}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^2 + \text{rot}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v} \nabla \nu^2 - \mathbf{w} \mathcal{J} \nabla \nu^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left(\text{div}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^2 + \text{rot}_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v} - \frac{1}{2} (\mathcal{J} \times \mathbf{v} \mathcal{J} \nabla \nu^2) \right). \end{aligned}$$

On tire aussi de (144)

$$(148) \quad \left\{ \begin{aligned} \nabla_s \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_2 \mathbf{f} = \frac{1}{\rho^3} \mathbf{w}^2 \times \nabla_s \mathbf{v}, \\ \text{rot}_s \mathbf{a}_1 &= \frac{1}{\rho^3} \mathbf{v} \mathbf{w}^2 \mathcal{J} \nabla_s \mathbf{v}, \quad \text{div}_s \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\rho^3} \mathbf{w}^2 \mathcal{J} \nabla_s \mathbf{v}. \end{aligned} \right.$$

15. Nous aurons parfois à mettre en évidence les paramètres des lignes de base du repère $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ou du similirepère $\mathbf{f}\mathbf{g}$; nous poserons alors

$$\mathbf{a}_1 = \Lambda_1(\alpha_1, \alpha_2) \nabla \alpha_1, \quad \mathbf{a}_2 = \Lambda_2(\alpha_1, \alpha_2) \nabla \alpha_2, \quad \mathbf{f} = P(\lambda, \mu) \nabla \lambda, \quad \mathbf{g} = Q(\lambda, \mu) \nabla \mu,$$

les paramètres et fonctions introduits étant du reste soumis aux conditions résultant des relations entre $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ (de telles formes supposant aussi la connaissance de facteurs intégrants de $\omega_1 = 0$, etc.).

Quand on passe, par rotation de φ , d'un repère $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ au repère $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$, on substitue à $\mathbf{f}\mathbf{g}$ un similirepère $\mathbf{f}'\mathbf{g}'$

$$\mathbf{a}'_1 = e^{i\varphi} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{f}' = \mathbf{f} \nabla \varphi.$$

L'opération générale qui fait passer de $\mathbf{f}\mathbf{g}$ à $\mathbf{f}'\mathbf{g}'$ est une similitude de

rappport et d'angle variables en tout point de la surface; nous pouvons envisager différents cas où cette similitude remplira certaines conditions, qui se traduiront pour φ par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles auxquelles cet angle devra satisfaire, conditions dont la compatibilité ou l'indétermination sera à étudier. Nous dirons alors que les réseaux (angulaires) \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}'_1 sont *assemblés* par telle ou telle opération.

La notion la plus importante semble celle des réseaux assemblés par *homothétie*, que nous appellerons réseaux *directement associés* (ou associés directs); les réseaux directement associés ont en commun les deux faisceaux orthogonaux de directrices et de lignes de front et par suite aussi les réseaux angulaires engendrés à partir de ces faisceaux.

Revenons sur les propriétés géométriques des réseaux angulaires; la formule déjà établie

$$\mathbf{g} = g_1 \mathbf{a}_2 - g_2 (-\mathbf{a}_1)$$

ou son équivalente

$$g_{\varphi_0} = g_1 \cos \varphi_0 - g_2 \sin \varphi_0 \quad (\varphi = \varphi_0, \text{ constante})$$

qui donnent la courbure géodésique en un point des courbes d'un réseau angulaire montrent que le vecteur \mathbf{g} est la résultante de deux vecteurs de courbure géodésique de courbes orthogonales du réseau, et qu'il résume par suite en tout point les propriétés de courbure géodésique de ce réseau. Représentons par Φ l'angle $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$, en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_1 &= e^{\mathcal{J}\Phi} \mathbf{a}_1, \\ g_1 &= f \cos \Phi, & g_2 &= f \sin \Phi, \\ (149) \quad g_{\varphi_0} &= f \cos(\Phi - \varphi_0). \end{aligned}$$

La ligne du réseau tangente à \mathbf{f} a donc la courbure géodésique extrema $\pm f$; la ligne du réseau tangente à \mathbf{g} a au point considéré une inflexion géodésique, c'est-à-dire qu'en ce qui concerne ses éléments différentiels superficiels, ils ne diffèrent de ceux d'une géodésique qu'à partir du troisième ordre. Ceci explique pourquoi le déplacement parallèle, guidé le long d'une directrice, peut être appelé translation géodésique, et le vecteur \mathbf{g} le géodèse du réseau.

Quant aux courbures géodésiques des lignes de front et directrices, elles sont données par

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \nabla \Phi, \\ g = g_1 \cos \Phi - g_2 \sin \Phi \quad \frac{d\Phi}{ds} = f \quad \frac{d\Phi}{ds} \quad \text{pour } \mathbf{f}, \\ g' = -g_1 \sin \Phi - g_2 \cos \Phi \quad \frac{d\Phi}{ds^2} = \frac{d\Phi}{ds^2} \quad \text{pour } \mathbf{g}. \end{array} \right.$$

46. Considérons maintenant les réseaux directement associés à un premier réseau angulaire; nous obtenons pour φ l'équation aux dérivées partielles

$$(151) \quad \mathbf{g}' \times \mathbf{f} = [\mathbf{f}' \mathbf{f}]_s = [\nabla \varphi \cdot \mathbf{f}]_s = 0, \quad [\omega_{12} d\varphi] = 0,$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{M} \nabla \varphi,$$

M étant un facteur intégrant de l'équation $\omega_{12} = 0$; d'autre part, d'après (148),

$$\mathbf{f} = P \nabla \lambda, \quad \varphi = F(\lambda), \quad \text{fonction arbitraire de } \lambda,$$

$$\mathbf{f} = P \nabla \lambda = \frac{1}{M} \frac{dF}{d\lambda} \nabla \lambda,$$

$$\mathbf{f}' - \left(P \frac{dF}{d\lambda} \right) \nabla \lambda = \frac{M + 1}{M} \nabla \varphi = (M + 1) \mathbf{f}.$$

A tout facteur intégrant de l'équation des directrices correspond donc un réseau associé direct du réseau primitif, et inversement. Mais d'après la condition des rotationnels, on doit avoir

$$\mathbf{k} = [\nabla \log M \cdot \mathbf{f}] = -\mathbf{g} \times \nabla \log M.$$

$M = \frac{1}{P} \frac{dF}{d\lambda}$ ne peut par suite en général être constant ni indépendant de μ sur toute la surface.

Si l'on superpose localement en \mathbf{m} au repère $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ un repère $\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}'_2$, les lignes des deux réseaux tangentes en \mathbf{m} y auront pour courbures géodésiques respectivement g_{φ_0} et $(M + 1) g_{\varphi_0}$. Donnons un exemple pour le cas du plan (et des surfaces développables) où, contrairement au cas général, on peut prendre $M = M_0$, constante.

Soit le faisceau linéaire de cercles passant par deux points fixes $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$, d'équation

$$x' - y' - \nu B y - \alpha' = 0,$$

faisceau générateur d'un réseau de loxodromies, qui comprend aussi le faisceau orthogonal de cercles dont \mathbf{o}_1 et \mathbf{o}_2 sont les points limites de Poncelet, donné par

$$x' - \nu \Lambda x + y' - \alpha' = 0.$$

Considérons en même temps le double faisceau de coniques homofocales de foyers \mathbf{o}_1 et \mathbf{o}_2 , d'équation

$$\frac{x''}{C} + \frac{y''}{C - a^2} - 1 = 0,$$

également générateur d'un réseau angulaire.

Soit \mathbf{a}_1 le vecteur unitaire tangent à un cercle du premier faisceau, vecteur faisant l'angle α avec l'axe $[\mathbf{o}_2, \mathbf{o}_1]$; on a pour le premier réseau

$$\mathbf{f} = \nabla\alpha.$$

Mais pour un déplacement angulaire $d\alpha$ du rayon d'un cercle du premier faisceau, une bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{o}_1, \mathbf{m}\mathbf{o}_2}$ tourne seulement de $\frac{1}{2} d\alpha$, donc pour le second réseau angulaire

$$\mathbf{f}' = \frac{1}{2} \nabla\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{f}, \quad \mathbf{g}' = \frac{1}{2} \mathbf{g}.$$

Les deux réseaux angulaires considérés sont donc associés directs, l'homothétie étant constante et de rapport $\frac{1}{2}$; les centres des cercles orthogonaux qui se coupent en un point \mathbf{m} permettant la construction de \mathbf{g} , on retrouve ainsi une construction connue des centres de courbure des coniques à centre : les cercles osculateurs de coniques homofocales en un point \mathbf{m} appartiennent à un faisceau, homothétique dans le rapport 2 de celui formé par les cercles passant par \mathbf{m} , et pris dans les faisceaux linéaires déterminés par les deux foyers (points de base ou points limites).

Les directrices (isoclines) et lignes de front des réseaux associés précédents sont d'ailleurs les hyperboles équilatères concentriques dont \mathbf{o}_1 et \mathbf{o}_2 sont deux points fixes symétriques par rapport au centre, d'une part; les lemniscates orthogonales, d'autre part.

De même, si l'on considère un faisceau de cercles concentriques et les droites concourantes orthogonales faisant partie d'un réseau de spirales logarithmiques de pôle \mathbf{o} , ce réseau est directement associé à un double faisceau orthogonal de paraboles homofocales, et un raisonnement analogue montre que le rapport d'homothétie est encore $\frac{1}{2}$; on a donc, pour construire les centres de courbure des paraboles, une construction semblable à la précédente. Les directrices et lignes de front des réseaux directement associés sont les droites et cercles du premier réseau, et sont aussi communes à tous les réseaux directement associés, définis à partir de faisceaux formés de courbes homothétiques par rapport à \mathbf{o} .

47. La théorie des réseaux directement associés s'applique aux problèmes de raccordement des plans aux surfaces ⁽¹⁾ (coordonnées géodé-

⁽¹⁾ Pour les espaces euclidiens tangents et osculateurs à une variété de Riemann, cf. E. CARTAN (E. R.).

siques, coordonnées normales). Soit en effet un premier réseau correspondant à un front \mathbf{f} ; comme nous l'avons vu, il y a généralement en un point \mathbf{m}_0 une ligne de la surface, tangente à \mathbf{g} , qui possède en ce point une inflexion géodésique, et une seule,

$$\mathbf{f}_0 = P(\lambda_0, \mu_0)(\nabla\lambda)_0 \neq 0.$$

Considérons un réseau associé direct, de front

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' &= \mathbf{f} \quad \nabla\varphi, \quad \varphi = F(\lambda), \\ \mathbf{f}' &= \left(P + \frac{dF}{d\lambda} \right) \nabla\lambda. \end{aligned}$$

On peut évidemment choisir l'étoile du second réseau pour qu'elle soit *euclidienne* en \mathbf{m}_0 (ou que le réseau soit euclidien en ce point); toutes les lignes du second réseau auront alors en \mathbf{m}_0 une inflexion géodésique (il suffit que cela ait lieu pour deux lignes du réseau); on prendra F satisfaisant à

$$P(\lambda_0, \mu_0) \left(\frac{dF}{d\lambda} \right)_0 = 0, \quad \mathbf{f}'_0 = 0.$$

Mais on peut plus généralement choisir la fonction arbitraire F pour avoir

$$P(\lambda, \mu_0) - \frac{dF}{d\lambda} = 0,$$

et alors le second réseau est euclidien tout le long de la ligne $\mu = \mu_0$, constante, c'est-à-dire de la ligne de front passant en \mathbf{m}_0 ; or nous avons vu qu'une ligne arbitraire pouvait servir de ligne de front, donc on pourra déterminer un réseau euclidien tout le long d'une ligne quelconque de la surface. Le long de cette ligne, on aura aussi

$$\widehat{\text{rot}}_s \mathbf{g}' - \text{div}_s \mathbf{f}' = \left(\frac{dP}{d\lambda} - \frac{d^2 F}{d\lambda^2} \right) (\nabla\lambda)^2 = 0.$$

48. Les réseaux directement associés, sur lesquels nous aurons à revenir, rentrent dans la famille plus générale des réseaux assemblés par une similitude d'angle constant, que nous appellerons réseaux *associés*. Les réseaux associés avec un angle $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1) = V_0$, constant, correspondent à la relation

$$(152) \quad \mathbf{f}' = \mathbf{f} \quad \nabla\varphi = \frac{f'}{f} e^{\mathcal{J}V_0} \mathbf{f}.$$

d'où pour φ l'équation aux dérivées partielles

$$(153) \quad (\mathbf{g} \cos V_0 - \mathbf{f} \sin V_0) \times \nabla\varphi = f^2 \sin V_0,$$

qu'on peut écrire

$$\text{tang } V_0 = \frac{\mathbf{g} \times \nabla \varphi}{\mathbf{f} \times (\mathbf{f} + \nabla \varphi)},$$

de sorte que l'ensemble des réseaux associés à un réseau angulaire est donné par l'équation $\nabla V_0 = 0$, qui correspond pour φ à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre.

Les réseaux associés sont en relation étroite avec une suite de réseaux qu'une importante opération permet de déduire d'un réseau donné; nous avons donné au paragraphe 44 la formule

$$(145) \quad \mathbf{f} = \frac{1}{\rho^2} \mathbf{w} \times \nabla_s \mathbf{v}$$

définissant le front d'un réseau à partir d'un vecteur \mathbf{v} d'un champ; la suite de vecteurs

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= \mathbf{w} \times \nabla_s \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} [\mathbf{v}, \nabla_s \mathbf{v}], & \bar{\mathbf{w}} &= \mathcal{J} \bar{\mathbf{v}}, \\ \bar{\bar{\mathbf{v}}} &= \bar{\mathbf{w}} \times \nabla_s \bar{\mathbf{v}}, & & \dots\dots\dots, \\ & \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

se déduit du premier vecteur \mathbf{v} par une opération analogue à la dérivation géométrique fournissant le vecteur $\nabla_s \mathbf{v} \times \mathbf{v}$; mais nous préférons à cette opération celle définie par la formule (145), qui donne la suite de fronts (et de guides)

$$(154) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{f}, & \mathbf{g} = \mathcal{J} \mathbf{f}, \\ \mathbf{f}^* = \frac{1}{f^2} \mathbf{g} \times \nabla_s \mathbf{f}, & \mathbf{g}^* = \mathcal{J} \mathbf{f}^*, \\ \mathbf{f}^{**} = \frac{1}{f^{*2}} \mathbf{g}^* \times \nabla_s \mathbf{f}^*, & \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

pour lesquels on peut aussi utiliser les formules (146), donnant en particulier

$$(155) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}^* = \frac{1}{f^2} \left(-\mathbf{K} \mathbf{f} + \mathbf{I} \mathbf{g} - \frac{\mathcal{J} \nabla f^2}{2} \right), \\ \mathbf{g}^* = \frac{1}{f^{*2}} \left(-\mathbf{I} \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{g} + \frac{\nabla f^2}{2} \right), \end{array} \right. \quad \mathbf{I} = \text{rot}_s \mathbf{g} = \text{div}_s \mathbf{f} \quad (1).$$

(1) On pourrait attacher à une des quantités f^* ou $\log f^2$ le nom de (*première*) courbure d'un réseau angulaire, et appeler \mathbf{I} la *seconde* courbure ou torsion du réseau.

et d'après (147)

$$(156) \quad \nabla_s \mathbf{f} = \frac{1}{f^2} (\mathbf{I} \mathbf{g}^2 - \mathbf{h} \mathbf{g} \mathbf{f} - \frac{1}{2} (\mathcal{J} \times \mathbf{f} \mathcal{J} \nabla f^2)). \quad \nabla_s \mathbf{g} = \mathcal{J} \nabla_s \mathbf{f}.$$

Si l'on part d'un premier réseau angulaire, de front \mathbf{f} , défini par un champ \mathbf{v} , et que nous appellerons réseau *dirigeant*, le champ \mathbf{f} engendre à son tour un premier réseau *dirigé*, de front $\dot{\mathbf{f}}$, et une suite de réseaux dirigés successifs, de fronts $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots$. La définition géométrique et la formule (146) permettent d'énoncer l'importante propriété :

Tous les réseaux angulaires associés ont les mêmes réseaux dirigés de tous les ordres; inversement, un réseau angulaire a pour (premiers) réseaux dirigeants tous ceux qui sont associés à l'un quelconque d'entre eux (1).

On voit qu'il y a là une notion analogue à celle de dérivées et de primitives; la condition d'association des réseaux peut donc s'écrire

$$(157) \quad \dot{\mathbf{f}}' - \dot{\mathbf{f}}.$$

On a aussi les relations

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho^2} \bar{\mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{f}} = \frac{1}{f^2} \bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{\rho^2} \bar{\mathbf{v}}, \quad \dots$$

La formule (155) montre d'autre part que la courbure de la surface intervient dès le premier réseau dirigé d'un réseau donné.

On pourra se proposer, sur une suite de réseaux dirigés, des problèmes de répétition et de fermeture qui conduiront à d'intéressantes propriétés géométriques.

49. Les modes d'assemblage des réseaux angulaires étant entièrement arbitraires, nous n'en étudierons pas d'autres pour l'instant, mais nous nous contenterons de signaler comment certains se présenteront. Rappelons les notations

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 = \mathcal{J} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{v} = \rho \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{w} = \mathcal{J} \mathbf{v}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} = \mathcal{J} \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} = f \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathcal{J} \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_1 = e^{\mathcal{J} \Phi} \mathbf{a}_1.$$

à partir d'un repère en ω ; de même à partir d'un repère en ω , les lettres

(1) Autrement dit, un réseau dirigeant détermine un faisceau directeur (faisceau de directrices) qui est générateur du réseau dirigé.

correspondantes accentuées, et en outre

$$\mathbf{a}'_1 = e^{i\varphi} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}'_1 = e^{i\psi} \mathbf{b}_1, \quad \Phi' - \Phi = \psi - \varphi;$$

les lettres se rapportant aux réseaux dirigés porteront des astérisques.

Étant donnés deux réseaux angulaires, ils déterminent sur la surface des faisceaux de lignes suivant lesquels une quantité scalaire en relation avec ces réseaux restera constante — nous dirons *permanente* — le long de la ligne; si ces lignes sont douées de propriétés caractéristiques, ou rentrent dans l'un des réseaux considérés, il en résultera un assemblage particulier; cet assemblage donnera une propriété de réseau si le second réseau se deduisait déjà du premier par une opération connue. On pourra par exemple considérer les lignes pour lesquelles φ ou ψ est permanent, ou f^2 , etc.

Dans les réseaux angulaires figurent, à côté des faisceaux *générateurs* de ce réseau, des faisceaux *parasites* obtenus en groupant autrement les lignes du réseau. Si l'on part d'un faisceau générateur, les lignes du réseau coupent toutes sous angles permanents celles du faisceau et sont les seules à avoir cette propriété. Étudions les réseaux engendrés par les faisceaux parasites d'un premier réseau. Pour $\mathbf{a}'_1 = e^{i\varphi} \mathbf{a}_1$, on doit avoir

$$(158) \quad \nabla \varphi \times \mathbf{a}'_1 = (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \times \mathbf{a}'_1 = 0.$$

Autrement dit, le long des lignes de ce faisceau \mathbf{a}'_1 , on a la relation

$$\omega_{11} - \omega_{12} = 0$$

ou

$$\left(\mathbf{f}' \times d\mathbf{m} - \frac{\Gamma}{ds^2} \right) - \left(\mathbf{f} \times d\mathbf{m} - \frac{\Gamma}{ds^2} \right) = 0$$

obtenue en retranchant les équations différentielles du second ordre des deux réseaux, ce qui donne l'équation du premier ordre du faisceau commun. Mais nous avons établi la condition d'assemblage pour le cas où \mathbf{f}' était le front du faisceau \mathbf{a}'_1 . Sinon, comme le montre le calcul précédent, deux réseaux angulaires déterminent un faisceau d'équation

$$(159) \quad \nabla \varphi \times d\mathbf{m} = (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \times d\mathbf{m} = 0.$$

formé précisément par les lignes à φ permanent entre les deux réseaux. Si ce faisceau appartient à l'un des réseaux, il faut joindre à la précédente l'équation différentielle de ce réseau, et il appartient aussi au second réseau.

Cherchons encore, dans un réseau donné, à déterminer le faisceau *inflexionnel*, formé des lignes qui sont les lieux des points d'inflexion

géodésique des courbes d'un faisceau générateur. Pour une ligne $\varphi = \varphi_0$, constante, en un point d'inflexion géodésique

$$\begin{aligned} g_1 \cos \varphi_0 - g_2 \sin \varphi_0 &= 0, \\ \tan \varphi_0 &= -\frac{g_1}{g_2} = -\frac{\dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{f} \times \mathbf{a}_1}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle du faisceau inflexionnel est donc $d\varphi_0 = 0$ ou

$$(160) \quad \left\{ \begin{aligned} g_1 dg_2 - g_2 dg_1 &= (\mathbf{g} \times \nabla, \mathbf{f} - f' \mathbf{f}) \times d\mathbf{m} = 0, \\ (\dot{\mathbf{f}} - \mathbf{f}) \times d\mathbf{m} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Par suite, le *faisceau inflexionnel est le faisceau à Φ permanent entre le réseau dirigeant et le premier réseau dirigé* (1).

Aux points où la ligne \mathbf{t} du réseau est tangente à l'inflexionnelle correspondante

$$\begin{aligned} d\mathbf{m} - \mathbf{t} ds - \mathbf{b}_2 ds - \frac{ds}{f} \mathbf{g} &= (\mathbf{t} - e^{\mathcal{J}\varphi_0} \mathbf{a}_1), \\ \frac{1}{f} \dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{g} - \frac{\mathbf{g}' \times \nabla_s \mathbf{f}}{f'} - \text{div}_s \mathbf{b}_1 &= \text{rot}_s \mathbf{b}_2 = 0, \end{aligned}$$

donc la directrice \mathbf{g} possède, comme la ligne \mathbf{t} , une inflexion géodésique; d'autre part, le long de \mathbf{t}

$$\frac{dg_2 \cos \varphi_0}{ds} = \frac{dg_1}{ds} \cos \varphi_0 + \frac{dg_2}{ds} \sin \varphi_0 = \frac{g_1 dg_2 - g_2 dg_1}{f ds} = 0,$$

et par suite la ligne \mathbf{t} possède un méplat; les choses se passent comme dans le plan (2), K n'intervenant pas dans le produit $\dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{g}$.

30. LIGNES GÉODÉSIQUES ET RÉSEAU S'Y RAPPORTANT. — Nous allons chercher, par les méthodes des paragraphes 37 et suivants, quand un réseau angulaire contient des géodésiques. Les géodésiques formant aussi un réseau, nous avons à considérer les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma &= 0, \\ ds'(\mathbf{f} \times d\mathbf{m}) - \Gamma &= 0. \end{aligned} \right.$$

En écartant le cas des lignes isotropes, on peut remplacer ce système par

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma &= 0, \\ \mathbf{f} \times d\mathbf{m} &= 0, \end{aligned} \right.$$

(1) Ce résultat est évident par la géométrie, mais nous n'avons pas en vue ici ce genre de solution.

(2) Cf. E. BARRE, *Note sur les lignes isoclines* (C. R. des Séances de la Société math. de France, 1921).

qui montre que les géodésiques d'un tel réseau seront ses directrices; d'après (120), ce système est en général équivalent à

$$(161) \quad \begin{cases} \mathbf{f} \times d\mathbf{m} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{f} \frac{1}{\lambda} (d\mathbf{m})^2 = 0. \end{cases}$$

On obtient immédiatement la condition de compatibilité qui caractérise les réseaux angulaires possédant un faisceau de géodésiques (directrices)

$$(162) \quad f^3 \operatorname{rot}_s \mathbf{b}_s = \nabla_s \mathbf{f} \frac{1}{\lambda} \mathbf{g}^2 = 0,$$

soit

$$(163) \quad \dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{g} = -[\dot{\mathbf{f}}\mathbf{f}]_s = f\dot{f} \sin \dot{V} = 0,$$

condition qu'on peut encore écrire

$$(163') \quad \mathbf{f} \cdot \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot \mathbf{f} = f^2 I.$$

Le fait qu'un faisceau de géodésiques sert de faisceau directeur à un réseau dans lequel il entre suffit à montrer qu'à moins que \mathbf{f} , et par suite \mathbf{K} , ne soient nuls, il est impossible d'avoir deux faisceaux de géodésiques se coupant sous angle constant (Liouville), ou même sous angles permanents.

La condition (162) exprime, en effet, que les directrices du réseau le coupent sous angles permanents et cette propriété est caractéristique. D'un réseau satisfaisant à la condition (162) nous dirons seulement que c'est un réseau à géodésiques; on voit par la formule (163) qu'un tel réseau est directement associé à son premier réseau dirigé (et aux suivants); nous dirons encore qu'il est, ainsi que tous ses associés, *pré-géodésique* et nous réserverons le nom de *géodésique* à un réseau dans lequel le faisceau directeur est un faisceau générateur, c'est-à-dire pour lequel

$$(164) \quad \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f},$$

condition qu'on peut écrire

$$(164') \quad I\mathbf{f} - (\mathbf{K} + f^2)\mathbf{g} - \frac{\nabla f^2}{2} = 0,$$

d'où

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{f^2} \{ I\mathbf{f}^2 + \mathbf{K}\mathbf{f}\mathbf{g} + f^2(\mathbf{f}\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{f}) \}.$$

Un réseau géodésique possède, outre le faisceau directeur de géodé-

siques, le faisceau orthogonal de courbes parallèles qui sont ses lignes de front. Le réseau dirigé d'un réseau à géodésiques et de ses associés (prégéodésiques) est un réseau géodésique (ainsi que tous les dirigés suivants).

Mais un réseau à géodésiques peut aussi satisfaire à la condition plus restrictive

$$(165) \quad \S \nabla, \mathbf{f} \times \mathbf{g} = 0$$

exprimant que la solution de la première équation (161) est solution double pour la seconde; cette condition se développe, en effet, en

$$(166) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1g} - \frac{\mathbf{K}}{2} \mathbf{f} - \frac{\mathbf{J} \nabla f^2}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ \mathbf{1f} - \frac{\mathbf{K}}{2} \mathbf{g} - \frac{\nabla f^2}{2} = 0, \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$(166') \quad \begin{aligned} \nabla, \mathbf{f} &= \frac{1}{f}, \left\{ \mathbf{1f} - \frac{\mathbf{K}}{2} (\mathbf{fg} - \mathbf{gf}) \right\} = \mathbf{1b}_1^2 - \frac{\mathbf{K}}{2} \mathbf{J}, \\ \S \nabla, \mathbf{f} &= \frac{1}{f^2} \mathbf{1f}^2 = \mathbf{1b}_1^2, \\ \dot{\mathbf{f}} &= -\frac{\mathbf{K}}{2f^2} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Un tel réseau sera dit *singulier*; si un réseau géodésique est singulier,

$$(167) \quad \mathbf{K} - 2f^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{J} \mathbf{f}^2 = \text{rot}, \mathbf{f}.$$

Les lignes à courbure totale constante sont les lignes à f^2 permanent du réseau.

51. L'équation (163) montre que pour un réseau à géodésiques, le faisceau inflexionnel est confondu avec le faisceau directeur; dans le cas d'un réseau géodésique, ce faisceau se présente sous forme indéterminée. Nous pourrions interpréter plus loin la seconde équation (161) en la remplaçant par une autre de signification géométrique simple.

Si les conditions trouvées au paragraphe précédent sont satisfaites, elles ont leur répercussion sur la forme qu'on peut donner au ds^2 d'une surface.

Étant donné un tel ds^2 ,

$$ds^2 = E_{11} du_1^2 + 2E_{12} du_1 du_2 + E_{22} du_2^2,$$

on peut le mettre sous la forme $\omega_1^2 + \omega_2^2$ par un choix du repère $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; ce repère une fois choisi, on dispose d'une fonction arbitraire $\varphi(u_1, u_2)$ pour passer, avec un autre repère $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$, à une forme analogue $\omega_1'^2 + \omega_2'^2$. Or, les conditions trouvées permettent de reconnaître, par des différentiations, si le réseau angulaire correspondant à $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ou $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ possède des géodésiques, et son espèce. Comme on passe facilement d'un réseau à géodésiques à un réseau géodésique, nous allons supposer ce dernier cas réalisé et étudier la forme type correspondante: nous prendrons

$$(168) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \nabla \alpha_1, \quad \mathbf{a}_2 = \Lambda_2 \nabla \alpha_2, \\ \text{rot}_s \mathbf{a}_1 = 0, \quad (\nabla \alpha_1)^2 = \Delta(\alpha_1) = 1, \quad \nabla \alpha_1 \times \nabla \alpha_2 = 0, \quad \Lambda_2 [\nabla \alpha_1, \nabla \alpha_2]_s = 1, \\ ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \omega_1^2 = d\alpha_1^2, \quad \omega_2^2 = \Lambda_2^2 d\alpha_2^2, \\ \mathbf{f} = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \alpha_1} \nabla \alpha_1 = -f \mathbf{a}_1, \quad f = -\frac{1}{\Lambda_2} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \alpha_1}, \\ K = -\frac{1}{\Lambda_2} \frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial \alpha_1^2}. \end{array} \right.$$

Si le réseau géodésique est singulier, la fonction Λ_2 doit satisfaire à l'équation

$$(167') \quad \frac{1}{\Lambda_2} \frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial \alpha_1^2} - \frac{1}{\Lambda_2^2} \left(\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \alpha_1} \right)^2 = 0.$$

En prenant $\frac{1}{\Lambda_2}$ pour fonction, on intègre aussitôt, d'où

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\Lambda(\alpha_1, \alpha_2) \cdot B(\alpha_2)},$$

A et B étant des fonctions arbitraires de α_2 ; on obtient donc pour ds^2 la forme

$$(169) \quad ds^2 = d\alpha_1^2 + \frac{d\alpha_2^2}{(\Lambda \alpha_1 \cdot B)^2},$$

comprenant les cas particuliers

$$(169') \quad ds^2 = d\alpha_1^2 + d\alpha_2^2, \quad ds^2 = d\alpha_1^2 + \frac{d\alpha_2^2}{\alpha_1^2},$$

soit le ds^2 plan et un ds^2 de révolution.

§2. On passe d'un réseau géodésique à un autre de même espèce par une rotation φ du repère telle que

$$(170) \quad \begin{aligned} V - \varphi &= U_0, \quad \text{constante,} \\ \nabla(V - \varphi) &= 0, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}' + \nabla \varphi = \frac{f'}{f} e^{\int \nabla \varphi}. \end{aligned}$$

d'où pour V l'équation aux dérivées partielles

$$(171) \quad [(\mathbf{f} \mid \nabla V) \cdot e^{\mathcal{J}V} \mathbf{f}]_s = 0,$$

puis

$$\varphi = V - U_0.$$

Si l'on suppose que les repères $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$ coïncidaient respectivement avec $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2$, la condition (170) se réduit à $V = \varphi$, aussi on peut dire que les réseaux géodésiques assemblés sont *isogyres*.

Pour passer d'un réseau géodésique singulier à un autre de même espèce, l'équation (167) montre qu'il suffit qu'on ait, en outre,

$$(172) \quad f'' = f^2 \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}^{\mathcal{J}^2} = \mathbf{f}^2.$$

De tels réseaux sont donc aussi assemblés par *rotation*; on obtient aussitôt pour φ la condition

$$(173) \quad \begin{aligned} \Delta_1(\varphi) - \nu \mathbf{f} \times \nabla \varphi = 0 & \quad (\Delta_1 \varphi = (\nabla \varphi)^{\mathcal{J}^2}), \\ \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \nu g_1 \varphi_1 - \nu g_2 \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

condition qu'on peut ramener, en posant $\nabla \varphi = 2e^{\mathcal{J}\alpha} \mathbf{f}$, à une équation linéaire pour α . On peut aussi former l'équation en V,

$$(171') \quad \mathbf{f} \mid \nabla V = e^{\mathcal{J}V} \mathbf{f}$$

qui remplace (171).

Enfin, la recherche des géodésiques à partir d'un repère arbitraire $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ conduit à l'équation aux dérivées partielles en φ ,

$$(174) \quad (\mathbf{f} \mid \nabla \varphi) \times e^{\mathcal{J}\varphi} \mathbf{a}_1 = 0.$$

C'est la méthode de Liouville qui donne les intégrales premières connues dans certains cas simples (ds^2 de révolution, ds^2 de Liouville).

§3. RÉSEAUX ISOTHERMES (¹). — Un réseau angulaire est dit *isotherme* (ou isométrique) quand on a

$$(175) \quad \mathbf{I} = \text{rot}_s \mathbf{g} = \text{div}_s \mathbf{f} = 0$$

ou d'après

$$(175') \quad \begin{aligned} \nabla_s \mathbf{f} = \nabla_\omega \mathbf{f} + \mathbf{g} \mathbf{f}, \quad \nabla_s \mathbf{g} = \nabla_\omega \mathbf{g} - \mathbf{f}^2, \\ \mathbf{I} = \text{rot}_\omega \mathbf{g} = \text{div}_\omega \mathbf{f} = g_{11} + g_{22} = 0. \end{aligned}$$

(¹) Cf. G. DARBOUX (T. S.), t. I. — S. LIE (D. G.).

C'est bien une condition de réseau; elle permet de poser

$$\mathbf{g} = \nabla\mu = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2, \quad \mu_1 = \frac{d\mu}{ds_1} = -\mathcal{H}_2, \quad \mu_2 = \frac{d\mu}{ds_2} = \mathcal{H}_1,$$

le champ \mathbf{g} étant un champ de gradients.

On sait qu'en choisissant des paramètres α_1, α_2 isométriques pour un repère $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ d'un réseau isotherme, on peut prendre

$$(176) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \lambda \nabla \alpha_1, \quad \mathbf{a}_2 = \lambda \nabla \alpha_2, \\ \lambda' \Delta_1(\alpha_1) = \lambda' \Delta_1(\alpha_2) = \lambda' [\nabla \alpha_1, \nabla \alpha_2], \quad \nabla \alpha_1 \times \nabla \alpha_2 = 0, \\ \Delta_2 \alpha_1 = \nabla_2 \alpha_1 = 0, \quad \Delta_2 \alpha_2 = -\nabla_2 \alpha_1 = 0, \\ \mathbf{g} = \nabla \mu = -\frac{\nabla \lambda}{\lambda} = -\frac{1}{2} \nabla \log \lambda^2, \quad \mathbf{f} = -\mathcal{J} \mathbf{g}, \quad f^* = \Delta_1(\mu), \\ ds^2 = \lambda^2 (d\alpha_1^2 + d\alpha_2^2) = e^{-2\mu} (d\alpha_1^2 + d\alpha_2^2), \\ \mathbf{k} = \Delta_1 \mu = \frac{1}{\lambda} (\Delta_1(\lambda) - \lambda \Delta_1 \lambda). \end{array} \right.$$

Pour passer d'un repère quelconque $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ à un repère isotherme $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$, on a à résoudre l'équation

$$V = I - \Delta_2 \varphi = 0$$

avec

$$\Delta_2 \varphi = \varphi_{11} - \varphi_{22} - \mu_1 \varphi_1 - \mu_2 \varphi_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2},$$

aussi la condition d'assemblage des réseaux isothermes est

$$(177) \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

dont on prendra la solution

$$\varphi = F(\alpha_1 - i\alpha_2) + \bar{F}(\alpha_1 + i\alpha_2).$$

F étant une fonction arbitraire, et \bar{F} la fonction conjuguée, si l'on veut pour φ une solution réelle correspondant à une rotation du repère.

Avant de revenir à la solution générale de l'équation

$$(178) \quad \Delta_2 u = 0.$$

nous remarquerons qu'un réseau isotherme est caractérisé par la présence en chaque point d'une *simili-étoile isotherme*, comprenant, par exemple, les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \nabla \alpha_1 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{w}_1 = \nabla \alpha_2 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{a}_2, \quad \nu_1 = \frac{1}{\lambda},$$

formée de vecteurs gradients de même longueur, et définissant toujours le champ directeur

$$\mathbf{g} = \nabla\mu. \quad \mu = \frac{1}{2} \log v_i^2,$$

d'après (146) ou (176). La formule (147) montre aussi que pour tous les vecteurs \mathbf{v}_i de cette simili-étoile, les noyaux dérivés $\nabla_i \mathbf{v}_i$ se réduisent à des homographies droites, ce qui est aussi caractéristique d'un réseau isotherme.

Le module de cette simili étoile demeure constant le long des lignes de front du réseau

$$\omega_i = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{m} = \nabla_i \mu \times d\mathbf{m} = 0.$$

On voit mieux maintenant comment se pose le problème de la détermination des réseaux isothermes et sa relation à celui de la représentation conforme. Pour un tel réseau, en effet, la fonction μ doit être solution de l'équation

$$(179) \quad \Delta_2 \mu = K.$$

Si l'on considère alors deux réseaux isothermes avec

$$\mathbf{g} = \nabla\mu, \quad \mathbf{g}' = \nabla\mu' = \nabla\mu + \mathcal{J} \nabla\varphi,$$

on aura

$$\Delta_2(\mu' - \mu) = 0, \quad \nabla(\mu' - \mu) = \mathcal{J} \nabla\varphi.$$

de sorte que, de même que φ , la fonction $\mu' - \mu = \frac{1}{2} \log \frac{v_i'^2}{v_i^2}$ devra être solution de l'équation (178) et une solution conjuguée de la solution φ . Mais une solution générale u de cette équation, du type $u = \varphi - i\gamma$, permet de substituer au repère $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ un similirepère $\mathbf{v}' \mathbf{w}'$ par la similitude $e^{\tilde{\varphi}_i \mathcal{J} + \gamma \mathcal{U}_s} = e^{\tilde{\gamma}} e^{\mathcal{J} \tilde{\varphi}}$.

Or, les similirepères $\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i$ et $\mathbf{v}'_i \mathbf{w}'_i$ définissent la similitude

$$\frac{v'_i}{v_i} e^{\mathcal{J} \tilde{\varphi}} = e^{\tilde{\gamma}} e^{\mathcal{J} \tilde{\varphi}} = (\mu' - \mu) \mathcal{U}_s = e^{\mathcal{S}}.$$

Comme évidemment

$$\mathcal{S} = a \mathcal{J} + b \mathcal{U}_s$$

entraîne

$$\Delta_r \mathcal{S} = \mathcal{J} \Delta_s a + \mathcal{U}_s \Delta_r b;$$

\mathcal{S} devra être une solution de l'équation

$$(178') \quad \Delta_r \mathcal{S} = 0.$$

isomorphe de l'équation (178). Mais, en outre, on peut écrire

$$\mathbf{g}' = \mathbf{I}_1 \nabla_s (\mu' \mathbf{u}_s) = \mathbf{I}_1 \nabla_s (\mu \mathbf{u}_s + \varphi \mathcal{J});$$

donc \mathcal{S} doit aussi satisfaire à l'équation

$$(180) \quad \mathbf{I}_1 \nabla_s \mathcal{S} = 0.$$

Une similitude \mathcal{S} satisfaisant à ces conditions étant trouvée, on passera, par la similitude $e^{\mathcal{S}}$, d'une simili-étoile isotherme \mathbf{v}_i à une autre analogue \mathbf{v}'_i .

§4. Une autre propriété des réseaux isothermes est la suivante : les formules (90) donnent

$$(181) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_s \mathbf{a}_1 = -f^2 \mathbf{a}_1 : \mathbf{I} \mathbf{a}_2, \quad \Delta_s \mathbf{a}_2 = -\mathbf{I} \mathbf{a}_1 - f^2 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{I} = \mathbf{a}_1 \times \Delta_s \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 \times \Delta_s \mathbf{a}_2; \end{array} \right.$$

donc pour les vecteurs unitaires \mathbf{a}_i d'un réseau isotherme, $\Delta_s \mathbf{a}_1$ est suivant le vecteur \mathbf{a}_1 . On peut transformer cette condition pour un vecteur

$$(182) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= \nu \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{w} \times \Delta_s \mathbf{v}}{\nu^2} = \nabla \log \nu^2 \times \mathbf{f}; \end{aligned}$$

aussi pour les vecteurs \mathbf{v}_i d'une simili-étoile isotherme, on aura encore

$$(182') \quad \mathbf{w}_i \times \Delta_s \mathbf{v}_i = 0.$$

Se peut-il enfin que le réseau dirigé d'un réseau isotherme soit lui-même isotherme? cas dans lequel le premier serait en même temps *pré-isotherme*. On pourrait répondre à cette question en cherchant à déterminer V pour satisfaire à l'équation

$$\Delta_s V = 0, \quad \text{tang } V = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

ce qui donne une équation du troisième ordre pour μ . Mais on a plus simplement

$$\mathbf{f} = P(\lambda, \mu) \nabla \lambda = -\mathcal{J} \nabla \mu,$$

et si le réseau dirigé est isotherme, \mathbf{f} et \mathbf{g} devront avoir un multiplicateur commun les transformant en des gradients; ce multiplicateur doit donc être une fonction de μ seul, et en changeant le paramètre λ ,

on pourra se ramener à la forme

$$\mathbf{f} = P(\mu) \nabla \lambda = -\mathcal{J} \nabla \mu,$$

le facteur intégrant cherché étant $\frac{1}{P(\mu)}$. Dans ces conditions,

$$\operatorname{div}_s \mathbf{f} = P(\mu) \Delta_s \lambda = 0;$$

donc le paramètre λ doit être une solution de l'équation (178), et au paramètre μ on pourra substituer ν tel que

$$\mathbf{g} = \nabla \mu = P(\mu) \nabla \nu, \quad \nabla \nu = \frac{1}{P(\mu)} \nabla \mu.$$

On obtient ainsi pour μ la nouvelle condition

$$(183) \quad \left. \begin{aligned} \Delta_s \nu &= \frac{1}{P^2} \left\{ P \Delta_s \mu - \frac{dP}{d\mu} \Delta(\mu) \right\} = 0, \\ \frac{\Delta_s \mu}{\Delta(\mu)} &= \frac{d \log P}{d\mu}. \end{aligned} \right\}$$

Donc $\frac{\Delta_s \mu}{\Delta(\mu)}$ devra être une fonction de μ seul, ce qui déterminera ensuite

la fonction P ; on voit que dans ce cas $\frac{K}{f^2}$ est constant le long des lignes $\mu = \text{const.}$, c'est-à-dire des lignes de front du réseau isotherme dirigeant; on trouvait d'ailleurs aussitôt cette propriété caractéristique en partant de la formule (155) réduite à

$$\dot{\mathbf{f}} = -\frac{K}{f^2} \mathbf{f} - \frac{1}{2} \mathcal{J} \nabla \log f^2$$

et exprimant

$$(184) \quad \operatorname{div}_s \dot{\mathbf{f}} = -\mathbf{f} \times \nabla \frac{K}{f^2} = 0.$$

La formule (155) donne aussi la condition pour qu'un réseau soit seulement préisotherme

$$(185) \quad \mathbf{f} \times \nabla \frac{K}{f^2} = \mathbf{g} \times \nabla \frac{I}{f^2}.$$

Sur les surfaces développables, en particulier, tout réseau isotherme est aussi préisotherme.

33. SOMMETS ET CERCLES GÉODÉSQUES. — Une ligne présente un

sommet géodésique en un point quand la courbure géodésique γ est extrema; dans un réseau angulaire donné, considérons un faisceau générateur \mathbf{t} :

$$\mathbf{t} = e^{\int \varphi_0} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{g} = \mathbf{f} \times \mathbf{t}.$$

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \nabla_{\mathbf{g}} \times \mathbf{t} = \nabla_s \mathbf{f} \times \mathbf{t}' + \mathbf{f} \times \mathbf{qf} \times \mathbf{t} - (\nabla_s \mathbf{f} - \mathbf{gf}) \times \mathbf{t}^2.$$

Il est bon de rappeler, ce qui permet des interprétations géométriques, que

$$\nabla_s \mathbf{f} - \mathbf{gf} = \nabla_{\omega} \mathbf{f}, \quad \mathbf{g} \times \nabla_{\omega} \mathbf{f} = f^2 (\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}) = f' \nabla \phi,$$

le noyau dérivé relatif $\nabla_{\omega} \mathbf{f}$ intervenant souvent dans les calculs.

Un sommet d'une ligne \mathbf{t} étant caractérisé par

$$(186) \quad (\nabla_s \mathbf{f} - \mathbf{gf}) \times \mathbf{t}' + \nabla_{\omega} \mathbf{f} \times \mathbf{t}^2 = 0.$$

il y a, en chaque point de la surface, deux lignes d'un réseau angulaire présentant un sommet. On peut, comme on l'a fait pour les inflexions, chercher les lignes de faite (lieux des sommets) des faisceaux générateurs, et le faisceau faitier qu'elles déterminent; il suffit pour cela de différentier l'équation (186) en gardant φ_0 constant, et d'éliminer \mathbf{t} entre cette équation et celle ainsi obtenue

$$\nabla_s \nabla_{\omega} \mathbf{f} \times \mathbf{t}' + \nabla_{\omega} \mathbf{f} \times \widehat{\mathbf{tqf}} \times \mathbf{t} = 0.$$

$$(187) \quad (\nabla_s \nabla_{\omega} \mathbf{f} - (\nabla_s \times \nabla_{\omega} \mathbf{f}) \mathbf{f}) \times \mathbf{t} + \nabla_{\omega} \mathbf{f} \times \mathbf{t}^2 = 0.$$

Comme on a à former le résultant de deux équations du second degré, il peut du reste se présenter des cas singuliers si l'une des équations a une racine double, ou chacune.

Un cercle géodésique ayant un sommet en chacun de ses points satisfait dans un réseau à l'équation

$$(188) \quad (\nabla_s \mathbf{f} - \mathbf{gf}) \times (d\mathbf{m})' = 0,$$

$$d\omega \mathbf{f} \times d\mathbf{m} = [d\mathbf{m}, d\omega \mathbf{g}] = 0,$$

qui est celle des lignes le long desquelles la différentielle relative de \mathbf{g} est dans la direction du déplacement. C'est cette équation (188) qui pouvait remplacer la seconde équation du système (161) relatif aux réseaux à géodésiques.

En partant de l'équation des cercles géodésiques sous la forme

$$\Gamma - g_0 ds = 0 \quad (g_0 \text{ constante}),$$

et y joignant l'équation des réseaux angulaires

$$\Gamma - (\mathbf{f} \times d\mathbf{m}) ds^2 = 0,$$

on trouve que les réseaux à cercles géodésiques sont caractérisés par le système

$$(189) \quad \begin{cases} (\mathbf{f}^2 - g_0^2 \mathbf{e}^{(2)})_{,x} (d\mathbf{m})' = 0, \\ (\nabla_s \mathbf{f} - g\mathbf{f})'_{,x} (d\mathbf{m})' = 0. \end{cases}$$

de deux équations du second degré, dont l'une contient une constante arbitraire.

Nous ne discuterons pas davantage ce système, qui peut mener en particulier à des réseaux circulaires ou bicirculaires, ni les propriétés qu'apporte à ces réseaux la condition d'isothermie. Nous n'étudierons pas davantage les réseaux à coniques géodésiques, ni ceux relatifs aux ds^2 de Liouville, et nous nous bornerons à un dernier cas assez général, qui se ramène au précédent.

§6. RÉSEAUX ANGULAIRES DÉFICIENTS (1). Nous appellerons ainsi les réseaux pour lesquels les courbures géodésiques de deux faisceaux générateurs sont liées par une relation identique, et qui satisfont donc à la condition

$$(190) \quad [\nabla_{g_1} \cdot \nabla_{g_2}]_s = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 0.$$

D'après

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{f} &= \mathbf{a}_1 \nabla_{g_1} - \mathbf{a}_2 \nabla_{g_2} - g\mathbf{f}, \\ \frac{1}{\lambda} \nabla f^2 &= \mathbf{f} \times \nabla_s \mathbf{f} - g_1 \nabla_{g_1} - g_2 \nabla_{g_2}, \\ f^2(\dot{\mathbf{f}} - \mathbf{f}) &= \mathbf{g} \times \nabla_s \mathbf{f} - f^2 \mathbf{f} = -g_s \nabla_{g_1} - g_1 \nabla_{g_2}, \end{aligned}$$

on a

$$[\nabla_{g_1} \cdot \nabla_{g_2}]_s = \frac{1}{2} [\nabla f' \cdot (\dot{\mathbf{f}} - \mathbf{f})]_s = \frac{1}{2} [\nabla f' \cdot \nabla \Phi].$$

Pour les réseaux déficients

$$(190') \quad [\nabla f' \cdot \nabla \Phi]_s = [\nabla f' \cdot (\dot{\mathbf{f}} - \mathbf{f})]_s = 0,$$

le faisceau inflexionnel est donc aussi le faisceau à f^2 permanent du réseau, et par suite f' dépend seulement de l'inclinaison Φ ; ceci est



(1) Cf. à propos de ces réseaux G. DEMARTRES, *Sur certaines familles de courbes orthogonales et isothermes* (Trav. et Mém. de l'Un. de Lille, 1901), et pour le cas du plan E. Cesàro (N. G.).

bien d'accord avec le fait que

$$\nabla_{\omega} \mathbf{f} = \mathbf{a}_1 \nabla_{g_1} - \mathbf{a}_2 \nabla_{g_2}$$

est alors une dyade et que par suite la grandeur du vecteur \mathbf{f} doit être fonction seulement de son inclinaison *dans le repère mobile* (§ 17).

Les réseaux déficients comprennent comme cas particuliers les réseaux à f^2 constant et les réseaux géodésiques. La condition pour qu'un réseau déficient soit seulement prégéodésique serait

$$(191) \quad \mathbf{g} \mathbf{f} \lambda \nabla_{\lambda} \mathbf{f} = 0.$$

Dans ce cas, $\nabla_{\lambda} \mathbf{f}$ serait également une dyade, et les géodésiques du réseau en seraient les lignes à f' permanent.

Mais, dans le cas général, le faisceau inflexionnel, qui est parasite dans le réseau déficient, est formé de cercles géodésiques (¹); en effet, on a alors

$$\nabla_{\omega} \mathbf{f} = \mathbf{c} \nabla f',$$

\mathbf{c} étant un vecteur arbitraire; le faisceau inflexionnel a pour équation

$$\nabla f' \times d\mathbf{m} = 0.$$

Par suite, l'équation

$$\nabla_{\omega} \mathbf{f} \lambda (d\mathbf{m})' = 0$$

qui donnerait les cercles d'un réseau est bien satisfaite pour les lignes inflexionnelles.

37. RÉSEAUX ANGULAIRES INCIDENTS. — À côté des réseaux qui jouissent simultanément de plusieurs des propriétés précédemment établies, et que nous ne pouvons tous passer en revue, nous allons revenir à la condition d'assemblage des réseaux *incidents*, c'est-à-dire qui ont en commun un même faisceau de courbes, générateur pour un des réseaux de l'assemblage, que nous dirons réseau de base de celui-ci, et parasite pour les autres.

Nous avons établi, au paragraphe 49, que le faisceau à φ permanent entre deux réseaux incidents

$$\nabla \varphi \times d\mathbf{m} = 0$$

doit appartenir à ceux-ci; en joignant à cette équation celle d'un des réseaux

$$\Gamma - (\mathbf{f} \times d\mathbf{m}) ds^2 = 0,$$

(¹) G. Demartres (*loc. cit.*) n'a mis en évidence les cercles que pour les réseaux déficients isothermes.

on forme le système à satisfaire, d'où la condition d'assemblage en φ ; on peut en effet substituer au système précédent

$$(192) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \varphi \times d\mathbf{m} = 0, \\ (\nabla^2 \varphi - \mathcal{J} \nabla \varphi \cdot \mathbf{f}) \times (d\mathbf{m})^2 = \nabla_{\omega}^2 \varphi \times (d\mathbf{m})^2 = 0. \end{array} \right.$$

La condition générale d'assemblage est

$$(193) \quad \nabla_{\omega}^2 \varphi \times (\mathcal{J} \nabla \varphi)^2 = \nabla_{\omega}^2 \varphi \cdot (\nabla \varphi)^2 = 0.$$

Si l'on porte les vecteurs unitaires \mathbf{t} et \mathbf{q} suivant $-\mathcal{J} \nabla \varphi$ et $\nabla \varphi$, cette condition exprime naturellement (\mathbf{t} étant tangent aux lignes du faisceau commun)

$$-\operatorname{div}_{\omega} \mathbf{q} = \operatorname{rot}_{\omega} \mathbf{t} = 0,$$

c'est-à-dire la permanence de φ par rapport au repère considéré.

Il existe une condition d'assemblage plus restrictive

$$(194) \quad \mathcal{J} \nabla_{\omega}^2 \varphi \times \mathcal{J} \nabla \varphi = 0.$$

Il y a avantage, pour interpréter ces conditions, à mettre en évidence les front et guide \mathbf{f}_{ψ} et \mathbf{g}_{ψ} du réseau de base de l'assemblage

$$\mathbf{f}_{\psi} = \mathbf{f} \quad \nabla \psi, \quad \psi = (\mathbf{a}_1, \mathbf{t}).$$

La condition (192) s'écrit

$$(192') \quad \left(\frac{\mathcal{J} \nabla \varphi \times \nabla_{\omega}^2 \varphi}{\Delta(\varphi)} - \mathbf{f} \right) \times \mathcal{J} \nabla \varphi = 0,$$

$$\nabla \psi \times \mathcal{J} \nabla \varphi = [\nabla \varphi, \nabla \psi]_s = 0;$$

donc ψ est une fonction arbitraire de φ , ce que nous savions.

La condition (193) donne après quelques réductions

$$(193') \quad \nabla \varphi \times (\mathbf{f} \quad \nabla \psi) = 0.$$

Considérons en chaque point le vecteur

$$\mathbf{a}'_1 = e^{\mathcal{J} \psi} \mathbf{a}_1,$$

symétrique de \mathbf{a}_1 par rapport au vecteur \mathbf{t} du faisceau commun; alors

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} \quad \nabla \psi.$$

aussi le réseau \mathbf{a}'_1 , *symétrique* du réseau initial et incident à celui-ci, a pour faisceau de front le faisceau commun, et par suite a pour réseau dirigé le réseau de base de l'assemblage. On est alors ramené à l'étude

des réseaux incidents à leur réseau dirigé, les lignes de front du réseau dirigeant constituant le faisceau commun; avec les méthodes déjà employées, cela conduit au système

$$(194) \quad \begin{cases} \mathbf{g} \times d\mathbf{m} = 0, \\ (\nabla_s \mathbf{g} + \mathbf{f}') \times (d\mathbf{m})^2 = 0, \end{cases}$$

qu'on peut aussi écrire

$$\begin{cases} \mathbf{g} \times d\mathbf{m} = 0, \\ (\nabla_s \mathbf{f} - \mathbf{g}\mathbf{f}) \times d\mathbf{m} \cdot \mathcal{J} d\mathbf{m} = 0, \end{cases}$$

d'où la condition générale

$$(195) \quad \mathbf{f} \times (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) = 0.$$

Dans un tel assemblage de réseaux incidents, assemblage dit *singulier*, on a, à partir du réseau de base,

$$\mathbf{f} \times \nabla \varphi = \mathbf{f} \times (\mathbf{f}' - \mathbf{f}) = 0,$$

donc

$$[\nabla \varphi \cdot \nabla \mu]_s = 0. \quad \varphi = F(\mu), \text{ fonction arbitraire de } \mu.$$

L'assemblage singulier de réseaux incidents est donc, pour les lignes de front $\omega_{12} = 0$, l'analogue de l'assemblage par réseaux directement associés pour les directrices $\omega_{12} = 0$. Tout facteur intégrant de l'équation $\omega_{12} = 0$ donne un réseau incident singulier au réseau initial; dans le cas où celui-ci est isotherme, ω_{12} est d'ailleurs une différentielle exacte.

La condition plus restrictive

$$(196) \quad \mathbf{f} \times \mathcal{S}(\nabla_s \mathbf{g} + \mathbf{f}') = 0$$

donne

$$(196') \quad \begin{cases} \nabla f^2 = \frac{1}{2} \mathbf{K} \mathbf{g}, \\ \mathbf{f}' = \mathbf{f} + \frac{1}{f} \mathbf{g}, \quad 3\mathbf{K} + 4f^2 = 0. \end{cases}$$

Les lignes de front du réseau sont alors les lignes à f^2 permanent de ce réseau et les lignes à courbure totale constante de la surface.

38. LES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES (1). — Certains des problèmes précédemment traités peuvent être considérés du point de vue des

(1) Voir sur ce sujet, G. BOULIGAND (G. V.).

transformations infinitésimales effectuées sur la surface. Pour une telle transformation définie dans l'espace

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathbf{m} &= \mathbf{u}, \\ \mathfrak{C}d\mathbf{m} &= d\mathfrak{C}\mathbf{m} = d\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} \times d\mathbf{m}. \end{aligned}$$

En nous bornant aux vecteurs \mathbf{v} superficiels, nous pourrions encore poser, pour un champ de tels vecteurs \mathbf{v} et des déplacements superficiels,

$$\mathfrak{C}\mathbf{m} = \mathbf{v}, \quad \mathfrak{C}d\mathbf{m} = d\mathfrak{C}\mathbf{m} = d\mathbf{v} - \nabla_s \mathbf{v} \times d\mathbf{m}.$$

On aura en particulier

$$(197) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}(d\mathbf{m})^2 = 2\nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathfrak{C}(d\mathbf{m})' = 2\mathfrak{S} \nabla_s \mathbf{v} \cdot \mathfrak{C}(d\mathbf{m})^2, \\ \mathfrak{C}[d_1 \mathbf{m}, d_2 \mathbf{m}], \quad [d_1 \mathbf{m}, d_2 \mathbf{m}], \quad \mathfrak{H} \nabla_s \mathbf{v} = [d_1 \mathbf{m}, d_2 \mathbf{m}], \quad \text{div}_s \mathbf{v}. \end{array} \right.$$

Il y aura souvent avantage à considérer, en même temps que le champ \mathbf{v} et la transformation infinitésimale attachée, le champ défini par les vecteurs $\mathbf{w} = \mathfrak{J}\mathbf{v}$, et l'on aura des cas particuliers intéressants quand ces vecteurs pourront être fronts ou guides de réseaux angulaires :

$$\text{rot}_s \mathbf{f} = -\text{div}_s \mathbf{g} = -\mathbf{k}.$$

Comme champs remarquables, on pourra considérer ceux pour lesquels

$$(198) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_s \mathbf{v} = 0, \quad \mathfrak{H} \nabla_s \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla\alpha \\ \text{(champ de gradients)}. \end{array} \right.$$

$$(199) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}_s \mathbf{v} = 0, \quad \mathfrak{U} \nabla_s \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathfrak{J} \nabla\beta \\ \text{(transformation } \mathfrak{C} \text{ conservant les surfaces)}. \end{array} \right.$$

$$(200) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D} \nabla_s \mathbf{v} = 0, \quad \nabla_s \mathbf{v} \times \mathfrak{K} \nabla_s \mathbf{v} = \gamma' \mathfrak{U}_s \\ \text{(transformation } \mathfrak{C} \text{ conforme)}. \end{array} \right.$$

et enfin ceux satisfaisant simultanément aux dernières conditions, ou

$$(201) \quad \mathfrak{S} \nabla_s \mathbf{v} = 0 \quad \text{(transformation } \mathfrak{C} \text{ conservant les longueurs)}.$$

Cette relation (201) exprime les conditions de Killing pour qu'une surface admette un groupe de déplacements à un paramètre (1). On peut poser dans ce cas

$$(202) \quad \nabla_s \mathbf{v} = \alpha \mathfrak{J}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{rot}_s \mathbf{v},$$

(1) Cf. D.-J. STRUIK (M. D.).

d'où, en appliquant la condition d'intégrabilité (98),

$$(203) \quad \begin{aligned} \nabla_s \mathbf{v} &= -\mathbf{K} \mathbf{w} = -\nabla \alpha, \\ \mathbf{v} &= -\frac{\int \nabla \alpha}{\mathbf{K}}, \quad \nu^2 = \frac{\Delta(\alpha)}{\mathbf{K}^2}, \quad \mathbf{v} = \nu \mathbf{a}_1. \end{aligned}$$

Mais

$$(204) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}_s \mathbf{v} &= \operatorname{rot}_s \mathbf{w} = 0, \\ [\nabla \alpha \cdot \nabla \mathbf{K}]_s &= 0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\alpha) \text{ ou } \alpha = \alpha(\mathbf{K}). \end{aligned}$$

Posons

$$(205) \quad \begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\nabla \alpha}{\mathbf{K}} = \nabla B(\alpha) = \nabla \beta(\mathbf{K}), \\ \operatorname{div}_s \mathbf{w} &= \int_1 \nabla_s \mathbf{w} = \Delta_s B = \Delta_s \beta = -2\alpha, \end{aligned}$$

relation à laquelle doit satisfaire \mathbf{K} ; il s'ensuit que $\Delta_1(\alpha)$ comme $\Delta_2 \alpha$ sont fonctions de α seul, ou $\Delta_1(\mathbf{K})$ et $\Delta_s \mathbf{K}$ fonctions de \mathbf{K} . Le réseau angulaire défini par le champ \mathbf{v} est donc à la fois géodésique et isotherme, son faisceau de lignes parallèles étant celui des lignes

$$\mathbf{K} = \text{const.} \quad (\alpha = \text{const.}, \nu^2 = \text{const.});$$

on a du reste pour ce réseau

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\mathbf{w} \times \nabla_s \mathbf{v}}{\nu^2} = \frac{\alpha \mathbf{K}^2}{\Delta_1(\alpha)} \mathbf{v}, \quad \mathbf{g} = \frac{\alpha \mathbf{K}}{\Delta_1(\alpha)} \nabla \alpha = \nabla G(\alpha), \\ \Delta_s \mathbf{v} &= -\mathbf{K} \mathbf{v}, \quad \Delta_s \mathbf{w} = -\mathbf{K} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

On voit aussitôt que le ds^2 de la surface est de révolution et peut se ramener aux formes

$$(206) \quad ds^2 = d\alpha_2^2 + \Lambda_2^2 d\alpha_1^2 = \Lambda_3^2 (d\alpha_1^2 + d\beta_2^2),$$

$\alpha_2, \beta_2, \Lambda_2$ étant des fonctions de α (ou ν , ou \mathbf{K}).

Pour une surface à ds^2 de révolution, on peut encore dire que le champ \mathbf{v} est un champ de moments, ou mieux un champ de vitesses (pour le déplacement superficiel défini par \mathfrak{C}); considérons en effet tous les vecteurs unitaires \mathbf{a}'_1 issus d'un point de la surface; à chacun d'eux correspond un front f' . Or des équations

$$(207) \quad \mathbf{a}'_1 \times \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{a}'_1) = \mathbf{a}'_1{}^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{f}' \times \mathbf{a}'_1)(\mathbf{v} \times \mathbf{a}'_2) = 0.$$

$$(208) \quad \mathbf{f}' \times \mathbf{a}'_1 = 0,$$

$$(209) \quad \nabla_s \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}'_1{}^2 = \mathfrak{S} \nabla_s \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}'_1{}^2 = 0,$$

L'une quelconque est conséquence des deux autres; une propriété caractéristique des ds' étudiés est que, le long des géodésiques ($\mathbf{f}' \times \mathbf{a}'_1 = 0$), la projection du vecteur \mathbf{v} sur la tangente à la géodésique est constante, soit avec nos notations

$$(207') \quad \mathbf{v} \times \mathbf{a}'_1 = v \cos \varphi = \text{const.}$$

C'est l'intégrale première bien connue des géodésiques des ds^2 de révolution, avec son interprétation mécanique, et ceci précise en même temps la signification de c .



CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CONFORME DES COURBÉS ET SURFACES.

I. — L'espace conforme et le déplacement du repère mobile.

59. Nous avons, au Chapitre I (V, § 9), introduit les sphères et les plans de l'espace euclidien (nous nous bornons ici au cas de $n = 3$ dimensions) comme produits intérieurs (avec le symbole \times) de points et vecteurs de cet espace, ou sommes de tels produits. On peut considérer ces éléments comme ceux d'un nouvel espace linéaire C , à $n + 2 = 5$ unités de base, qui, soumis aux opérations du groupe conforme G_c , s'échangent entre eux comme les éléments primitifs d'un espace projectif E , soumis aux opérations d'un sous-groupe G_{um} précédemment considéré (IV, § 6), conservant le produit intérieur relatif à une hyperquadrique fondamentale ou absolu.

Nous admettons dans C , l'identification symbolique des éléments contrevariants et covariants et rappelons d'abord les dénominations usuelles attachées à ces éléments et leurs principales combinaisons (¹), les produit et carré intérieurs dans C , étant représentés, entre éléments primitifs, par $\mathbf{A} | \mathbf{B}$ et \mathbf{A}^2 .

(co)-point.....	$\mathbf{A}, [\mathbf{ABCD}]$	sphère (y compris point et plan)
» de l'absolu.....	$\mathbf{A}^2 = 0$	» -point (ou point)
un (co)-point particularisé de l'absolu.....	\mathbf{E}_4	point à l'infini
(co)-points conjugués.....	$\mathbf{A} \mathbf{B} = 0$	sphères orthogonales
(co) point conjugué de \mathbf{E}_4 .	$\mathbf{A} \mathbf{E}_4 = 0$	plan
(co)-droite.....	$[\mathbf{AB}], [\mathbf{ABC}]$	cercele (faisceau ou réseau de sphères)

Le passage aux coordonnées (pentasphériques) peut se faire, avec le produit intérieur et par l'intermédiaire des grandeurs géométriques, de

(¹) Cf. E. MULLER, *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Monatsh. f. Math. u. Phys., III, IV, 1892, 1893).

la façon qui suit ⁽¹⁾. Pour deux sphères générales

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha \mathbf{a}' \times \mathbf{a}'' = \alpha (\mathbf{a}'^2 - R^2 \mathbf{u}^2), & \mathbf{B} &= \beta \mathbf{b}' \times \mathbf{b}'' = \beta (\mathbf{b}'^2 - R'^2 \mathbf{u}^2), \\ (210) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= -\frac{\alpha\beta}{1} (\overrightarrow{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} \times \overrightarrow{\mathbf{a}''\mathbf{b}''} + \overrightarrow{\mathbf{a}'\mathbf{b}''} \times \overrightarrow{\mathbf{a}''\mathbf{b}'}) = -\frac{1}{\gamma} \alpha\beta (\overrightarrow{\mathbf{a}\mathbf{b}}^2 - R^2 \overrightarrow{\mathbf{b}\mathbf{u}}^2 - R'^2 \overrightarrow{\mathbf{a}\mathbf{u}}^2), \\ (210') \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= -\frac{1}{\gamma} \alpha\beta (d^2 - R^2 - R'^2). & \mathbf{A}^2 &= \alpha^2 R^2. \end{aligned}$$

L'équation de la sphère **A** est obtenu avec le point variable $\mathbf{X} = \mathbf{x}^2$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \alpha \overrightarrow{\mathbf{a}'\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{a}''\mathbf{x}} - \alpha (\overrightarrow{\mathbf{a}\mathbf{x}}^2 - R^2) = 0.$$

Parmi les formes du second ordre, celles qui sont symétriques représentent les cyclides et définissent des transformations polaires par rapport à ces surfaces; les *produits* extérieurs du second ordre correspondent aux cercles, et les transformations alternées qu'ils définissent échangent une sphère passant par le cercle considéré en une sphère orthogonale du même faisceau, et, pour une sphère quelconque, annulent la composante orthogonale au cercle considéré.

Pour donner quelques notions des configurations de cercles et des relations angulaires entre sphères et cercles, il sera nécessaire de préciser quelques notations, dans le but d'établir un accord avec celles qu'on emploie généralement pour les relations d'incidence ⁽²⁾.

Soient deux sphères **A** et **B** qu'on peut prendre unitaires

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = 1.$$

on a alors pour leur angle ω

$$(211) \quad \cos \omega = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \sin^2 \omega = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$

Or, entre formes extérieures, on emploie des notations du type

$$\begin{aligned} [\mathbf{AB}] \perp \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}, \\ [\mathbf{AB}] \perp [\mathbf{CD}] &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

les liaisons commençant à s'effectuer à gauche; on peut donc écrire

$$(211') \quad \sin^2 \omega = [\mathbf{AB}] \perp [\mathbf{AB}].$$

⁽¹⁾ J'ai employé cette méthode pour les cercles du plan : P. C. DELENS, *L'Enseignement mathématique*, t. XXIII, 1923.

⁽²⁾ Cf. E. MULLER (*loc. cit.*), — J.-L. COOLIDGE (C. S.), — E. VESSIOT, *Jour. de Math.*, t. II, 1923. — A. DEMOULIN, *Bull. de l'Ac. de Belgique*, 5^e série, t. VIII, 1922.

Pour un cercle défini comme faisceau de sphères, il faut distinguer les notations

$$(212) \quad \alpha_0 = [\mathbf{AA}'], \quad \alpha = \sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{A}} = \mathbf{A}'\mathbf{A} - \mathbf{AA}'.$$

Soit un second cercle

$$\beta_0 = [\mathbf{BB}'], \quad \beta = \sqrt{\mathbf{B}'\mathbf{B}} = \mathbf{B}'\mathbf{B} - \mathbf{BB}'.$$

Nous aurons alors les notations concordantes

$$(213) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \perp \beta_0 = -\frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mid \mathbf{B}' \\ \mathbf{A}' \mid \mathbf{B} \quad \mathbf{A}' \mid \mathbf{B}' \end{array} \right| \\ \alpha_0 \perp \alpha = -\frac{1}{2} \alpha^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}'^2 - (\mathbf{A} \mid \mathbf{A}')^2 \end{array} \right.$$

de sorte qu'un cercle sera dit unitaire quand on aura

$$-\frac{1}{2} \alpha^2 = 1.$$

Il sera alors commode de le déterminer par deux sphères unitaires et orthogonales \mathbf{A} et \mathbf{A}' , ce que nous supposons dans la suite de ce paragraphe pour α et β .

L'angle d'une sphère unitaire \mathbf{C} et d'un cercle α sera alors donné par

$$(214) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \psi - (\alpha_0 \perp \mathbf{C})^2 = (\alpha \mid \mathbf{C})^2 = (\mathbf{A} \mid \mathbf{C}) (\mathbf{A}' \mid \mathbf{C}) - (\mathbf{A}' \mid \mathbf{C}) (\mathbf{A} \mid \mathbf{C})^2, \\ \cos^2 \psi - (\mathbf{A} \mid \mathbf{C})^2 - (\mathbf{A}' \mid \mathbf{C})^2 = \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi' \end{array} \right.$$

On a appelé angle de deux cercles (MM. Kœnigs et von Weber) l'angle Ψ donné par

$$(215) \quad \cos \Psi = \alpha_0 \perp \beta_0 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - (\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) (\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}') - (\mathbf{A} \mid \mathbf{B}') (\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}).$$

M. Vessiot a introduit un angle Ψ_1 , inclinaison relative de deux cercles, par la relation

$$(216) \quad 2 - \sin^2 \Psi_1 - (\alpha \mid \mathbf{B})^2 - (\alpha \mid \mathbf{B}')^2 = (\mathbf{A} \mid \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}' \mid \mathbf{B})^2 - (\mathbf{A} \mid \mathbf{B}')^2 - (\mathbf{A}' \mid \mathbf{B}')^2.$$

De même on a défini l'écart angulaire E de deux cercles par

$$(217) \quad E^2 = \sin^2 \Psi_1 - \sin^2 \Psi = [\alpha_0 \beta_0] \perp [\alpha_0 \beta_0].$$

Enfin, il y a *en général* deux cercles perpendiculaires communs à deux cercles donnés; dans le cas où l'on suppose entre les sphères \mathbf{A} , \mathbf{A}' , \mathbf{B} , \mathbf{B}' les relations

$$(218) \quad \mathbf{A} \mid \mathbf{B}' = \mathbf{A}' \mid \mathbf{B} = 0,$$

Les conditions traduisant certaines positions relatives de deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{B} seront par suite

$$[\mathcal{C}_0 \mathcal{B}_0] = 0, \quad \text{cercles bisécants}$$

ou cosphériques, tandis que

$$[\mathcal{C}_0 \mathcal{C}_0] = 0, \quad [\mathcal{B}_0 \mathcal{B}_0] = 0$$

expriment que \mathcal{C}_0 et \mathcal{B}_0 sont des cercles.

$$(222') \quad E^3 = [\mathcal{C}_0 \mathcal{B}_0] \perp [\mathcal{C}_0 \mathcal{B}_0] = 0, \quad \text{cercles sécants,}$$

la sphère orthogonale étant une sphère-point.

$$E^3 = 0, \quad \sin^2 \Psi = 0, \quad \text{cercles tangents,}$$

$$(215') \quad \mathcal{C} \perp \mathcal{B} = 0, \quad \text{cercles en involution}$$

ou orthogonaux, tandis que

$$\mathcal{C}^2 = 0$$

exprime que \mathcal{C} est un cercle-point, commun à un faisceau de sphères tangentés.

$$(224) \quad \mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C} = (\mathcal{C}\mathcal{B}) = 0, \quad \text{cercles en biinvolution}$$

ou conjugués.

$$(223') \quad \sin^2 \Psi_1 - \frac{1}{4} \{ E^3 = \frac{1}{4} \{ (\mathcal{C}^2)^2 - \mathcal{C}^2 \mathcal{B}^2 (\mathcal{C} \perp \mathcal{B})^2 \} = 0, \quad \text{cercles paractactiques}$$

ou isogonaux; la condition d'involution peut être considérée comme exprimant une double parataxie.

61. Revenons aux systèmes de sphères de l'espace conforme; en partant d'un repère euclidien normal $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, on pourra prendre comme unités de base de G ,

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_0^2, \quad \mathbf{E}_1 = \nu \mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \nu \mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{E}_3 = \nu \mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E}_4 = -\nu \mathbf{e}_1^2 = \nu \mathbf{e}_2^2 = -\nu \mathbf{e}_3^2$$

satisfaisant aux conditions

$$\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2 = \mathbf{E}_3^2 = \mathbf{E}_0 \mid \mathbf{E}_4 = 1,$$

$$\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_4^2 = \mathbf{E}_0 \mid \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i \mid \mathbf{E}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Une orientation étant en outre fixée, l'ensemble de ces éléments

constituera un repère fixe pour l'espace conforme C_3 , et les autres repères que nous utiliserons se déduiront de celui-ci par une transformation conforme de G_c (transformation directe); on peut du reste passer d'un tel repère à une base normale en substituant aux points \mathbf{E}_0 et \mathbf{E}_1 deux sphères orthogonales et unitaires de leur faisceau; avec

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{F} - i\mathbf{G}}{1 - i}, \quad \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F} + i\mathbf{G}}{1 + i}, \quad \mathbf{F}^2 = \mathbf{G}^2 = 1, \quad \mathbf{F} | \mathbf{G} = 0,$$

on aurait

$$|\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_1| = i |\mathbf{F} \mathbf{G}|.$$

Rapporté au repère précédent, l'absolu a pour noyau

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + \mathbf{E}_3^2 + \widehat{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_1}.$$

Le déplacement d'un repère mobile $\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4$ dépendant de 10 paramètres peut s'étudier comme au Chapitre II (1); \mathbf{A} étant une sphère invariablement liée au repère mobile, \mathbf{E} son homologue dans le repère fixe

$$\mathbf{A} = \zeta_j \mathbf{E}, \quad d\mathbf{A} = d\zeta_j \cdot \zeta_j^{-1} \mathbf{A} = \mathcal{U} \mathbf{A},$$

ζ_j étant une transformation du groupe G_c , \mathcal{U} une transformation infinitésimale de ce groupe; mettons en évidence les symboles des transformations infinitésimales de G_c dans le repère mobile (cercles), du type

$$(225) \quad \mathcal{C}_{\alpha} = \mathcal{C}_{pq} = \mathbf{A}_p \mathbf{A}_q - \mathbf{A}_q \mathbf{A}_p = -\mathcal{C}_{qp} \quad (p, q = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Les formules de structure du groupe G_c

$$(\mathcal{C}_{\alpha} \mathcal{C}_{\beta}) = \sum_{\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{C}_{\gamma}$$

contiennent les coefficients $c_{\alpha\beta\gamma}$ déterminés par

$$(226) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{C}_{i0} \mathcal{C}_{ij}) = (\mathcal{C}_{ik} \mathcal{C}_{kj}) = \mathcal{C}_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) (k \neq i, j), \\ (\mathcal{C}_{0i} \mathcal{C}_{ij}) = (\mathcal{C}_{i0} \mathcal{C}_{0j}) = (\mathcal{C}_{i1} \mathcal{C}_{1j}) = (\mathcal{C}_{0k} \mathcal{C}_{kj}) = (\mathcal{C}_{1k} \mathcal{C}_{kj}) = 0, \\ (\mathcal{C}_{0i} \mathcal{C}_{i1}) = \mathcal{C}_{01}, \\ (\mathcal{C}_{0i} \mathcal{C}_{0i}) = (\mathcal{C}_{0k} \mathcal{C}_{ki}) = \mathcal{C}_{0i}, \\ (\mathcal{C}_{i0} \mathcal{C}_{i1}) = (\mathcal{C}_{ik} \mathcal{C}_{ki}) = \mathcal{C}_{i1}. \end{array} \right.$$

(1) Le Mémoire fondamental de M. E. Cartan sur ce sujet est intitulé : *Les Espaces à connexion conforme* (*Annales de la Soc. Pol. de Math.*, 1923).

Aussi, si l'on pose

$$(227) \quad \mathcal{K} = \omega_{00} \mathcal{C}_{00} + \sum_i \omega_{0i} \mathcal{C}_{0i} + \sum_i \omega_{i0} \mathcal{C}_{0i} + \sum_{ij} \omega_{ij} \mathcal{C}_{ji} = \sum_1^{10} \omega_\alpha \mathcal{C}_\alpha,$$

on aura, avec les notations déjà employées,

$$(228) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{K}'_{i0} &= \delta_{i0} \mathcal{K}'_{i0} - d_{i0} \mathcal{K}'_{i0} = \sum_1^{10} \omega'_\alpha \mathcal{C}_\alpha, \\ (\mathcal{K}'_{i0} \mathcal{K}'_{i0}) &= \sum_1^{10} [\omega_\alpha \omega_\beta] (\mathcal{C}_\alpha \mathcal{C}_\beta) = \sum_1^{10} \left([\omega_\alpha \omega_\beta] \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{C}_\gamma \right), \end{aligned} \right.$$

$$(229) \quad \mathcal{K}' = \delta \mathcal{K}' - d \mathcal{K}' = \mathcal{K}'_{i0} + \nu (\mathcal{K}'_{i0} \mathcal{K}'_{i0}),$$

$$(230) \quad (d\mathbf{A})' = (\mathcal{K}' - (\mathcal{K}'_{i0} \mathcal{K}'_{i0})) \mathbf{A} = \mathcal{K} \mathbf{A} = \mathbf{o},$$

$$(230') \quad \mathcal{K} = \sum_1^{10} \omega_\alpha \mathcal{C}_\alpha = \mathcal{K}' - (\mathcal{K}'_{i0} \mathcal{K}'_{i0}) = \mathcal{K}'_{i0} + (\mathcal{K}'_{i0} \mathcal{K}'_{i0}) = \mathbf{o},$$

formules qui groupent les équations de structure de l'espace conforme, mais qu'on ne peut détailler sous la même forme que celles de l'espace euclidien. Les symboles de transformations infinitésimales figurant dans \mathcal{K} sont ceux de rotations conformes autour de cercles ou réels, ou imaginaires, ou évanouissants; M. Cartan a appelé les secondes des homothéties conformes (à deux centres), les dernières des élations (à un centre). Si l'on groupe des élations $\omega_{i0} \mathcal{C}_{0i}$, de centre \mathbf{a}_0 et $\omega_{0i} \mathcal{C}_{i0}$, de centre \mathbf{a}_i en

$$\sum_i \omega_{0i} \mathcal{C}_{0i} + \sum_i \omega_{i0} \mathcal{C}_{i0} = \mathcal{E}$$

et aussi l'homothétie $\omega_{00} \mathcal{C}_{00}$, de centres \mathbf{a}_0 et \mathbf{a}_i , avec les rotations $\omega_{ij} \mathcal{C}_{ji}$

$$(231) \quad \begin{aligned} \omega_{00} \mathcal{C}_{00} + \sum_{ij} \omega_{ij} \mathcal{C}_{ji} &= \mathcal{A}, \\ \mathcal{K} &= \mathcal{E} + \mathcal{A}, \end{aligned}$$

on a aussitôt

$$(232) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{K}'_{00} &= \mathcal{E}' - \nu \{ \mathcal{E} \mathcal{E} \} = \mathcal{E}'_{00} + \nu \{ \mathcal{E} \mathcal{A} \} = \mathbf{o}, \\ \mathcal{K}'_{ii} &= \mathcal{A}' + \{ \mathcal{E} \mathcal{E} \} - \nu \{ \mathcal{E} \mathcal{A} \} - \{ \mathcal{A} \mathcal{A} \} = \mathcal{A}'_{ii} + \{ \mathcal{A} \mathcal{A} \} + \{ \mathcal{E} \mathcal{E} \} = \mathbf{o}. \end{aligned} \right.$$

Cette décomposition ne met en évidence que le faisceau $[\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i]$ et le

réseau orthogonal; si on la poursuit, de manière non absolue, avec

$$\begin{aligned} \sum_i \omega_{0i} \alpha_{i4} &= \mathcal{E}_4, & \sum_i \omega_{i0} \alpha_{0i} &= \mathcal{E}_0, \\ \omega_{00} \alpha_{04} &= \mathcal{H}_{04}, & \sum_{ij} \omega_{ij} \alpha_{ji} &= \mathcal{R}, \end{aligned}$$

on aura en particulier

$$(233) \quad \begin{cases} \mathcal{E}'_{4\omega} + 2 \{ \mathcal{E}_4 \mathcal{H}_{04} \} + 2 \{ \mathcal{E}_4 \mathcal{R} \} = 0, \\ \mathcal{E}'_{0\omega} + 2 \{ \mathcal{E}_0 \mathcal{H}_{04} \} + 2 \{ \mathcal{E}_0 \mathcal{R} \} = 0, \\ \mathcal{H}'_{04} \omega + 2 \mathbb{U} \{ \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_4 \} = 0, \\ \mathcal{R}'_{\omega} + 2 \mathbb{A} \{ \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_4 \} + \{ \mathcal{R} \mathcal{R} \} = 0, \end{cases}$$

en posant de manière symbolique

$$\begin{aligned} 2 \mathbb{U} \{ \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_4 \} &= \sum_i [\omega_{i0} \omega_{0i}] (\alpha_{0i} \alpha_{i4}), \\ 2 \mathbb{A} \{ \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_4 \} &= \sum_{ij} [\omega_{i0} \omega_{0j} - \omega_{j0} \omega_{0i}] (\alpha_{0i} \alpha_{j4}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire les formules établies par M. Cartan

$$(233') \quad \begin{cases} \Omega_{0i} = \omega'_{0i} - [\omega_{00} \omega_{0i}] - \sum_j [\omega_{ij} \omega_{0j}] = 0, \\ \Omega_{i0} = \omega'_{i0} + [\omega_{00} \omega_{i0}] - \sum_j [\omega_{ij} \omega_{j0}] = 0, \\ \Omega_{00} = \omega'_{00} - \sum_i [\omega_{0i} \omega_{i0}] = 0, \\ \Omega_{ij} = \omega'_{ij} - [\omega_{i0} \omega_{0j} - \omega_{j0} \omega_{0i}] - \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] = 0. \end{cases}$$

Les formules que nous utiliserons dans la suite, analogues à (50), seront principalement

$$(234) \quad \begin{cases} d\mathbf{U} = d_{\omega} \mathbf{U} : d\mathcal{E} \mathbf{U}, \\ d^2 \mathcal{Y} = d_{\omega} \mathcal{Y} + (d\mathcal{E} \mathcal{Y}), \\ d\varphi = d_{\omega} \varphi, \end{cases}$$

\mathbf{U} , \mathcal{Y} , φ étant des sphère, homographie, scalaire, à coefficients généralement variables par rapport au repère mobile; la formule de composition des déplacements (conformes) s'établirait aussi comme au para-

graphe 20. On vérifie aussitôt

$$d\mathcal{E} = d^2u = (\mathcal{E}u) = 0.$$

II. -- Déplacement à un paramètre. Courbes de l'espace conforme.

62. Nous particulariserons le repère mobile, suivant la méthode et les indications de M. Cartan, jusqu'à ce qu'il ne dépende plus que du déplacement de son origine, et soit dans la relation la plus simple avec la courbe décrite par cette origine. Les formules relatives à ce déplacement, comme les invariants qui s'y rattachent, ont du reste été obtenues de différentes façons par plusieurs auteurs (1).

En partant des formules générales

$$(235) \quad \begin{cases} d\mathbf{A}_0 = \omega_{00}\mathbf{A}_0 + \omega_{01}\mathbf{A}_1 + \omega_{02}\mathbf{A}_2 + \omega_{03}\mathbf{A}_3 \\ d\mathbf{A}_1 = \omega_{10}\mathbf{A}_0 + \omega_{11}\mathbf{A}_1 + \omega_{12}\mathbf{A}_2 + \omega_{13}\mathbf{A}_3 \\ d\mathbf{A}_2 = \omega_{20}\mathbf{A}_0 + \omega_{21}\mathbf{A}_1 + \omega_{22}\mathbf{A}_2 + \omega_{23}\mathbf{A}_3 \\ d\mathbf{A}_3 = \omega_{30}\mathbf{A}_0 + \omega_{31}\mathbf{A}_1 + \omega_{32}\mathbf{A}_2 + \omega_{33}\mathbf{A}_3 \end{cases}$$

et des formules de structure correspondantes, la première particularisation (*tangente*) consiste à prendre les sphères \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_3 tangentes au déplacement $d\mathbf{a}_0 = d\mathbf{m}$

$$\mathbf{A}_2 | d\mathbf{A}_0 = \omega_{02} = 0, \quad \mathbf{A}_3 | d\mathbf{A}_0 = \omega_{03} = 0,$$

d'où

$$\Omega_{02} = -[\omega_{12}\omega_{01}] = 0, \quad \Omega_{03} = -[\omega_{13}\omega_{01}] = 0.$$

La particularisation *fondamentale*, fixant la connexion induite, est atteinte en prenant pour cercle osculateur le cercle $[\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4]$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4 | d\mathbf{A}_0 &= -d\mathbf{A}_0 | d\mathbf{A}_0 = \omega_{01}\omega_{12} = 0, \\ \mathbf{A}_4 | d\mathbf{A}_0 &= -d\mathbf{A}_3 | d\mathbf{A}_0 = \omega_{01}\omega_{13} = 0. \end{aligned}$$

Le point \mathbf{A}_0 étant mobile, il faut prendre

$$\omega_{11} = \omega_{13} = 0.$$

(1) Cf. H. LIEBMAN, *Beitrage zur Inversionsgeometrie der Kurven* (*Munchener Berichte*, 1923; *Heidelberger Berichte*, 1923), et plusieurs Mémoires de T. TAKASU, en particulier: *Ueber Inversionsinvarianten* (*Tokohu Math. J.*, 26, 1920), et *Natural equations of Curve* (*Tokohu Math. J.*, 25, 1925), qui contient une bibliographie complète.

Nous n'avons pu utiliser un Mémoire de E. VESSIOT, *Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, 25^e cahier, 1926, récemment paru.

d'où

$$\Omega_{12} = [\omega_{20}\omega_{01}] = 0, \quad \Omega_{13} = [\omega_{30}\omega_{01}] = 0.$$

Continuons à particulariser le repère en choisissant pour \mathbf{A}_3 la sphère osculatrice \mathbf{S} , particularisation *osculatrice*, et posons $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}$

$$\mathbf{S} | d^3 \mathbf{A}_0 = -d\mathbf{S} | d^2 \mathbf{A}_0 = \omega_{00}^2, \quad \omega_{30} = \omega_{03} = 0;$$

donc

$$\omega_{30} = 0, \quad \Omega_{30} = -[\omega_{30}\omega_{20}] = 0.$$

Une homothétie conforme de centres \mathbf{a}_0 et \mathbf{a}_4

$$\mathbf{P} = x \mathbf{A}_0$$

permet de faire la particularisation *simple* (1)

$$(236) \quad \begin{aligned} \omega_{20} - \omega_{01} &= 0, \\ \Omega_{10} - \Omega_{01} &= -2[\omega_{00}\omega_{01}] = 0, \end{aligned}$$

terminée par la particularisation *naturelle*, due à une éléation de centre $\mathbf{m} = \mathbf{a}_0$ et définissant la sphère normale naturelle \mathbf{Q} et le pôle naturel \mathbf{V} (l'origine du repère étant en général \mathbf{A}_0 ou \mathbf{a}_0 , nous appelons pôle du repère \mathbf{A}_1 ou \mathbf{a}_1)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_1 + y \mathbf{P}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{A}_1 - \frac{y^2}{2} \mathbf{P},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} | \mathbf{V} &= \omega_{00} = 0, \\ \Omega_{00} &= [\omega_{10}\omega_{01}] = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose alors

$$(237) \quad \omega_{01} = dp, \quad \omega_{10} = c dp, \quad \omega_{23} = t dp,$$

p étant le paramètre naturel, ou arc conforme, on a les formules définitives suivantes (dans lesquelles nous avons modifié légèrement l'ordre des éléments) :

$$(238) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{P} &= \cdot \quad dp \mathbf{Q} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ d\mathbf{Q} &= c dp \mathbf{P} \quad \cdot \quad - dp \mathbf{V} \quad \cdot \quad \cdot \\ d\mathbf{V} &= \cdot \quad - c dp \mathbf{Q} \quad \cdot \quad + dp \mathbf{R} \quad \cdot \\ d\mathbf{R} &= - dp \mathbf{P} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + t dp \mathbf{S} \\ d\mathbf{S} &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - t dp \mathbf{R} \quad \cdot \end{aligned} \right.$$

(1) Une particularisation semi simple $\omega_{20} = \varepsilon_0 \omega_{01}$, ε_0 étant un coefficient constant, amènerait peu de modifications dans les formules; le choix $\varepsilon_0 = -1$ semble donner le maximum de symétrie à celles ci.

Les invariants c et t s'appelleront courbure et torsion conformes; ce dernier, proportionnel à ce qu'on appelle la torsion sphérique en \mathbf{m} , n'intervient pas dans les formules relatives à la connexion de la ligne

$$(239) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_{\mathbf{c}}\mathbf{P} = \quad . \quad - dp\mathbf{Q} \quad . \\ d_{\mathbf{c}}\mathbf{Q} = c dp\mathbf{P} \quad . \quad - dp\mathbf{V} \\ d_{\mathbf{c}}\mathbf{V} = \quad . \quad - c dp\mathbf{Q} \quad . \end{array} \right.$$

Cette connexion s'obtient, comme on sait, par projection conforme des points de la courbe voisins de \mathbf{m} sur le cercle osculateur en ce point, les projetantes étant des sphères orthogonales à ce cercle; à la courbe donnée correspond ainsi son *image circulaire*. De même, en négligeant dans les formules (238) les termes en \mathbf{S} et $d\mathbf{S}$, on obtient

$$(239') \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\mathbf{c}}\mathbf{P} = \quad . \quad dp\mathbf{Q} \quad . \quad . \\ \delta_{\mathbf{c}}\mathbf{Q} = c dp\mathbf{P} \quad . \quad - dp\mathbf{V} \quad . \\ \delta_{\mathbf{c}}\mathbf{V} = \quad . \quad - c dp\mathbf{Q} \quad . \quad - dp\mathbf{R} \\ \delta_{\mathbf{c}}\mathbf{R} = - dp\mathbf{P} \quad . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

formules relatives à la projection de la courbe sur sa sphère osculatrice \mathbf{S} , et qui font correspondre à la courbe donnée son *image sphérique*. Dans le premier cas, la correspondance est réalisée, sur la surface cerclée des cercles osculateurs, par les trajectoires orthogonales de ceux-ci; dans le second cas, par les trajectoires orthogonales de la sphère osculatrice issues des points de la courbe.

63. Nous aurons les expressions précises du paramètre ρ et des invariants c et t en partant d'un repère (conforme) de Serret-Frenet et l'amenant, par des modifications successives, en coïncidence avec celui obtenu précédemment. Soit initialement

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{m}^2, \quad \mathbf{A}_1 = \rho \mathbf{m} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{A}_2 = \rho \mathbf{m} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{A}_3 = 2 \mathbf{m} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{E}_t,$$

d'où par différentiation

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{A}_0 = \quad . \quad ds \mathbf{A}_1 \quad . \quad . \quad . \\ d\mathbf{A}_1 = \quad . \quad . \quad \frac{ds}{\rho} \mathbf{A}_2 \quad . \quad - ds \mathbf{A}_4 \\ d\mathbf{A}_2 = \quad . \quad - \frac{ds}{\rho} \mathbf{A}_1 \quad . \quad + \frac{ds}{\tau} \mathbf{A}_3 \quad . \\ d\mathbf{A}_3 = \quad . \quad . \quad - \frac{ds}{\tau} \mathbf{A}_2 \quad . \quad . \\ d\mathbf{A}_4 = 0 \end{array} \right.$$

L'éléation

$$(240) \quad \overline{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2 + \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0, \quad \overline{\mathbf{A}}_4 = \mathbf{A}_4 - \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_2 - \frac{1}{2\rho^2} \mathbf{A}_0$$

ramène à la particularisation fondamentale, avec

$$\begin{aligned} d\mathbf{A}_1 &= -\frac{ds}{2\rho^2} \mathbf{A}_0 & . & . & . & - ds \overline{\mathbf{A}}_4 \\ d\overline{\mathbf{A}}_2 &= d\left(\frac{1}{\rho}\right) \mathbf{A}_0 & . & . & + \frac{ds}{\tau} \mathbf{A}_3 & . \\ d\mathbf{A}_3 &= \frac{ds}{\rho\tau} \mathbf{A}_0 & . & - \frac{ds}{\tau} \overline{\mathbf{A}}_2 & . & . \\ d\overline{\mathbf{A}}_4 &= & . & \frac{ds}{2\rho^2} \mathbf{A}_1 - d\left(\frac{1}{\rho}\right) \overline{\mathbf{A}}_2 - \frac{ds}{\rho\tau} \mathbf{A}_3 & . & . \end{aligned}$$

La rotation

$$(241) \quad \begin{cases} \mathbf{R} = \cos \zeta \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 - \sin \zeta \cdot \overline{\mathbf{A}}_3, \\ \mathbf{S} = -\sin \zeta \cdot \overline{\mathbf{A}}_2 + \cos \zeta \cdot \overline{\mathbf{A}}_3 \end{cases}$$

avec

$$(241') \quad \overline{\omega}_{30} = -\sin \zeta \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \cos \zeta \frac{ds}{\rho\tau} = 0$$

donne

$$\begin{aligned} \tan \zeta &= -\frac{\rho}{\tau \frac{d\rho}{ds}}, \\ \overline{\omega}_{20} &= d\mathbf{R} | \overline{\mathbf{A}}_4 = \cos \zeta \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \sin \zeta \frac{ds}{\rho\tau} \end{aligned}$$

et conduit à la particularisation osculatrice; $\sin \zeta$ et $\cos \zeta$ ne sont déterminés qu'au signe près. Nous prendrons

$$(242) \quad \begin{cases} \rho = -\sigma \sin \zeta, & \tau \frac{d\rho}{ds} = \sigma \cos \zeta, \\ \sigma = -\rho \sin \zeta - \tau \frac{d\rho}{ds} \cos \zeta, & \sigma^2 = \rho^2 - \left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)^2, \end{cases}$$

σ étant la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{ms}}$, joignant le point \mathbf{m} au centre de la sphère osculatrice \mathbf{S} , suivant l'axe faisant avec \mathbf{b} un des angles ζ déterminés par $\tan \zeta$. Alors

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{20} &= -\frac{\sigma}{\rho^2\tau} ds, \\ d\mathbf{R} &= -\frac{\sigma ds}{\rho^2\tau} \mathbf{A}_0 & . & . & + \left(d\zeta + \frac{ds}{\tau}\right) \mathbf{S} \\ d\mathbf{S} &= & . & - \left(d\zeta + \frac{ds}{\tau}\right) \mathbf{R} \\ d\overline{\mathbf{A}}_4 &= & . & \frac{ds}{2\rho^2} \mathbf{A}_1 + \frac{\sigma ds}{\rho^2\tau} \mathbf{R} \end{aligned}$$

L'homothétie

$$(243) \quad \mathbf{P} = q \mathbf{A}_0, \quad \bar{\mathbf{A}}_1 = \frac{1}{q} \bar{\mathbf{A}}_1,$$

$$(243') \quad \bar{\omega}_{01} = q ds, \quad \bar{\omega}_{20} = \frac{1}{q} \bar{\omega}_{20}$$

avec la particularisation simple

$$(236) \quad \bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{01} = 0$$

entraîne

$$(244) \quad q^2 = \frac{\sigma}{\rho^2 \tau},$$

$$d\mathbf{P} = \frac{dq}{q} \mathbf{P} + q ds \mathbf{A}_1.$$

Enfin l'élation

$$(245) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A}_1 + \frac{dq}{q^2 ds} \mathbf{P}, \quad \mathbf{V} = \bar{\mathbf{A}}_1 - \frac{dq}{q^2 ds} \mathbf{A}_1 - \frac{dq^2}{2q^4 ds^2} \mathbf{P},$$

$$(246) \quad dp = q ds,$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_1 + \frac{dq}{dp} \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{q} \left(\bar{\mathbf{A}}_1 - \frac{dq}{dp} \mathbf{A}_1 - \frac{dq^2}{2 dp^2} \mathbf{A}_0 \right)$$

donne les formules (238) de la particularisation naturelle, avec

$$(247) \quad \left\{ \begin{array}{l} dp' = \frac{\sigma}{\rho^2 \tau} ds', \\ c = \frac{\rho q \frac{d'q}{ds'} - 3 \left(\frac{dq}{ds} \right)^2}{2q^4} - \frac{1}{2\rho^2 q'} = \frac{\rho q \frac{d'q}{dp'} - \left(\frac{dq}{dp} \right)^2}{2q^2} - \frac{1}{2\rho^2 q^2}, \\ t = \frac{1}{q} \left(\frac{d\zeta}{ds} + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{d\zeta}{dp} + \frac{1}{\tau q}. \end{array} \right.$$

On trouve immédiatement pour l'invariant $t = \frac{\mathbf{S}, (\mathbf{S} + d\mathbf{S})}{dp}$

$$(248) \quad t = \frac{\rho d\sigma}{q \sigma \tau d\zeta}, \quad \mu = \frac{\rho^4}{\sigma^3 \tau} \left(\frac{d\sigma}{dp} \right)^2.$$

On peut du reste choisir ζ pour que σ et τ soient de même signe, mais cette convention n'est sans doute pas nécessaire. Quant à l'invariant c , qui ne dépend que de ρ^2 , de q^2 et de ses dérivées (et non de la détermination choisie pour q), nous reviendrons sur son expression.

Toutes ces formules sont valables pour les courbes sphériques (ou planes) $t = 0$, mais pour les courbes planes

$$\frac{1}{\tau} = 0, \quad \tan \zeta = 0, \quad \frac{\sigma}{\tau} = \frac{d\zeta}{ds} \cos \zeta = \pm \frac{d\zeta}{ds},$$

$$q' = \pm \frac{d\rho}{\rho^2 ds}, \quad dp' = \pm \frac{d\rho ds}{\rho^2}.$$

et l'expression de l'invariant c se simplifie.

La particularisation simple a écarté le cas des cercles, pour lesquels $\omega_{20} = 0$; nous excluons en général, avec les courbes minima euclidiennes, les courbes minima conformes, correspondant à

$$(d\mathbf{P})^2 = dp^2 = 0.$$

64. Une courbe est définie, à un déplacement conforme près, par son équation différentielle naturelle, déduite de

$$(238') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}' = \phantom{c\mathbf{P}} \phantom{c'\mathbf{P}} \phantom{+2c\mathbf{Q}} \phantom{+3c'\mathbf{Q}} \phantom{-t\mathbf{S}} \phantom{-2c\mathbf{V}} \\ \mathbf{P}'' = c\mathbf{P} \phantom{c'\mathbf{P}} \phantom{+2c\mathbf{Q}} \phantom{+3c'\mathbf{Q}} \phantom{-t\mathbf{S}} \phantom{-2c\mathbf{V}} \\ \mathbf{P}''' = c'\mathbf{P} \phantom{c''\mathbf{P}} \phantom{+2c\mathbf{Q}} \phantom{+3c'\mathbf{Q}} \phantom{-t\mathbf{S}} \phantom{-2c\mathbf{V}} \\ \mathbf{P}^{IV} = (c'' + 2c^2 + 1)\mathbf{P} \phantom{c'\mathbf{P}} \phantom{c''\mathbf{P}} \phantom{+2c\mathbf{Q}} \phantom{+3c'\mathbf{Q}} \phantom{-t\mathbf{S}} \phantom{-2c\mathbf{V}} \\ \phantom{\mathbf{P}^{IV}} = (c''' + 7cc')\mathbf{P} + (4c'' + 4c^2 + 1)\mathbf{Q} + (t^2 - 2c)\mathbf{R} - t\mathbf{S} - 5c'\mathbf{V} \end{array} \right.$$

les accents indiquant des dérivées par rapport à p , par élimination de $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{V}$

$$(249) \quad t\mathbf{P}^{IV} - t'\mathbf{P}^{IV} - (t^2 - 2ct)\mathbf{P}''' - (5c't - 2c't')\mathbf{P}'' - (4c''t - 3c't' - 2ct^2 + t)\mathbf{P}' - (c'''t - c''t' + c't^3 - t')\mathbf{P} = 0,$$

équation qui se réduit à

$$(249') \quad \mathbf{P}^{IV} - 2c\mathbf{P}''' - 3c'\mathbf{P}'' - (c'' + 1)\mathbf{P} = 0$$

(obtenue en annulant le coefficient de t' dans l'équation générale) pour les courbes sphériques.

On peut aussi tirer

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{P}', & \mathbf{V} &= c\mathbf{P} - \mathbf{P}'', & \mathbf{R} &= c'\mathbf{P} + 2c\mathbf{P}' - \mathbf{P}''', \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{t} \{ (c'' + 1)\mathbf{P} + 3c'\mathbf{P}' + 2c\mathbf{P}'' - \mathbf{P}''' \} \end{aligned}$$

et former l'équation adjointe relative à la sphère osculatrice \mathbf{S} , ou celles auxquelles satisfont $\mathbf{Q}, \mathbf{V}, \mathbf{R}$ (1).

Pour les courbes les plus simples, à courbure et torsion constantes, les sphères $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{V}$ satisfont à une même équation à coefficients constants

$$(250) \quad \mathbf{X} + (t_0^2 - 2c_0 t_0)\mathbf{X}'' - (2c_0 t_0^2 + 1)\mathbf{X}' = 0 \quad (t_0 \neq 0),$$

$$(250') \quad \mathbf{X}'' - 2c_0 \mathbf{X}' - \mathbf{X} = 0 \quad (t_0 = 0),$$

aussi ces courbes sont les trajectoires de groupes à un paramètre de déplacements conformes.

(1) On doit naturellement prendre les solutions $\mathbf{P}^2 = 0, \mathbf{Q}^2 = 1$, etc.

Le contact et l'applicabilité conformes des courbes peuvent s'étudier avec les formules (238) ou (238'). Deux courbes (y compris les cercles) peuvent être amenées en un point à un contact du second ordre. En excluant ensuite les cercles, le contact s'élèvera à l'ordre n (au moins) si les valeurs de t et de ses $n - 4$ premières dérivées ($n > 4$) de c et de ses $n - 5$ premières dérivées ($n \geq 5$) sont égales au point considéré.

De même pour l'applicabilité sans déformation; elle peut toujours être réalisée au second ordre pour deux courbes, au moyen d'une correspondance arbitraire et est possible entre une courbe et un cercle, le cercle osculateur de la courbe en particulier; on peut faire ainsi la représentation d'une courbe sur une autre, avec conservation du rapport anharmonique, par l'intermédiaire des trajectoires orthogonales du cercle osculateur [RS]. L'applicabilité du troisième ordre est possible pour les deux courbes et réalisée par l'égalité des dp correspondants. L'applicabilité du quatrième ordre suppose que t soit la même fonction de p ; celle du cinquième ordre entraîne l'égalité, quand pour les deux courbes c et t sont respectivement les mêmes fonctions de p .

65. Nous allons utiliser le contact du troisième ordre pour préciser la position géométrique du pôle naturel \mathbf{V} attaché à chaque point \mathbf{P} d'une courbe. Considérons pour cela une courbe sphérique à courbure c_0 constante; on sait qu'une telle courbe est une loxodromie, trajectoire sous angle V_0 constant des cercles d'un faisceau linéaire: une transformation linéaire permet de ramener une loxodromie à une spirale logarithmique plane, d'équation polaire

$$r = \alpha e^{\cot V_0 \cdot \theta},$$

$$ds = \frac{r d\theta}{\sin V_0} = \rho d\theta.$$

Nous prendrons

$$q^2 = \frac{d\rho}{\rho^2 ds} = \frac{\cot V_0}{\rho^2}, \quad q = \frac{\sqrt{\cot V_0}}{\rho} = \frac{\sqrt{\sin V_0 \cos V_0}}{r},$$

$$dp^2 = \cot V_0 d\theta^2, \quad dp = \sqrt{\cot V_0} d\theta. \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{\cos V_0}{r};$$

d'où

$$(251)' \quad c_0 = \cot_2 V_0 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - V_0\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - V_0\right)}{\sin V_0 \cos V_0}.$$

Il est commode de poser

$$\gamma_0 = \cot V_0,$$

$$2c_0 = \cot V_0 - \text{tang } V_0 = \gamma_0 - \frac{1}{\gamma_0}.$$

Avec

$$\mathbf{P} = q\mathbf{m}^2, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}' = q'\mathbf{m} \times \left(\mathbf{m} - \frac{2r}{\cos V_0} \mathbf{t} \right),$$

on voit que le pôle naturel \mathbf{V} est le symétrique du point \mathbf{P} par rapport au pôle de la spirale.

Si nous revenons à une loxodromie sphérique, une telle courbe a deux pôles réels et deux pôles imaginaires associés; soient $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4$ les sphères-points correspondantes : \mathbf{V} est le second point d'intersection des cercles $[\mathbf{P}\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]$ et $[\mathbf{P}\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4]$, c'est-à-dire le conjugué harmonique (cyclique) de \mathbf{P} par rapport à \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 .

On trouve les expressions des points \mathbf{C} au moyen des sphères $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{V}$, en posant

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{P} + \beta\mathbf{Q} + \gamma\mathbf{R} + \delta\mathbf{V}, \quad \mathbf{C}^2 = 0.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des coefficients constants, et exprimant que ces points \mathbf{C} sont fixes

$$\mathbf{C}' = (c_0\beta - \gamma)\mathbf{P} + (\alpha - c_0\delta)\mathbf{Q} + \delta\mathbf{R} + \beta\mathbf{V} = \lambda\mathbf{C}.$$

d'où

$$\alpha^2 - (c_0^2 - 1)\gamma^2 = 0, \quad \beta^2 - \alpha\delta - c_0\delta^2 = 0, \quad \beta\gamma - \delta^2 = 0;$$

$$(252) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_1 = \frac{1}{\sin 2V_0} \mathbf{P} - \sqrt{\cot V_0} \mathbf{Q} - \sqrt{\tan V_0} \mathbf{R} + \mathbf{V}, \\ \mathbf{C}_2 = \frac{1}{\sin 2V_0} \mathbf{P} - \sqrt{\cot V_0} \mathbf{Q} + \sqrt{\tan V_0} \mathbf{R} + \mathbf{V}, \\ \mathbf{C}_3 = -\frac{1}{\sin 2V_0} \mathbf{P} + \sqrt{-\tan V_0} \mathbf{Q} - \sqrt{-\cot V_0} \mathbf{R} + \mathbf{V}, \\ \mathbf{C}_4 = -\frac{1}{\sin 2V_0} \mathbf{P} - \sqrt{-\tan V_0} \mathbf{Q} + \sqrt{-\cot V_0} \mathbf{R} + \mathbf{V}. \end{array} \right.$$

Les équations (252) mettent du reste en évidence des sphères de l'un ou de l'autre des faisceaux $[\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{S}]$ ou $[\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{S}]$, soit $\mathbf{P} \pm \frac{1}{\sin 2V_0} \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \pm \sqrt{\cot V_0} \mathbf{R}$, etc., que l'on retrouve aussi par l'équation différentielle

$$(250') \quad \mathbf{X}''' - 2c_0\mathbf{X}'' - \mathbf{X} = (\mathbf{X}'' - \gamma_0\mathbf{X})' + \frac{1}{\gamma_0}(\mathbf{X}'' - \gamma_0\mathbf{X}) = 0.$$

Si l'on remarque alors que les éléments naturels \mathbf{Q} et \mathbf{V} d'une courbe quelconque ne font pas intervenir la courbure c , on peut substituer en chaque point à la courbe une loxodromie sphérique de courbure c nulle qui ait avec elle en ce point un contact du troisième ordre, donc mêmes pôles de courbure \mathbf{C} et mêmes éléments naturels \mathbf{Q}, \mathbf{V} ; cette loxodromie de courbure joue pour les courbes conformes le rôle du cercle osculateur pour les courbes euclidiennes (1).

(1) On pourrait aller jusqu'au contact du quatrième ordre en utilisant une courbe gauche non sphérique de courbure c nulle.

Ajoutons que si $c = 0$, $\mathbf{P} | \mathbf{V}' = 0$, donc \mathbf{V} décrit (sur la surface péri-sphérique enveloppée par \mathbf{S}) une trajectoire orthogonale du cercle osculateur $[\mathbf{RS}]$.

La transformation infinitésimale \mathcal{H} attachée à une courbe peut s'écrire

$$(253) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H} &= \overline{d\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}} + \overline{d\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}} - \overline{d\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} - \overline{d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} + \overline{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}, \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (\overline{d\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}} + \overline{d\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}} - \overline{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}) = \frac{1}{2} (\overline{d\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} - \overline{d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}), \end{aligned} \right.$$

la dernière forme mettant en évidence seulement deux rotations autour de $[\mathbf{QQ}']$ et $[\mathbf{RR}']$, cercles caractéristiques des sphères \mathbf{Q} et \mathbf{R} ; ces deux cercles sont en involution, tandis que le cercle osculateur $[\mathbf{SS}']$ est co-sphérique avec $[\mathbf{RR}']$ (sur \mathbf{R}), et en biinvolution avec $[\mathbf{QQ}']$. Les notions données aux paragraphes 59 et 60 permettraient de pousser davantage l'étude des relations de ces cercles et de leurs déplacements.

La partie de \mathcal{H} relative à la connexion de la courbe est

$$\mathcal{H}_1 = \overline{d\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}.$$

III. — Déplacement à deux paramètres. Les surfaces conformes et leur connexion induite.

66. Nous partons d'un repère mobile général dont l'origine $\mathbf{a}_0 = \mathbf{m}$ décrit une surface. Une première particularisation (*tangente*) consiste à prendre la sphère \mathbf{A}_3 tangente à la surface

$$(254) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{A}_3 | d\mathbf{A}_0 &= \omega_{03} = 0, \\ \omega_{0,3} - [\omega_{11} \omega_{01} \quad \omega_{22} \omega_{02}] &= 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui entraîne

$$\omega_{13} = \alpha_1 \omega_{01} - \alpha_2 \omega_{02}, \quad \omega_{23} = \alpha_3 \omega_{01} + \alpha_2 \omega_{02}.$$

et la symétrie de la forme asymptotique conforme

$$\delta_0^2 = -d\mathbf{A}_3 | d\mathbf{A}_0 = \omega_{01} \omega_{13} - \omega_{02} \omega_{23} = \alpha_1 \omega_{01}^2 + 2\alpha_3 \omega_{01} \omega_{02} + \alpha_2 \omega_{02}^2$$

ou, en posant

$$\varepsilon_0^2 = (d\mathbf{A}_0)^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2,$$

$$\delta_0^2 = \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_1) \varepsilon_0^2 + \alpha_3 \omega_{01} \omega_{02} + \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) (\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2).$$

La particularisation *fondamentale* est atteinte en choisissant pour \mathbf{A}_3 , dans le faisceau des sphères tangentes en \mathbf{m} à la surface, la sphère har-

monique \mathbf{H} qui rend $\delta_0^{(2)}$ apolaire à $\varepsilon_0^{(2)}$

$$(255) \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0, & \delta_0^{(2)} = \nu \alpha_3 \omega_{01} \omega_{02} - \alpha_1 (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2), \\ \omega_{13} = \alpha_1 \omega_{01} + \alpha_3 \omega_{02}, & \omega_{23} = \alpha_3 \omega_{01} - \alpha_1 \omega_{02}; \end{cases}$$

d'où

$$(255') \quad [\omega_{01} \omega_{01} - \omega_{01} \omega_{13}] = 0.$$

ce qui permet d'introduire la forme symétrique principale (des lignes de courbure)

$$\gamma_0^2 = \omega_{01} \omega_{03} - \omega_{02} \omega_{13} = \alpha_3 (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) - 2\alpha_1 \omega_{01} \omega_{02},$$

qui est la jacobienne des formes $\varepsilon_0^{(2)}$ et $\delta_0^{(2)}$.

Par différentiation extérieure de (255'), on obtient

$$(256) \quad \begin{cases} -\nu [\omega_{30} \omega_{01} \omega_{02}] = 0 & ([\omega_{01} \omega_{02}] \neq 0), \\ \omega_{30} = \beta_1 \omega_{01} + \beta_2 \omega_{02}. \end{cases}$$

Désormais nous supposons toujours effectuée la particularisation fondamentale, qui définit la connexion conforme induite sur la surface, la sphère \mathbf{H} étant maintenant une fonction définie de la position de \mathbf{A}_0 . Cette connexion se fait par projection sur la sphère \mathbf{H} des éléments appartenant aux points infiniment voisins de \mathbf{m} , les projetantes étant des cercles orthogonaux à \mathbf{H} . L'homographie de la projection est

$$(257) \quad \begin{cases} \mathcal{C}_S = \mathcal{C}_H - \mathbf{A}_1^2 - \mathbf{A}_2^2 + \widehat{\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_3}; \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_S d\mathbf{A}_0 - d_S \mathbf{A}_0 - \omega_{00} \mathbf{A}_0 - \omega_{01} \mathbf{A}_1 + \omega_{02} \mathbf{A}_2 = \mathcal{C}_S \mathbf{A}_0 = d\mathbf{A}_0, \\ \mathcal{C}_S d\mathbf{A}_1 - d_S \mathbf{A}_1 - \omega_{10} \mathbf{A}_0 - \omega_{11} \mathbf{A}_1 - \omega_{12} \mathbf{A}_2 = \mathcal{C}_S \mathbf{A}_1, \\ \mathcal{C}_S d\mathbf{A}_2 - d_S \mathbf{A}_2 - \omega_{20} \mathbf{A}_0 - \omega_{12} \mathbf{A}_1 - \omega_{22} \mathbf{A}_2 = \mathcal{C}_S \mathbf{A}_2, \\ \mathcal{C}_S d\mathbf{A}_3 - d_S \mathbf{A}_3 - \omega_{10} \mathbf{A}_1 - \omega_{20} \mathbf{A}_2 - \omega_{00} \mathbf{A}_0 = \mathcal{C}_S \mathbf{A}_3 \end{array} \right. \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{C}_S = \omega_{00} \mathcal{C}_{01} + \sum_i \omega_{0i} \mathcal{C}_{1i} + \sum_j \omega_{1j} \mathcal{C}_{0j} - \omega_{12} \mathcal{C}_{21} \quad (i = 1, 2).$$

Dans l'espace, ces formules se complètent par

$$(257') \quad \begin{cases} \mathcal{C}_E = \mathbf{H}; \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_E d\mathbf{A}_1 = d_E \mathbf{A}_1 = \omega_{13} \mathbf{H} = \mathcal{C}_E \mathbf{A}_1, \\ \mathcal{C}_E d\mathbf{A}_2 = d_E \mathbf{A}_2 = \omega_{23} \mathbf{H} = \mathcal{C}_E \mathbf{A}_2, \\ \mathcal{C}_E d\mathbf{A}_3 = d_E \mathbf{A}_3 = -\omega_{30} \mathbf{H} = \mathcal{C}_E \mathbf{A}_3, \\ \mathcal{C}_E d\mathbf{H} = d_S \mathbf{H} = \omega_{30} \mathbf{A}_0 - \omega_{11} \mathbf{A}_1 - \omega_{22} \mathbf{A}_2 = \mathcal{C}_E \mathbf{H} = d\mathbf{H}; \\ \mathcal{C}_E = \omega_{30} \mathcal{C}_{01} + \omega_{11} \mathcal{C}_{11} - \omega_{22} \mathcal{C}_{21}. \end{array} \right. \end{cases}$$

On a aussi

$$(258) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_S = \overline{d_S \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_1} - \overline{d_S \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_0} + \overline{d_S \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1} - \overline{d_S \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2}, \\ \mathcal{H}_S = \overline{d \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_1} - \overline{d \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_0} - \overline{d \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1} + \overline{d \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2} - \overline{d \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}, \\ \mathcal{H}_E = \overline{d \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}, \end{array} \right.$$

formules d'où l'on pourrait déduire les éléments du tenseur de courbure; mais nous attendrons pour cela d'avoir poursuivi la particularisation du repère en simplifiant les homographies \mathcal{H} , et \mathcal{H}_E .

67. Au point où nous en sommes arrivés, le repère dépend de six paramètres dont deux, u_1 et u_2 , relatifs au déplacement de l'origine \mathbf{m} . En laissant ces derniers fixes, c'est à-dire \mathbf{m} et la sphère \mathbf{H} , nous donnerons au repère des déplacements δ de plus en plus restreints par les liaisons qui seront successivement imposées. Avec

$$\begin{array}{l} \omega \delta = e, \\ \delta \mathbf{A}_0 = e_{00} \mathbf{A}_0 \quad . \quad . \quad . \quad e_{01} = e_{02} = 0 \\ \delta \mathbf{A}_1 = e_{10} \mathbf{A}_0 \quad . \quad + e_{12} \mathbf{A}_2 \quad . \\ \delta \mathbf{A}_2 = e_{20} \mathbf{A}_0 - e_{12} \mathbf{A}_1 \quad . \quad . \\ \delta \mathbf{A}_3 = . \quad - e_{10} \mathbf{A}_1 - e_{20} \mathbf{A}_2 - e_{00} \mathbf{A}_3 \\ \delta \mathbf{H} = 0 \quad \quad \quad e_{20} = e_{31} = e_{32} = 0 \end{array}$$

La caractéristique δ rentre donc dans les caractéristiques d_S ; on voit en outre que

$$\begin{array}{l} \delta d \mathbf{A}_0 = d \delta \mathbf{A}_0 = d e_{00} \cdot \mathbf{A}_0 + e_{00} d \mathbf{A}_0, \\ \delta d \mathbf{H} = d \delta \mathbf{H} = 0, \end{array}$$

ce qui correspond du reste aux formules détaillées

$$\begin{array}{l} \delta \omega_{00} = -e_{10} \omega_{01} - e_{20} \omega_{02} - d e_{00}, \\ \delta \omega_{01} = e_{00} \omega_{01} + e_{12} \omega_{02}, \quad \delta \omega_{02} = e_{00} \omega_{02} - e_{12} \omega_{01}, \\ \delta \omega_{12} = e_{10} \omega_{02} - e_{20} \omega_{01} + d e_{12}, \quad \delta \omega_{13} = e_{12} \omega_{23}, \quad \delta \omega_{23} = -e_{12} \omega_{23}, \\ \delta \omega_{30} = -e_{00} \omega_{30} + e_{10} \omega_{13} - e_{20} \omega_{23}, \\ \delta \omega_{10} = e_{10} \omega_{00} - e_{00} \omega_{10} + e_{12} \omega_{20} - e_{20} \omega_{12} + d e_{10}, \\ \delta \omega_{20} = e_{20} \omega_{00} - e_{00} \omega_{20} - e_{12} \omega_{10} - e_{10} \omega_{12} + d e_{20}. \end{array}$$

On a en particulier

$$\begin{array}{l} \delta \varepsilon_0^{(2)} = \delta (d \mathbf{A}_0)^2 = 2 e_{00} \varepsilon_0^{(2)}, \\ \delta \delta_0^{(2)} = \delta (-d \mathbf{H} | d \mathbf{A}_0) = e_{00} \delta_0^{(2)}, \\ \delta \gamma_0^{(2)} = e_{00} \gamma_0^{(2)}, \\ \delta [\omega_{01} \omega_{02}] = \gamma e_{00} [\omega_{01} \omega_{02}], \\ \delta [\omega_{13} \omega_{23}] = 0. \end{array}$$

D'après

$$\begin{aligned} [\omega_{13} \omega_{23}] &= -(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) [\omega_{01} \omega_{02}], \\ \delta(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) &= -2e_{00}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2). \end{aligned}$$

Aussi, en écartant le cas de la sphère et des surfaces imaginaires pour lesquelles $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 0$, on pourra faire la particularisation *simple* ⁽¹⁾

$$(259) \quad [\omega_{13} \omega_{23} \quad \omega_{01} \omega_{02}] = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

d'où par différentiation extérieure

$$(260) \quad \begin{cases} \gamma [\omega_{00} \omega_{01} \omega_{02}] = 0, \\ \omega_{00} = \gamma_1 \omega_{01} + \gamma_2 \omega_{02}, \quad e_{00} = 0. \end{cases}$$

En formant $\delta\gamma_1$ et $\delta\gamma_2$ on voit qu'on peut faire la particularisation *canonique*

$$(261) \quad \omega_{00} = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$$

d'où

$$(262) \quad \begin{cases} \omega'_{00} = [\omega_{01} \omega_{10} + \omega_{02} \omega_{20}] = 0, \\ \omega_{10} = \varepsilon_1 \omega_{01} + \varepsilon_3 \omega_{02}, \quad e_{10} = 0, \\ \omega_{20} = \varepsilon_3 \omega_{01} - \varepsilon_2 \omega_{02}, \quad e_{20} = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'apparaît la nouvelle forme symétrique

$$\lambda_0^2 = -d\mathbf{A}_1 \wedge d\mathbf{A}_0 = \omega_{01} \omega_{10} + \omega_{02} \omega_{20} = \varepsilon_1 \omega_{01}^2 + 2\varepsilon_3 \omega_{01} \omega_{02} + \varepsilon_2 \omega_{02}^2.$$

Avec le seul coefficient e_{12} , il reste

$$\delta\mathbf{A}_1 = e_{12} \mathbf{A}_2, \quad \delta\mathbf{A}_2 = -e_{12} \mathbf{A}_1$$

et l'on peut faire la particularisation particulière que nous appellerons *principale* et que nous caractériserons par des indices romains ou des chevrons

$$(263) \quad \overset{\wedge}{\omega}_{13} = -\overset{\wedge}{\omega}_{01}, \quad \overset{\wedge}{\omega}_{23} = \overset{\wedge}{\omega}_{02}, \quad \alpha_I = -1, \quad \alpha_{III} = 0,$$

donnant par différentiation extérieure

$$(264) \quad \left[\overset{\wedge}{\omega}_{01} \overset{\wedge}{\omega}_{30} - \gamma \overset{\wedge}{\omega}_{01} \overset{\wedge}{\omega}_{10} \right] = 0, \quad \left[-2 \overset{\wedge}{\omega}_{01} \overset{\wedge}{\omega}_{12} + \overset{\wedge}{\omega}_{02} \overset{\wedge}{\omega}_{30} \right] = 0,$$

(1) Nous appellerions *particularisation semi simple* une particularisation obtenue en posant

$$\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = \alpha_0^2, \text{ constante}$$

et qui donnerait sensiblement les mêmes résultats que la précédente, sans exclure le cas $\alpha_0 = 0$.

donc (1)

$$(264') \quad \hat{\omega}_{12} = G_I \hat{\omega}_{01} + G_{II} \hat{\omega}_{02}, \quad e_{12} = 0,$$

et par suite

$$(265) \quad \beta_I = -2G_{II}, \quad \beta_{II} = -2G_I.$$

Il apparaît du reste ici la forme cubique totalement symétrique

$$\hat{\varphi}_0^{(1)} = \hat{\omega}_{01}^2 \omega_{30} - 4 \hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \hat{\omega}_{12} + \hat{\omega}_{02}^2 \omega_{30} = \varepsilon_0^{(2)} \omega_{30} - 2 \gamma_0^{(2)} \hat{\omega}_{12},$$

qui est apolaire à la forme $\delta_0^{(2)}$.

Sil'on remplace alors A_0, A_1, A_2, A_3 respectivement par M, N_I, N_{II}, W , on obtient les formules suivantes :

$$(266) \quad \left\{ \begin{array}{l} dM = \hat{\omega}_{01} N_I \dots\dots\dots \\ dN_I = \begin{pmatrix} -\varepsilon_I \hat{\omega}_{01} & \varepsilon_{III} \hat{\omega}_{02} \end{pmatrix} M \dots\dots\dots \\ dN_{II} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{III} \hat{\omega}_{01} & \varepsilon_{II} \hat{\omega}_{02} \end{pmatrix} M - (G_I \hat{\omega}_{01} + G_{II} \hat{\omega}_{02}) N_I \dots\dots\dots \\ dH = -2 (G_{II} \hat{\omega}_{01} + G_I \hat{\omega}_{02}) M + \hat{\omega}_{01} N_I \dots\dots\dots \\ dW = \dots\dots\dots - (\varepsilon_I \hat{\omega}_{01} + \varepsilon_{III} \hat{\omega}_{02}) N_I \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots + \hat{\omega}_{02} N_{II} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots + (G_I \hat{\omega}_{01} + G_{II} \hat{\omega}_{02}) N_{II} \quad - \hat{\omega}_{01} H \quad - \hat{\omega}_{01} W \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \quad \quad \quad + \hat{\omega}_{02} H \quad - \hat{\omega}_{02} W \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots - \hat{\omega}_{02} N_{II} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots - (\varepsilon_{III} \hat{\omega}_{01} + \varepsilon_{II} \hat{\omega}_{02}) N_{II} + 2 (G_{II} \hat{\omega}_{01} + G_I \hat{\omega}_{02}) H \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

avec les invariants $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}, G_I, G_{II}$ (2). D'où aussi les formules en d_s .

(1) Les équations (264') pourraient être condensées en

$$\left| \varepsilon_0^{(2)} \omega_{30} \right|_1 - 2 \left| \gamma_0^{(2)} \hat{\omega}_{12} \right|_1 = 0$$

avec une notation introduite pour les noyaux.

(2) Sur la géométrie conforme des surfaces, voir en dehors des Mémoires déjà cités (E. Cartan, T. Takasu, etc.) la Thèse de G. THOMSON, *Grundlagen der konformen Flächentheorie* (*Abhandl. u. d. Math. Seminar der Hamburg. Univ.* III (1), 1923). Un important Mémoire de M. E. VESSIOT (*Contribution à la géométrie conforme, théorie des surfaces*) paraîtra prochainement au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LIV, 1926; nous n'avons pu l'utiliser dans ce travail.

68. Pour interpréter en géométrie euclidienne les invariants et les comitants, nous partirons d'un repère euclidien principal et lui ferons subir les modifications successives l'amenant en coïncidence avec le repère $\mathbf{MN}_1 \mathbf{N}_{II} \mathbf{HW}$. Soit initialement

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{m}^{\wedge}, \quad \mathbf{A}_1 = \nu \mathbf{m} \times \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{A}_{II} = 2 \mathbf{m} \times \mathbf{a}_{II}, \quad \mathbf{A}_3 = \nu \mathbf{m} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{A}_4 = 2 \mathbf{n}^{\wedge}.$$

Nous représenterons par des $\hat{\eta}$ les composantes du déplacement du repère et poserons aussi

$$k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad k_{II} = \frac{1}{R_{II}}, \quad H = \frac{1}{\nu} (k_1 + k_{II}), \quad L = \frac{1}{2} (k_{II} - k_1),$$

donc, avec les notations du Chapitre II,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{12} &= g_1 \hat{\eta}_1 + g_{II} \hat{\eta}_2, & \hat{\eta}_{13} &= k_1 \hat{\eta}_1, & \hat{\eta}_{23} &= k_{II} \hat{\eta}_2, \\ \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{A}_0 &= \hat{\eta}_1 \mathbf{A}_1 + \hat{\eta}_2 \mathbf{A}_{II} & . & . & . \\ d\mathbf{A}_1 &= & \hat{\eta}_{12} \mathbf{A}_{II} + \hat{\eta}_{13} \mathbf{A}_3 - \hat{\eta}_1 \mathbf{A}_4 \\ d\mathbf{A}_{II} &= -\hat{\eta}_{12} \mathbf{A}_1 & . & -\hat{\eta}_{23} \mathbf{A}_3 - \hat{\eta}_2 \mathbf{A}_4 \\ d\mathbf{A}_3 &= -\hat{\eta}_{13} \mathbf{A}_1 - \hat{\eta}_{23} \mathbf{A}_{II} & . & . & . \\ d\mathbf{A}_4 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

L'élation

$$(267) \quad \mathbf{H} = \mathbf{A}_3 + \mathbf{H} \mathbf{A}_0, \quad \bar{\mathbf{A}}_4 = \mathbf{A}_4 - \mathbf{H} \mathbf{A}_3 - \frac{H^2}{2} \mathbf{A}_0$$

donne

$$(267') \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega}_{13} &= (k_1 - H) \hat{\eta}_1 = -L \hat{\eta}_1, & \bar{\omega}_{23} &= (k_{II} - H) \hat{\eta}_2 = L \hat{\eta}_2, & \bar{\omega}_{30} &= dH, \\ \bar{\omega}_{10} &= \frac{H}{\nu} (H - 2k_1) \hat{\eta}_1 = -\frac{H}{2} (H - 2L) \hat{\eta}_1, & \bar{\omega}_{20} &= \frac{H}{2} (H - 2k_{II}) \hat{\eta}_2 = -\frac{H}{2} (H + 2L) \hat{\eta}_2. \end{aligned} \right.$$

les autres coefficients ne changeant pas, et ramène à une particularisation fondamentale. L'homothétie

$$(268) \quad \mathbf{M} = x \mathbf{A}_0, \quad \tilde{\mathbf{A}}_4 = \frac{1}{x} \bar{\mathbf{A}}_4$$

donnerait les nouveaux coefficients

$$\bar{\omega}_{00} = \frac{dx}{x}, \quad \bar{\omega}_{01} = x \hat{\eta}_1, \quad \bar{\omega}_{02} = x \hat{\eta}_2, \quad \bar{\omega}_{10} = \frac{\bar{\omega}_{10}}{x}, \quad \bar{\omega}_{20} = \frac{\bar{\omega}_{20}}{x},$$

$$\bar{\omega}_{30} = \frac{\bar{\omega}_{30}}{x},$$

donc on aura

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{13} &= \bar{\omega}_{13} = -\bar{\omega}_{01}, \\ \bar{\omega}_{23} &= \bar{\omega}_{23} = \bar{\omega}_{02},\end{aligned}$$

cas particulier de la particularisation simple, pour

$$(268') \quad r = l.$$

Il reste à faire l'élation menant au repère canonique

$$(269) \quad \mathbf{N}_I = \mathbf{A}_I + y_I \mathbf{M}, \quad \mathbf{N}_{II} = \mathbf{A}_{II} + y_{II} \mathbf{M}, \quad \mathbf{W} = \bar{\mathbf{A}}_I - y_I \mathbf{A}_I - y_{II} \mathbf{A}_{II} - \frac{y_I^2 + y_{II}^2}{2} \mathbf{M}$$

avec

$$(261') \quad \mathbf{W} | d\mathbf{M} = \frac{dL}{L} - L (y_I \hat{\gamma}_I - y_{II} \hat{\gamma}_{II}) = 0$$

pour revenir aux formules (266). On peut poser, avec

$$(269') \quad \frac{dL}{L^2} = y_I \hat{\gamma}_I + y_{II} \hat{\gamma}_{II}, \\ y = -\frac{1}{L}, \quad y_I = \frac{L_I}{L^2}, \quad y_{II} = \frac{L_{II}}{L^2},$$

d'où finalement

$$(270) \quad \hat{\omega}_{01} = L \hat{\gamma}_I, \quad \hat{\omega}_{02} = L \hat{\gamma}_{II}, \quad \hat{\omega}_{13} = -L \hat{\gamma}_I, \quad \hat{\omega}_{23} = L \hat{\gamma}_{II},$$

$$(271) \quad \begin{cases} \varepsilon_0^2 = (d\mathbf{M})^2 = L^2 (d\mathbf{m})^2 = L^2 \varepsilon^{(2)} & [\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02}] = L^2 [\hat{\gamma}_I \hat{\gamma}_{II}], \\ \delta_0^2 = L(\varphi^{(2)} - H \varepsilon^{(2)}) = L^2 \delta^{(2)} & \gamma_0^2 = L \gamma^{(2)}, \end{cases}$$

$$(272) \quad \hat{\omega}_{12} = \hat{\gamma}_{I2} + \frac{1}{L} (L_I \hat{\gamma}_I - L_{II} \hat{\gamma}_{II}) = \left(g_I - \frac{L_{II}}{L} \right) \hat{\gamma}_I + \left(g_{II} + \frac{L_I}{L} \right) \hat{\gamma}_{II},$$

$$(273) \quad \omega_{30} = \frac{dH}{L} + y_I (k_I - H) \hat{\gamma}_I - y_{II} (k_{II} - H) \hat{\gamma}_{II} = \frac{1}{L} \{ (k_I)_I \hat{\gamma}_I + (k_{II})_{II} \hat{\gamma}_{II} \},$$

les formules principales de Codazzi

$$(274) \quad 2L g_I + (k_I)_{II} = 0, \quad \triangleright L g_{II} + (k_{II})_I = 0$$

montrant bien la concordance des coefficients de $\hat{\omega}_{12}$ et ω_{30} ,

$$(275) \quad \begin{cases} \hat{\omega}_{10} = dy_I - \left\{ L (y_I^2 + y_{II}^2) - \frac{H}{L} (H - 2L) \right\} \frac{\hat{\gamma}_I}{2} - y_{II} \hat{\gamma}_{II}, \\ \hat{\omega}_{20} = dy_{II} - \left\{ L (y_I^2 + y_{II}^2) - \frac{H}{L} (H + 2L) \right\} \frac{\hat{\gamma}_{II}}{2} + y_I \hat{\gamma}_I, \end{cases}$$

$$(276) \quad \lambda_0^2 = \left\{ L \nabla^2 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta(L)}{L^2} - H^2 \right) \varepsilon^{(2)} - H d^{(2)} \right\} \frac{1}{2} (d\mathbf{m})^2 = L_0^2 \frac{1}{2} (d\mathbf{m})^2$$

avec les notations en ∇ euclidiens, d'où les coefficients $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$, ou ε_{III} , $\frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2}, \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_I}{2}$; car

$$(277) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{l}_0^{(2)} &= \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} \mathbf{e}_0^{(2)} - \varepsilon_{III} \mathbf{g}_0^{(2)} + \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_I}{2} \mathbf{d}_0^{(2)}, \\ \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} &= \frac{1}{2L^2} \mathbf{l}_0^{(2)} \cdot \mathbf{x} \mathbf{e}_0^{(2)}, \quad \varepsilon_{III} = \frac{1}{2L^2} \mathbf{l}_0^{(2)} \cdot \mathbf{x} \mathbf{g}_0^{(2)}, \quad \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_I}{2} = \frac{1}{2L^2} \mathbf{l}_0^{(2)} \cdot \mathbf{x} \mathbf{d}_0^{(2)} \end{aligned} \right.$$

ou

$$(277') \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_I - \varepsilon_{II} &= \frac{1}{L} \left(L \Delta_s \gamma + \frac{\Delta(L)}{L^2} - H^2 \right) = \frac{1}{L^2} (\Delta_s \log L - H^2), \\ 2\varepsilon_{III} &= \frac{1}{L} (\gamma_{IIII} + \gamma_{IIII} + g_I \gamma_I - g_{II} \gamma_{II}) \\ &= \frac{1}{L^2} \{ \nabla_s^2 \log L - (\nabla \log L)^2 \} \cdot \frac{1}{L} \mathbf{g}^{(2)}, \\ \varepsilon_{II} - \varepsilon_I &= \frac{1}{L} (\gamma_{IIII} - \gamma_{IIII} - g_{II} \gamma_I + g_I \gamma_{II} - 2H) \\ &= \frac{1}{L^2} \{ \nabla_s^2 \log L - (\nabla \log L)^2 \} \cdot \frac{1}{L} \mathbf{d}^{(2)} - 2 \frac{H}{L}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose d'autre part

$$(278) \quad \hat{\omega}_{11} = \hat{\mathbf{f}}_0 \times d\mathbf{m}, \quad \omega_{30} = \mathbf{b}_0 \times d\mathbf{m},$$

en tenant compte des différentes manières d'exprimer la condition de Codazzi

$$(274') \quad \left\{ \begin{aligned} 2\hat{\mathbf{f}} + \mathcal{J} \nabla \log L + \frac{\mathbf{g}^{(2)}}{L^2} \times \nabla H &= 0, \\ \hat{\mathbf{f}} &= -\frac{1}{2L} \{ (k_I)_{II} \mathbf{a}_I + (k_{II})_{II} \mathbf{a}_{II} \}, \end{aligned} \right.$$

on a aussi

$$(275') \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_0 &= \hat{\mathbf{f}} + \mathcal{J} \nabla \log L \quad (1) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{J} \nabla \log L - \frac{\mathbf{g}^{(2)}}{L^2} \times \nabla H \right) \\ &= -\frac{1}{2L} \{ (k_{II})_{II} \mathbf{a}_I + (k_I)_{II} \mathbf{a}_{II} \}, \end{aligned} \right.$$

$$(273') \quad \mathbf{b}_0 = -\frac{\mathbf{g}^{(2)}}{L} \times \hat{\mathbf{f}}_0 = \frac{\nabla H}{L} + \frac{\mathbf{d}^{(2)}}{L} \times \nabla \log L = \frac{1}{L} \{ (k_I)_{II} \mathbf{a}_I + (k_{II})_{II} \mathbf{a}_{II} \}.$$

(1) Cf. (272). On peut remarquer que dans un changement de variable

où l'on a

$$\varpi_{01} = x \omega_{01}, \quad \varpi_{02} = x \omega_{02},$$

$$\varpi_{12} = \frac{\varpi'_{01} \varpi_{01} + \varpi'_{02} \varpi_{02}}{[\varpi_{01} \varpi_{02}]}, \quad \omega_{12} = \frac{\omega'_{01} \omega_{01} + \omega'_{02} \omega_{02}}{[\omega_{01} \omega_{02}]},$$

on en tire

$$\varpi_{12} = \omega_{12} + [d \log x \cdot \omega_{01}] \omega_{01} + [d \log x \cdot \omega_{02}] \omega_{02}$$

ou, en empruntant une notation à la théorie des noyaux,

$$\varpi_{12} = \omega_{12} + {}_1[d \log x (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)] = \omega_{12} + {}_1[d \log x \cdot \varepsilon_0^{(2)}]$$

69. Rappelons qu'avec la particularisation principale

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{a}_1^{\wedge} + \mathbf{a}_2^{\wedge}, \quad \mathbf{d}^{(2)} = L(\mathbf{a}_2^{\wedge} - \mathbf{a}_1^{\wedge}), \quad \mathbf{g}^{(2)} = 2L \widehat{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}, \quad \mathcal{J} = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2,$$

mais que ces formes sont indépendantes de cette particularisation (euclidienne); si l'on voulait étudier la géométrie conforme d'une surface avec les formules de la géométrie euclidienne, on aurait à substituer aux formes précédentes $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{d}_0^{(2)}$, $\mathbf{g}_0^{(2)}$, $L^2 \mathcal{J}$, et à considérer en même temps $\mathbf{l}_0^{(2)}$ et \mathbf{b}_0 , également indépendants de la particularisation principale; quant à $\hat{\mathbf{f}}_0$, c'est évidemment, comme $\hat{\mathbf{f}}$, un comitant du réseau angulaire principal. On pourrait encore substituer aux repères unitaires $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ des similirepères $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= L \mathbf{a}_1, & \mathbf{v}_2 &= L \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{v}_1 \times d\mathbf{m} &= L \tau_1 = \omega_{01}, & \mathbf{v}_2 \times d\mathbf{m} &= L \tau_2 = \omega_{02}, \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant pour une forme Φ quelconque

$$(279) \quad d\Phi = \Phi_1 \tau_1 + \Phi_2 \tau_2 = \Phi_{01} \omega_{01} + \Phi_{02} \omega_{02},$$

on aurait

$$(279') \quad \Phi_1 = L \Phi_{01}, \quad \Phi_2 = L \Phi_{02}.$$

Nous n'avons, à vrai dire, établi jusqu'ici les relations entre ω_{01} et τ_1 , ω_{02} et τ_2 que dans les particularisations principales, mais on verra un peu plus tard qu'on se débarrasse facilement de cette dernière restriction; les formes qui interviennent avec les similirepères $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$ seraient $\mathbf{e}^{(2)}$, $\frac{\mathbf{d}^{(2)}}{L}$, $\frac{\mathbf{g}^{(2)}}{L}$, \mathcal{J} , $\frac{\mathbf{l}_0^{(2)}}{L}$, \mathbf{b}_0 , etc.

Soit du reste $\mathbf{X} = 2\mathbf{m} \times \mathbf{y}$, où \mathbf{y} représente un vecteur ou un point de masse quelconque, un élément de la géométrie conforme; avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= L \mathbf{m}^{\wedge}, \\ d\mathbf{M} &= dL \cdot \mathbf{m}^{\wedge} + 2L \mathbf{m} \times d\mathbf{m}. \end{aligned}$$

On voit que

$$\mathbf{X} | d\mathbf{M} = L \overrightarrow{\mathbf{m} \mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{m} d\mathbf{m}} = \mathbf{x}_0 \times d\mathbf{m},$$

\mathbf{x}_0 représentant la composante superficielle du vecteur $\overrightarrow{L \mathbf{m} \mathbf{y}}$, et ceci permet de substituer aux formes de Pfaff de la géométrie conforme celles qui leur correspondent en géométrie euclidienne. C'est ainsi que nous

pouvons poser

$$(280) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{30} = \mathbf{B} | d\mathbf{M} = \mathbf{b}_0 \times d\mathbf{m}, \quad \hat{\omega}_{12} = \hat{\mathbf{F}} | d\mathbf{M} = \hat{\mathbf{f}}_0 \times d\mathbf{m}, \\ \epsilon_0^{(2')} = \mathbf{E}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = \mathbf{e}_0^{(2)} \frac{2}{\lambda} (d\mathbf{m})^2, \\ \delta_0^{(2')} = \mathbf{D}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = \mathbf{d}_0^{(2)} \frac{2}{\lambda} (d\mathbf{m})^2, \\ \gamma_0^{(2')} = \mathbf{G}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = \mathbf{g}_0^{(2)} \frac{2}{\lambda} (d\mathbf{m})^2, \\ \lambda_0^{(2')} = \mathbf{L}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = \mathbf{l}_0^{(2)} \frac{2}{\lambda} (d\mathbf{m})^2, \end{array} \right.$$

ce qui facilitera le passage de la géométrie conforme à la géométrie euclidienne, et permettra la comparaison de ces géométries.

70. Pour étudier les formules de courbure et les conditions d'intégrabilité des formes introduites, rappelons d'abord les formules du paragraphe 61 :

$$(233') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{0i} = \omega'_{0i} - [\omega_{00}\omega_{0i}] - \sum_j [\omega_{ij}\omega_{0j}] = 0, \\ \Omega_{i0} = \omega'_{i0} + [\omega_{00}\omega_{i0}] - \sum_j [\omega_{ij}\omega_{j0}] = 0, \\ \Omega_{00} = \omega'_{00} - \sum_i [\omega_{0i}\omega_{i0}] = 0, \\ \Omega_{ij} = \omega'_{ij} - [\omega_{i0}\omega_{0j} - \omega_{j0}\omega_{0i}] - \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}] = 0, \end{array} \right.$$

Nous nous contenterons d'établir les formules pour une dernière particularisation arbitraire remplaçant la particularisation principale, les particularisations précédentes étant effectuées ; on a d'abord les composantes du tenseur de courbure

$$(281) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{801} = \omega'_{01} - [\omega_{12}\omega_{02}] = 0, \quad \Omega_{80'} = \omega'_{02} - [\omega_{21}\omega_{01}] = 0, \\ \Omega_{810} = \omega'_{10} - [\omega_{11}\omega_{20}] = [\omega_{13}\omega_{30}], \quad \Omega_{820} = \omega'_{20} - [\omega_{21}\omega_{10}] = [\omega_{23}\omega_{30}], \\ \Omega_{800} = 0, \quad \Omega_{81'} = \omega'_{12} - [\omega_{10}\omega_{02} - \omega_{20}\omega_{01}] = [\omega_{13}\omega_{32}], \end{array} \right.$$

puis les relations différentielles entre invariants ou comitants, données par

$$(282) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_{03} = 0, \quad \omega'_{j0} - [\omega_{31}\omega_{10} + \omega_{32}\omega_{20}] = 0, \\ \omega'_{13} + [\omega_{30}\omega_{01}] - [\omega_{12}\omega_{23}] = 0, \quad \omega'_{23} + [\omega_{30}\omega_{02}] - [\omega_{21}\omega_{13}] = 0. \end{array} \right.$$

Il n'y a pas par suite de courbure d'élation de centre w , et les deux

premières équations donnent comme en géométrie euclidienne

$$(283) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1 &= \frac{\omega'_{01}}{[\omega_{01} \omega_{02}]}, & G_2 &= \frac{\omega'_{02}}{[\omega_{01} \omega_{02}]}, \\ \omega_{12} &= \frac{\omega'_{01} \omega_{01} + \omega'_{02} \omega_{02}}{[\omega_{01} \omega_{02}]} \end{aligned} \right.$$

De même la courbure d'homothétie est nulle; les composantes des tenseurs de courbure de rotation et d'élation de centre m peuvent se calculer soit avec les éléments spatiaux, soit uniquement avec les éléments superficiels; en utilisant les invariants dérivés (indices o_1 et o_2), on obtient

$$(284) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_{S_{10}} &= \{ G_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2G_2\varepsilon_3 + \varepsilon_{301} - \varepsilon_{102} \} [\omega_{01} \omega_{02}] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1) [\omega_{01} \omega_{02}], \\ \Omega_{S_{20}} &= \{ 2G_1\varepsilon_3 + G_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_{201} - \varepsilon_{302} \} [\omega_{01} \omega_{02}] = (\alpha_3\beta_2 - \alpha_1\beta_1) [\omega_{01} \omega_{02}], \\ \Omega_{S_{12}} &= (G_1^2 + G_2^2 + G_{201} - G_{102} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) [\omega_{01} \omega_{02}] = [\omega_{01} \omega_{02}], \end{aligned} \right.$$

d'où les relations

$$(285) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2G_2\varepsilon_3 + \varepsilon_{301} - \varepsilon_{102} &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1, \\ 2G_1\varepsilon_3 + G_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_{201} - \varepsilon_{302} &= \alpha_3\beta_2 - \alpha_1\beta_1; \end{aligned} \right.$$

$$(286) \quad G_1^2 + G_2^2 + G_{201} - G_{102} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1.$$

On a ensuite de la même façon les conditions d'intégrabilité (282) :

$$(287) \quad G_1\beta_1 + G_2\beta_2 + \beta_{101} - \beta_{102} + 2\alpha_1\varepsilon_3 - \alpha_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0,$$

$$(288) \quad \left\{ \begin{aligned} 2(G_1\alpha_1 + G_2\alpha_3) + \alpha_{301} - \alpha_{102} - \beta_2 &= 0, \\ 2(G_1\alpha_3 - G_2\alpha_1) - \alpha_{101} - \alpha_{302} + \beta_1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas de la particularisation principale ($\alpha_1 = -1$, $\alpha_{111} = 0$), ces six équations se réduisent à

$$(265)(288') \quad \beta_1 = -2G_{11}, \quad \beta_{11} = -2G_1,$$

$$(285') \quad \left\{ \begin{aligned} G_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_{11} - 2) + 2G_{11}\varepsilon_{111} + \varepsilon_{11101} - \varepsilon_{1011} &= 0, \\ 2G_1\varepsilon_{111} + G_{11}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_1 - 2) + \varepsilon_{1101} - \varepsilon_{11101} &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$(286') \quad G_1^2 + G_{11}^2 + G_{1101} - G_{1011} - \varepsilon_1 - \varepsilon_{11} - 1 = 0,$$

$$(287') \quad -2G_1G_{11} - G_{101} + G_{1101} - \varepsilon_{111} = 0,$$

et pour le tenseur de courbure, on peut écrire

$$(284') \quad \hat{\Omega}_{S_{10}} = 2G_1 \left[\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \right], \quad \hat{\Omega}_{S_{20}} = 2G_{11} \left[\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \right], \quad \hat{\Omega}_{S_{12}} = \left[\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \right]$$

ou, comme

$$(283') \quad G_1 = \frac{\hat{\omega}'_{01}}{\left[\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \right]}, \quad G_{11} = \frac{\hat{\omega}'_{02}}{\left[\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \right]},$$

$$(289) \quad \hat{\Omega}_{S_{10}} = 2\hat{\omega}'_{01}, \quad \hat{\Omega}_{S_{20}} = 2\hat{\omega}'_{02}, \quad \hat{\Omega}_{S_{12}} = \left[\hat{\omega}_{01} \hat{\omega}_{02} \right].$$

Nous utiliserons les formules principales précédentes; si l'on y substitue les expressions euclidiennes de G_I et G_{II} tirées de (272)

$$(274'') \quad LG_I = g_I - \frac{L_{II}}{L}, \quad LG_{II} = g_{II} + \frac{L_I}{L},$$

et si l'on emploie les relations (279) ou (279'), les formules (277') donnant $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ permettront la vérification de (285'), (286'), (287'); inversement les formules (286') et (287') pourraient être utilisées pour le calcul de ε_{III} et $\varepsilon_I + \varepsilon_{II}$ et les équations (285') constituent alors un système d'équations aux dérivées partielles pour $\varepsilon_{II} - \varepsilon_I$. Pour reprendre la discussion de ce système (¹), nous allons poser

$$\varepsilon_I + \varepsilon_{II} = 2u, \quad \varepsilon_{III} = v, \quad \varepsilon_{II} - \varepsilon_I = 2\omega,$$

et rester en géométrie conforme. Avec ces notations

$$(286') \quad 2u + 1 = G_I^2 + G_{II}^2 + G_{II0I} - G_{I0II},$$

$$(287') \quad v = -2G_I G_{II} - G_{I0I} + G_{II0II},$$

et en posant encore

$$(290) \quad \begin{cases} A = 2G_{II}, & B = -2G_{II} + 2G_I v + u_{0I} - v_{0II}, \\ C = -2G_I, & D = -2G_I + 2G_{II} v + v_{0I} - u_{0II}, \end{cases}$$

les équations (285') s'écrivent

$$(291) \quad \begin{cases} \omega_{0I} + A\omega + B = 0, \\ \omega_{0II} + C\omega + D = 0. \end{cases}$$

La condition de compatibilité de ces deux équations, $(d\omega)' = 0$, donne

$$(292) \quad (G_I A - A_{0II} + G_{II} C + C_{0I})\omega + AD - BC + D_{0I} - B_{0II} = 0$$

et permet en général de tirer ω ; dans le cas des surfaces isothermiques

$$(293) \quad E = G_I A - A_{0II} + G_{II} C - C_{0I} = -2(G_{I0I} + G_{II0II}) = 0,$$

on aboutit à une indétermination si le problème est possible, avec

(¹) Ce système a été discuté, avec les notations du calcul différentiel absolu, par M. G. Thomsen (*loc. cit.*); M. E. Vessiot a repris récemment cette discussion (*C. R. Ac. Sc.*, 22 mars 1926) en utilisant les transformations infinitésimales. Voir aussi le Mémoire cité de E. Cartan, ainsi que G. Darboux (*T. S.*), t. II.

simultanément

$$(294) \quad F = AD - BC + D_{0I} - B_{0II} = 0$$

et l'on peut alors tirer des équations (291) la combinaison donnant ω par intégration

$$(295) \quad D\omega_{0I} - B\omega_{0II} + B_{0II} - D_{0I} = 0.$$

Nous ne donnons pas les expressions détaillées des coefficients B , D , F à partir de G_I , G_{II} (invariants de M. Tresse) et de leurs dérivées, parce qu'il s'y retrouve des groupements de termes analogues à ceux rencontrés dans les formules de la géométrie différentielle euclidienne; pour les interpréter, il sera préférable de poser d'abord les bases d'un calcul analogue en géométrie conforme. Nous reviendrons ensuite sur la discussion précédente (§ 77) (1).

IV. — Noyaux dérivés en géométrie conforme canonique. Éléments géométriques et courbes remarquables.

71. Soit MN, N_2HW un repère qui a subi la particularisation canonique et toutes celles qui l'ont précédée au paragraphe 67. Nous allons, pour un tel repère, établir la théorie des noyaux dérivés et des formules en dérivées intrinsèques du type de celles des paragraphes 29, 32, 33 du Chapitre II. Cette théorie peut évidemment s'établir pour un repère arbitrairement déterminé $A_0A_1A_2A_3A_4$ ou au moins un repère $A_0A_1A_2HA_3$ relatif à la connexion induite. Mais il se présente ici une complication quand on veut passer d'un tel repère à un repère canonique, ou inversement : c'est celle du changement de variable puisque, dans un cas, l'élément qui joue le rôle de variable géométrique est la sphère-point A_0 , dans l'autre la sphère-point M , et que ces deux éléments ne coïncident qu'en position

$$(296) \quad M = xA_0, \quad A_0 = \frac{1}{x}M,$$

(1) Le principe de cette discussion remonte à P. Calapso (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. 22, 1906). La méthode montre que, sauf pour les surfaces isothermiques, susceptibles d'une déformation conforme du deuxième ordre, une surface est déterminée par les deux formes fondamentales $\varepsilon_0^{(2)}$ et $\gamma_0^{(2)}$ (ou $\varepsilon_0^{(2)}$ et $\delta_0^{(2)}$). M. Demoulin est aussi revenu récemment sur la question : *Mathesis*, supplément décembre 1922; *C. R. Ac. Sc.*, 26 avril 1926.

x étant d'ailleurs, pour deux repères déterminés, fonction de \mathbf{M} , ou de \mathbf{A}_0 . Pour une forme quelconque Φ , fonction de \mathbf{M} (ou de \mathbf{A}_0), on a (Chap. I, § 10).

$$\begin{aligned} d\Phi - \frac{d\Phi}{d\mathbf{M}} d\mathbf{M} &= \frac{d\Phi}{d\mathbf{A}_0} d\mathbf{A}_0, \\ \frac{d\Phi}{d\mathbf{M}} &= \frac{d\Phi}{d\mathbf{A}_0} \frac{d\mathbf{A}_0}{d\mathbf{M}}, & \frac{d\Phi}{d\mathbf{A}_0} &= \frac{d\Phi}{d\mathbf{M}} \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{A}_0}. \end{aligned}$$

Représentons par $\nabla_{\mathbf{M}}$ et ∇_0 les symboles de noyaux dérivés relatifs à \mathbf{M} et à \mathbf{A}_0 ; on écrit

$$\nabla_{\mathbf{M}}\Phi = \nabla_0\Phi | \nabla_{\mathbf{M}}\mathbf{A}_0, \quad \nabla_0\Phi = \nabla_{\mathbf{M}}\Phi | \nabla_0\mathbf{M}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \nabla_0\mathbf{M} &= \mathcal{N}, & \nabla_{\mathbf{M}}\mathbf{A}_0 &= \mathcal{N}^{-1}, \\ \mathcal{N} &= x\mathcal{U} + \mathbf{A}_0\nabla_0x, & \mathcal{N}^{-1} &= \frac{1}{x}\mathcal{U} + \mathbf{M}\nabla_{\mathbf{M}}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Dans la particularisation canonique (comme dans toutes celles qui bénéficient de la condition $\omega_{00} = 0$), on a

$$(261') \quad \begin{aligned} \mathbf{W} | \mathbf{M} &= 1, \\ \mathbf{W} | d\mathbf{M} &= 0; \end{aligned}$$

aussi de

$$(297) \quad d\mathbf{M} = dx\mathbf{A}_0 + x d\mathbf{A}_0 = \frac{dx}{x}\mathbf{M} + x d\mathbf{A}_0,$$

on tire

$$\begin{aligned} dx &= -x^2\mathbf{W} | d\mathbf{A}_0, \\ \nabla_0x &= -x^2\mathbf{W}, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{N} = x(\mathcal{U} - \mathbf{M}\mathbf{W}).$$

La formule

$$(298) \quad \nabla_0\Phi = \nabla_{\mathbf{M}}\Phi | \mathcal{N} = x \nabla_{\mathbf{M}}\Phi | (\mathcal{U} - \mathbf{M}\mathbf{W})$$

permettra donc de passer des formules établies pour un repère canonique à celles relatives à un repère quelconque dont l'origine \mathbf{A}_0 sera déterminée en fonction de \mathbf{M} par la donnée x , mais les formules de passage se compliqueront sensiblement dès qu'il s'agira de noyaux dérivés d'ordre supérieur au premier.

Voyons en particulier ce qui se passera pour les combinaisons alternées

$$\delta d\mathbf{M} - d\delta\mathbf{M} = (\delta dx - d\delta x)\mathbf{A}_0 + x(\delta d\mathbf{A}_0 - d\delta\mathbf{A}_0),$$

donc des symboles d , δ échangeables pour \mathbf{M} et les scalaires x le sont

aussi pour \mathbf{A}_0 . Pour une forme Φ , on aura encore dans ces conditions

$$\delta d\Phi - d\delta\Phi = 2\nabla_{\mathbf{H}}^2\Phi \left| \overline{\delta\mathbf{M} d\mathbf{M}} \right.;$$

mais, d'après la remarque du paragraphe 13, si cette combinaison est nulle, cela indiquera seulement la symétrie de la partie de $\nabla_{\mathbf{M}}^2\Phi$ privée de termes en \mathbf{H} , \mathbf{M} , \mathbf{W} puisque les différentielles $d\mathbf{M}$, $\delta\mathbf{M}$ forment toujours avec ces éléments des produits intérieurs nuls. Pour une autre variable \mathbf{A}_0 , le domaine des différentielles $d\mathbf{A}_0$, $\delta\mathbf{A}_0$ n'est généralement plus le même, et ce n'est aussi qu'à une partie de $\nabla_{\mathbf{A}_0}^2\Phi$ que pourraient s'appliquer des considérations de symétrie. Il y aura donc avantage, là encore, à rester dans un domaine bien défini pour les différentielles de la variable géométrique, et c'est ce que nous ferons dans la suite en conservant la particularisation canonique pour l'établissement des noyaux dérivés, qui ne sont plus en géométrie conforme des comitants absolus.

On pourra encore utiliser la formule du changement de variable pour passer de la géométrie conforme (canonique par exemple) à la géométrie euclidienne :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= L\mathbf{m}^2, & d\mathbf{M} &= 2L\mathbf{m} \times d\mathbf{m} + \mathbf{m}^2 dL = (2L\mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \nabla_m L) \times d\mathbf{m}, \\ \nabla_m \Phi &= \nabla_{\mathbf{M}} \Phi \left| (2L\mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \nabla_m L) \right. = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{M}} \Phi \times (2L\mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \nabla_m L). \end{aligned}$$

72. Nous ajouterons encore une restriction destinée à rapprocher les formules de la géométrie conforme de celles de la géométrie euclidienne, et rappelant une fois de plus que le rôle des différentielles précède celui des noyaux dérivés; quand on a posé

$$d\Phi = \nabla_{\mathbf{M}} \Phi \left| d\mathbf{M}, \right.$$

$d\mathbf{M}$ variant dans un domaine restreint (sans composantes en \mathbf{H} , \mathbf{M} , \mathbf{W}), seule est définie la partie de $\nabla_{\mathbf{M}} \Phi$ dont les termes ne contiennent pas un dernier facteur de droite en \mathbf{H} , \mathbf{M} , ou \mathbf{W} ; mais ces termes peuvent contenir des facteurs précédents constitués avec ces éléments. On n'aura un calcul semblable à celui de la géométrie euclidienne qu'en considérant dans $\nabla_{\mathbf{M}} \Phi$ seulement les termes ne contenant aucun facteur \mathbf{H} , \mathbf{M} , \mathbf{w} , et nous appellerons la forme ainsi constituée la forme *réduite* de $\nabla_{\mathbf{M}} \Phi$; nous étendrons cette réduction aux noyaux dérivés de tous ordres et aux formes quelconques, et l'indiquerons par un indice \mathbf{R} ; d'autre part, les dérivées se prenant toujours désormais par rapport à \mathbf{M} , nous ne placerons plus cette lettre en indice. Dans ces conditions, Ψ étant une forme géométrique d'ordre h quelconque, $\Psi_{\mathbf{R}}$ sa réduite, on

aura toujours

$$(299) \quad \Psi \big| d_1 \mathbf{M} d_2 \mathbf{M} \dots d_h \mathbf{M} = \Psi_R \big| d_1 \mathbf{M} d_2 \mathbf{M} \dots d_h \mathbf{M}.$$

A côté de \mathbf{M} , \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 , \mathbf{H} , \mathbf{W} nous avons déjà introduit les sphères \mathbf{F} et \mathbf{B} définies seulement par les formes de Pfaff ω_{12} et ω_{30}

$$\mathbf{F} \big| d\mathbf{M} = \omega_{12}, \quad \mathbf{B} \big| d\mathbf{M} = \omega_{30}.$$

Nous poserons encore

$$(300) \quad \mathbf{K}_1 \big| d\mathbf{M} = \omega_{10}, \quad \mathbf{K}_2 \big| d\mathbf{M} = \omega_{20},$$

et introduirons aussi le tenseur alterné

$$(301) \quad \mathcal{H} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N} = 2 \overline{\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1},$$

qui jouera le rôle de l'opérateur analogue \mathcal{J} de la géométrie euclidienne.

Nous pourrions aussi, à côté des différentielles, considérer des symboles de transformations infinitésimales; en posant

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} \mathbf{M} = \mathbf{U} &= x_0 \mathbf{M} + x_1 \mathbf{N}_1 + x_2 \mathbf{N}_2 + x_3 \mathbf{H} + x_4 \mathbf{W}, \\ \mathfrak{E}' \mathbf{M} = \mathbf{V} &= y_0 \mathbf{M} + y_1 \mathbf{N}_1 + y_2 \mathbf{N}_2 + y_3 \mathbf{H} + y_4 \mathbf{W}, \end{aligned}$$

les expressions comme

$$\mathfrak{E} \Phi = \nabla \Phi \big| \mathfrak{E} \mathbf{M} = \nabla \Phi \big| \mathbf{U}$$

ne seraient pas définies, \mathbf{U} variant dans un domaine plus étendu que les différentielles $d\mathbf{M}$; nous nous bornerons donc à des éléments \mathbf{U} , \mathbf{V} superficiels réduits (sans composantes en \mathbf{M} et \mathbf{W})

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} \mathbf{M} = \mathbf{U} &= x_1 \mathbf{N}_1 + x_2 \mathbf{N}_2, \\ \mathfrak{E}' \mathbf{M} = \mathbf{V} &= y_1 \mathbf{N}_1 + y_2 \mathbf{N}_2. \end{aligned}$$

On a alors, par l'application de la parenthèse $(\mathfrak{E}' \mathfrak{E})$,

$$(302) \quad (\mathfrak{E}' \mathfrak{E}) \mathbf{M} = \nabla \mathbf{U} \big| \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V} \big| \mathbf{U} = \nabla_R \mathbf{U} \big| \mathbf{V} - \nabla_R \mathbf{V} \big| \mathbf{U} = \mathbf{W},$$

un élément \mathbf{W} situé lui aussi dans le domaine de variation des différentielles $d\mathbf{M}$, mais on ne peut considérer \mathfrak{E} , \mathfrak{E}' , $(\mathfrak{E}' \mathfrak{E})$ comme des homographies définies dans ce domaine réduit.

73. Les procédés de calcul indiqués précédemment proviennent, comme nous l'avons vu, des restrictions amenées par la particularisation canonique. En reprenant l'étude des éléments géométriques attachés aux surfaces en géométrie conforme, nous verrons aussi l'utilité des particularisations précédentes.

La particularisation fondamentale a été définie par le choix de la sphère harmonique \mathbf{H} . Or la formule euclidienne

$$(112') \quad k = k_1 \cos^2 \hat{\varphi} + k_{11} \sin^2 \hat{\varphi}$$

établit une correspondance homographique entre k (ou son inverse \mathbf{R}) et $\text{tang}^2 \hat{\varphi}$; les sphères de courbure normale, tangentes en \mathbf{m} à la surface, sont donc rapportées projectivement aux paires de directions tangentes en ce point à leur courbe d'intersection avec la surface, qui présente là un point double, ces directions étant symétriques par rapport aux directions principales. Les sphères principales correspondent aux directions doubles $\hat{\varphi} = 0, \hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$; la sphère-point \mathbf{m}^{\times} correspond aux directions isotropes, pour lesquelles $\text{tang}^2 \hat{\varphi} = -1$; la sphère harmonique correspond aux directions bissectrices des directions principales,

$$\text{tang}^2 \hat{\varphi} = 1.$$

Chacune des sphères du faisceau considéré des sphères de courbure normale contient les cercles osculateurs des trajectoires des lignes de courbures sous les angles φ auxquels elle correspond (et des trajectoires sous angle constant en particulier).

En géométrie conforme, voici comment se réalise cette correspondance : soit

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} + \xi \mathbf{M}$$

une sphère de courbure normale du faisceau considéré. On aura

$$\mathbf{K} | d\mathbf{M} = 0$$

et $\mathbf{K} | d^2\mathbf{M} = -d\mathbf{K} | d\mathbf{M}$ s'annulera quand la sphère \mathbf{K} contiendra le cercle osculateur à une ligne de la surface décrite par \mathbf{m} . On a alors

$$(303) \quad \begin{aligned} d\mathbf{K} | d\mathbf{M} &= -d\mathbf{H} | d\mathbf{M} - \xi (d\mathbf{M})^2 = 0, \\ \delta_0^{(2)} - \xi \varepsilon_0^{(2)} &= 0, \\ \xi &= \frac{\delta_0^{(2)}}{\varepsilon_0^{(2)}} = \frac{1}{L} \left(\frac{\varphi^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} - \mathbf{H} \right) = \frac{1}{L} (k - \mathbf{H}) = \frac{e}{L} = -\cos 2\hat{\varphi}. \end{aligned}$$

La sphère harmonique, conjuguée, dans le faisceau $[\mathbf{MH}]$, de \mathbf{M} par rapport aux deux sphères principales, peut aussi être définie comme sphère d'inversion de celles-ci.

D'après la formule

$$(304) \quad [\mathbf{H} | d\mathbf{H}]_{\perp} [\mathbf{H} | d\mathbf{H}] = (d\mathbf{H})^2 = (d\mathbf{M})^2,$$

on voit que les lignes suivant lesquelles la sphère \mathbf{H} est tangente à la sphère infiniment voisine $\mathbf{H} + d\mathbf{H}$ sont les lignes isotropes de la surface; les directions isotropes se correspondent donc sur la sphère harmonique et sur la surface.

Vérifions aussi la propriété des sphères principales, qui sont $\mathbf{H} - \mathbf{M}$ et $\mathbf{H} + \mathbf{M}$; en général

$$(305) \quad d(\mathbf{H} - \mathbf{M}) = \omega_{30} \mathbf{M} - 2 \omega_{02} \mathbf{N}_{II}, \quad \left\{ d(\mathbf{H} - \mathbf{M}) \right\}^2 = 4 \omega_{02}^2,$$

$$(306) \quad d(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \omega_{30} \mathbf{M} + 2 \omega_{01} \mathbf{N}_I, \quad \left\{ d(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \right\}^2 = 4 \omega_{01}^2.$$

Chaque sphère $\mathbf{H} - \mathbf{M}$ ou $\mathbf{H} + \mathbf{M}$ est donc bien tangente à la sphère de même espèce infiniment voisine le long des lignes de courbure $\omega_{02} = 0$, $\omega_{01} = 0$, respectivement.

Soient, d'une manière générale, $\bar{\sigma}$, σ_1 , σ_{II} , σ_0 les angles que font, le long d'une ligne quelconque, avec la sphère de courbure normale, avec chaque sphère principale, avec la sphère harmonique, les sphères de même espèce infiniment voisines.

Demartres a établi les formules (1)

$$(307) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 L ds \cos \hat{\varphi} = \sigma_{II}, \quad 2 L ds \sin \hat{\varphi} = \sigma_1, \\ 2 L ds = \frac{\sigma_1 \sigma_{II}}{\sigma}, \\ \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_{II}^2}. \end{array} \right.$$

En tenant compte de

$$2 d\mathbf{H} - d(\mathbf{H} + \mathbf{M}) + d(\mathbf{H} - \mathbf{M})$$

et de la relation établie par la particularisation simple ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$)

$$(304) \quad (d\mathbf{H})^2 = (d\mathbf{M})^2,$$

on voit qu'on peut compléter ces formules par

$$(308) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_{II}^2), \\ \frac{\sigma_1^2 \sigma_{II}^2}{\sigma^2} = 4 \sigma_0^2. \end{array} \right.$$

Aussi, si l'on pose

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N} dm, \quad (d\mathbf{M})^2 = dm^2,$$

(1) G. DEMARTRES, *Bulletin des Sc. math.*, t. XXI, 1897; on pourra utiliser les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\mathbf{H} - \mathbf{M})^2 = \sigma_1^2 = 2(\varepsilon_0^{(2)} + \delta_0^{(2)}), \quad d(\mathbf{H} + \mathbf{M})^2 = \sigma_{II}^2 = 2(\varepsilon_0^{(2)} - \delta_0^{(2)}), \\ d(\mathbf{H} + \xi \mathbf{M})^2 = \bar{\sigma}^2 = (1 + \xi^2) \varepsilon_0^{(2)} - 2\xi \delta_0^{(2)} = \frac{\varepsilon_0^{(2)2} - \delta_0^{(2)2}}{\varepsilon_0^{(2)}}. \end{array} \right.$$

on pourra prendre pour paramètre canonique, le long d'une ligne quelconque, m , tel que

$$(309) \quad dm = L ds = \sigma_0$$

soit l'angle de la sphère harmonique infiniment voisine de \mathbf{H} , avec celle-ci (1).

74. Certains points de la sphère \mathbf{H} , définis intrinsèquement, jouent un rôle important et en les choisissant pour pôles du repère, à la place de \mathbf{W} , on aurait été conduit à d'autres particularisations intéressantes.

Le premier, \mathbf{T} (pôle de contact), est le second point caractéristique de la sphère \mathbf{H} ; pris comme pôle, il donnerait une particularisation *de contact*, pour laquelle on aurait $\omega_{30} = -d\mathbf{T} | \mathbf{H} = 0$ (mais $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \neq 0$, $\omega_{00} \neq 0$). Or, quand on se déplace dans les différentes directions dm de la surface

$$(310) \quad [\mathbf{H} d\mathbf{H}] = \omega_{30} [\mathbf{H}\mathbf{M}] - \hat{\omega}_{01} [\mathbf{H}\mathbf{N}_I] + \hat{\omega}_{02} [\mathbf{H}\mathbf{N}_{II}],$$

les cercles caractéristiques $[\mathbf{H} d\mathbf{H}]$ forment sur \mathbf{H} un faisceau avec les points communs \mathbf{M} et \mathbf{T} . Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= x_0 \mathbf{M} + x_1 \mathbf{N}_I + x_{II} \mathbf{N}_{II} + x_3 \mathbf{W}, & \mathbf{T}^2 &= x_0^2 + x_{II}^2 + 2x_0 x_3 = 0, \\ \mathbf{T} | d\mathbf{H} &= \omega_{30} \mathbf{T} | \mathbf{M} + \hat{\omega}_{01} \mathbf{T} | \mathbf{N}_I - \hat{\omega}_{02} \mathbf{T} | \mathbf{N}_{II} \\ &= \hat{\omega}_{01} \mathbf{T} | (\beta_I \mathbf{M} + \mathbf{N}_I) + \hat{\omega}_{02} \mathbf{T} | (\beta_{II} \mathbf{M} - \mathbf{N}_{II}). \end{aligned}$$

On détermine donc \mathbf{T} par

$$(311) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} | (\beta_I \mathbf{M} + \mathbf{N}_I) &= 0, & \mathbf{T} | (\beta_{II} \mathbf{M} - \mathbf{N}_{II}) &= 0, \\ \mathbf{T} &= -\frac{\beta_I^2 + \beta_{II}^2}{2} \mathbf{M} - \beta_I \mathbf{N}_I + \beta_{II} \mathbf{N}_{II} + \mathbf{W}. & \mathbf{T}_R &= -2 \hat{\mathbf{G}}. \end{aligned}$$

Le cercle $[\mathbf{H} d\mathbf{H}]$ passe par \mathbf{W} pour la ligne $\omega_{30} = 0$ de la particularisation canonique, que nous caractériserons un peu plus tard.

Un autre point remarquable est le second point $\hat{\mathbf{I}}$ (pôle principal), commun aux cercles osculateurs des asymptotiques conformes; choisi pour pôle, il donnerait une particularisation *incidente*, avec

$$\omega_{12} = 0 (\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \neq 0, \omega_{00} \neq 0).$$

Le long de la première asymptotique conforme $\hat{\omega}_{02} = \hat{\omega}_{01}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \hat{\omega}_{01} (\mathbf{N}_I + \mathbf{N}_{II}), \\ d(\mathbf{N}_I + \mathbf{N}_{II}) &= \left(\hat{\omega}_{10} + \hat{\omega}_{00} \right) \mathbf{M} + \hat{\omega}_{01} (G_I + G_{II}) (\mathbf{N}_{II} - \mathbf{N}_I) - 2 \hat{\omega}_{01} \mathbf{W}, \\ [\mathbf{M} d\mathbf{M} d^2 \mathbf{M}] &= \hat{\omega}_{01}^2 [\mathbf{M} (\mathbf{N}_{II} + \mathbf{N}_I) \{ (G_I + G_{II}) (\mathbf{N}_{II} - \mathbf{N}_I) - 2 \mathbf{W} \}]. \end{aligned}$$

(1) L'élément linéaire canonique dm^2 s'appellerait plus justement *élément angulaire*.

De même, pour la seconde asymptotique $\hat{\omega}_{02} = -\hat{\omega}_{01}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \hat{\omega}_{01}(\mathbf{N}_{II} - \dot{\mathbf{N}}_I), \\ d(\mathbf{N}_{II} - \mathbf{N}_I) &= (\hat{\omega}_{10} - \dot{\omega}_{10})\mathbf{M} + \hat{\omega}_{01}(G_{II} - G_I)(\mathbf{N}_I + \mathbf{N}_{II}) + 2\hat{\omega}_{01}\mathbf{W}, \\ [\mathbf{M} \mid d\mathbf{M} \mid d^2\mathbf{M}] &= \hat{\omega}_{01}^2 [\mathbf{M}(\mathbf{N}_{II} - \mathbf{N}_I); (G_{II} - G_I)(\mathbf{N}_I + \mathbf{N}_{II}) + 2\mathbf{W}]. \end{aligned}$$

Pour que

$$\hat{\mathbf{I}} = \gamma_0\mathbf{M} + \gamma_1\mathbf{N}_I + \gamma_{II}\mathbf{N}_{II} + \gamma_4\mathbf{W}, \quad \hat{\mathbf{I}}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_{II}^2 + 2\gamma_0\gamma_4 = 0$$

appartienne à ces deux cercles osculateurs, il faut prendre

$$(312) \quad \hat{\mathbf{I}} = -\frac{G_I^2 + G_{II}^2}{2}\mathbf{M} + G_{II}\mathbf{N}_I - G_I\mathbf{N}_{II} + \mathbf{W}, \quad \hat{\mathbf{I}}_R = -\hat{\mathbf{G}},$$

et comme

$$(312') \quad \begin{aligned} \beta_I &= -2G_{II}, & \beta_{II} &= -2G_I, \\ \hat{\mathbf{I}} &= -\frac{\beta_I^2 + \beta_{II}^2}{8}\mathbf{M} - \frac{\beta_I}{2}\mathbf{N}_I + \frac{\beta_{II}}{2}\mathbf{N}_{II} + \mathbf{W}. \end{aligned}$$

On a donc la relation

$$(313) \quad 2\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{T} = \frac{\beta_I^2 + \beta_{II}^2}{4}\mathbf{M} + \mathbf{W}.$$

qui montre que \mathbf{W} est sur le cercle $[\mathbf{MT}\hat{\mathbf{I}}]$ et conjugué harmonique de \mathbf{T} par rapport à \mathbf{M} et $\hat{\mathbf{I}}$; en effet

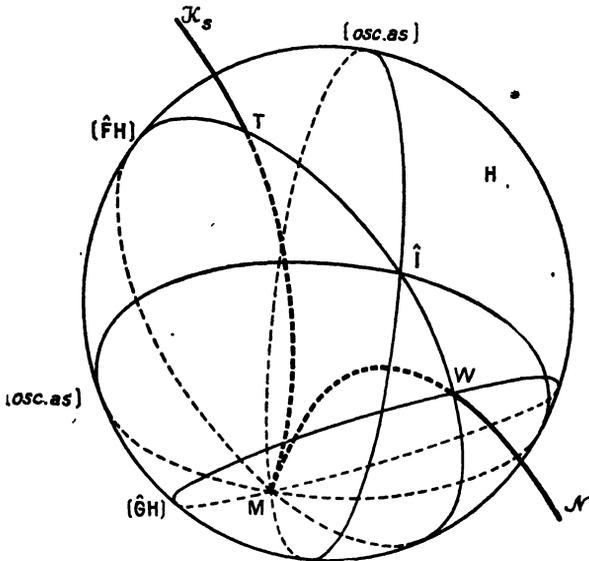
$$(313') \quad \frac{(\mathbf{W} \mid \hat{\mathbf{I}})(\mathbf{T} \mid \mathbf{M})}{(\mathbf{W} \mid \mathbf{M})(\mathbf{T} \mid \hat{\mathbf{I}})} = 1.$$

Ceci explique la relation établie par la particularisation canonique entre les coefficients de ω_{30} et ω_{12} , et permet aussi de définir la ligne $\omega_{30} = 0$ comme celle le long de laquelle le cercle caractéristique de \mathbf{H} passe par $\hat{\mathbf{I}}$. On voit en outre que la particularisation canonique ne peut se confondre avec une des particularisations de contact ou incidente sans que celles-ci se confondent aussi; cela aura lieu pour les surfaces pour lesquelles $\beta_I = 0, \beta_{II} = 0$, soit $\omega_{30} = \hat{\omega}_{12} = 0$, ou $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{F}} = 0$ (cyclides de Dupin).

La position géométrique du pôle canonique \mathbf{W} ayant été ainsi précisée, le cercle normal canonique $[\mathbf{MHW}]$ joue au point de vue conforme (dans la particularisation canonique) le rôle de la normale à la surface en géométrie euclidienne; d'ailleurs une inversion symétrique

de pôle \mathbf{W} transforme \mathbf{H} en le plan tangent, $[\mathbf{MHW}]$ en la normale. Pour les asymptotiques conformes, il passe par \mathbf{W} une sphère contenant

Fig. 1.



Éléments de la particularisation canonique.

Les cercles désignés par [osc.as.] sont les cercles osculateurs des asymptotiques conformes. Les cercles [BH] et $[(\hat{\mathbf{G}}^2 \mathbf{M} + \hat{\mathbf{G}}) \mathbf{H}]$ ne sont pas tracés.

le cercle osculateur et tangente à la surface, soit \mathbf{H} . On pourra de même appeler géodésiques canoniques les lignes pour lesquelles le cercle osculateur est cosphérique au cercle normal canonique : \mathbf{N}_2 est alors la sphère de courbure géodésique (euclidienne); pour que les cercles $[\mathbf{M}.d\mathbf{M}.d^2\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{MHW}]$, ou $[\mathbf{N}_1\mathbf{N}_{II}]$, soient cosphériques, on aura à exprimer

$$[\mathbf{M}.d\mathbf{M}.d^2\mathbf{M}.\mathbf{HW}] = [d\mathbf{M}.d_{II}^2\mathbf{M}]_R = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathbf{N}_1\mathbf{N}_{II}]_{\perp} [d\mathbf{M}.d^2\mathbf{M}] = 0.$$

Du reste $[\mathbf{N}_1\mathbf{N}_{II}] = [\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2]$ et l'on trouve ainsi l'équation

$$(314) \quad [d\mathbf{M}.d_{II}^2\mathbf{M}]_R = (\omega_{01} d\omega_{02} - \omega_{02} d\omega_{01} + \omega_{12} \varepsilon_{II}^{(2)}) [\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2]_R = 0$$

ou

$$(314') \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \omega_{01} & \omega_{02} \\ d\omega_{01} - \omega_{12}\omega_{02} & d\omega_{02} - \omega_{21}\omega_{01} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces géodésiques canoniques dépendent de la particularisation ⁽¹⁾; ainsi,

(1) Pendant ou depuis la rédaction de ce travail, des Mémoires sur la géométrie conforme ont été publiés par MM. Thomsen, Blaschke, Radon, dans les *Abhandl. a. d. Math. Seminar der Hamburg. Univ.*, IV, 1925 1926, et V (en cours).

pour la particularisation incidente, on trouverait comme réseau des géodésiques le réseau angulaire principal.

Une famille de courbes plus importantes a été signalée par M. Cartan, celle des cercles conformes (superficiels) ou cercles *induits*, qui sont fixés dès la particularisation fondamentale et sont par suite attachés à la connexion induite ; ils sont donnés par l'équation

$$(315) \quad [\mathbf{M}.d\mathbf{M}.d^2\mathbf{M}.d^3\mathbf{M} \mathbf{H}] = [\mathbf{M}.d\mathbf{M}.d^2\mathbf{M}.d^3\mathbf{M}], = 0.$$

Nous reviendrons sur leur sujet. A côté de ces cercles, on pourra définir les cercles géodésiques canoniques, pour lesquels la courbure géodésique canonique (analogue à la courbure géodésique euclidienne) sera constante, cette courbure étant nulle pour les géodésiques canoniques.

Les lignes de courbure d'une surface ont déjà été définies au point de vue conforme ; leur équation peut s'écrire

$$- [d\mathbf{M}.d_R \mathbf{H}]_R = 0.$$

On pourra encore considérer les lignes d'équation

$$(315) \quad [d\mathbf{M}.d_R \mathbf{W}]_R = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_0^{(2)} = \omega_{01} \omega_{20} - \omega_{02} \omega_{10} = \mathbf{M}^{(2)} \cdot (d\mathbf{M})^2 = 0,$$

$\mu_0^{(2)}$ étant la jacobienne des formes $\lambda_0^{(2)}$ et $\varepsilon_0^{(2)}$.

Joueront encore un rôle géométrique les lignes principales de Darboux relatives à la congruence des sphères \mathbf{H} , d'équation

$$(316) \quad [\mathbf{M}.\mathbf{T}.d\mathbf{M}.d\mathbf{T}] = 0,$$

aussi les lignes d'équation $d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{T} = 0$, etc. D'une manière générale à un faisceau de lignes donné par une équation de Pfaff, on pourra aussi faire correspondre le faisceau orthogonal et ceux qui les coupent sous angle constant, la notion de réseau angulaire étant la même en géométrie conforme qu'en géométrie euclidienne.

Si l'on considère les sphères osculatrices des lignes tracées sur la surface, définies par le produit $[\mathbf{M}.d\mathbf{M}.d^2\mathbf{M}.d^3\mathbf{M}]$, on aura encore à considérer les lignes pour lesquelles ces sphères sont tangentes ou normales à la surface, ou coupent la surface sous angle constant, ou passent par des points remarquables \mathbf{W} , \mathbf{T} , $\hat{\mathbf{I}}$, ou sont orthogonales à \mathbf{H} , ou enfin sont fixes, c'est-à-dire les lignes sphériques de la surface.

On définira des surfaces ou des familles de surfaces remarquables en imposant à certaines des lignes précédentes des propriétés particulières, ou à plusieurs des propriétés communes.

75. Nous allons maintenant établir les formules relatives à une particularisation canonique non principale, afin de pouvoir donner les expres-

sions de quelques comitants remarquables. En partant des formules (266) nous ferons la rotation

$$(317) \quad \begin{cases} \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_I \cos \hat{\varphi} + \mathbf{N}_{II} \sin \hat{\varphi} \\ \mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_I \sin \hat{\varphi} + \mathbf{N}_{II} \cos \hat{\varphi}, \end{cases}$$

d'où les nouvelles formes de Pfaff

$$(317') \quad \begin{cases} \omega_{01} = \hat{\omega}_{01} \cos \hat{\varphi} + \hat{\omega}_{02} \sin \hat{\varphi}, \\ \omega_{02} = -\hat{\omega}_{01} \sin \hat{\varphi} + \hat{\omega}_{02} \cos \hat{\varphi}, \\ \omega_{10} = \hat{\omega}_{10} \cos \hat{\varphi} + \hat{\omega}_{20} \sin \hat{\varphi}, \\ \omega_{20} = -\hat{\omega}_{10} \sin \hat{\varphi} + \hat{\omega}_{20} \cos \hat{\varphi}, \\ \omega_{13} = -\hat{\omega}_{01} \cos \hat{\varphi} + \hat{\omega}_{02} \sin \hat{\varphi}, \\ \omega_{23} = \hat{\omega}_{01} \sin \hat{\varphi} + \hat{\omega}_{02} \cos \hat{\varphi}, \\ \omega_{12} = \hat{\omega}_{12} + d\hat{\varphi}. \end{cases}$$

Nous utiliserons les formes ou comitants suivants, relatifs aux géométries conformes canonique ou réduite :

$$(318) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_S = \mathbf{N}_2^2 + \mathbf{N}_3^2 + 2\widehat{\mathbf{M}\mathbf{W}}, \quad \mathcal{U}_R = \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{N}_1^2 + \mathbf{N}_2^2, \\ \mathbf{B} = \beta_1 \mathbf{N}_1 + \beta_2 \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{C}_1 = \alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_3 \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{C}_2 = \alpha_3 \mathbf{N}_1 - \alpha_1 \mathbf{N}_2 \\ -\nabla_S \mathbf{H} = \mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{M}\mathbf{B} \quad -\nabla_R \mathbf{H} = \mathbf{D}^{(2)} = \alpha_1 (\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2) + 2\alpha_3 \widehat{\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2} \\ \mathcal{G}^{(2)} = \alpha_3 (\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2) - 2\alpha_1 \widehat{\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2} \\ \mathcal{N} = \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \\ -\nabla_S \mathbf{W} = \mathbf{L}^{(2)} = -\nabla_R \mathbf{W} \quad \mathbf{L}^{(2)} = \widehat{\mathbf{K}_1 \mathbf{N}_1} + \widehat{\mathbf{K}_2 \mathbf{N}_2} \\ \mathbf{K}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{N}_1 + \varepsilon_3 \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{K}_2 = \varepsilon_3 \mathbf{N}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} + \nabla_{\hat{\varphi}} = \mathbf{G}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{N}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{G}^{(2)} | \mathbf{B} + \nabla_{\hat{\varphi}} \\ \dots \quad \varepsilon_0^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = (d\mathbf{M})^2 = dm^2, \\ \dots \quad \omega_{30} = \mathbf{B} | d\mathbf{M}, \\ \dots \quad \omega_{13} = \mathbf{C}_1 | d\mathbf{M} \quad \omega_{23} = \mathbf{C}_2 | d\mathbf{M}, \\ \dots \quad \delta_0^{(2)} = \mathbf{D}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = -d\mathbf{H} | d\mathbf{M}, \\ \dots \quad \gamma_0^{(2)} = \mathbf{G}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = -[d\mathbf{M} \cdot d_R \mathbf{H}]_R, \\ \dots \quad [\omega_{01} \cdot \omega_{02}] = [d_1 \mathbf{M} \cdot d_2 \mathbf{M}]_R, \\ \dots \quad \lambda_0^{(2)} = \mathbf{L}^{(2)} | (d\mathbf{M})^2 = -d\mathbf{W} | d\mathbf{M}, \\ \dots \quad \omega_{10} = \mathbf{K}_1 | d\mathbf{M} \quad \omega_{20} = \mathbf{K}_2 | d\mathbf{M}, \\ \dots \quad \omega_{12} = \mathbf{F} | d\mathbf{M}. \end{array} \right.$$

(Du reste $\mathbf{D}^{(2)} = \mathcal{N} \mathbf{G}^{(2)}$, et l'on peut adjoindre encore $\mathbf{G} = \mathcal{N} \mathbf{F}$, $\mathbf{C} = \mathcal{N} \mathbf{B}$)

$$(319) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = -\frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{M} + \mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{B} + \mathbf{W} = -2 \hat{\mathbf{G}}^2 \mathbf{M} - 2 \hat{\mathbf{G}} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{T}_R = \mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{B} = -2 \hat{\mathbf{G}}, \\ \hat{\mathbf{I}} = -\frac{\mathbf{B}^2}{8} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{B} + \mathbf{W} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{G}}^2 \mathbf{M} - \hat{\mathbf{G}} + \mathbf{W}, \quad \hat{\mathbf{I}}_R = -\hat{\mathbf{G}}, \\ [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2]_R = 1, \quad [d\mathbf{M} \cdot d_R^2 \mathbf{M}]_R = 1, \\ \mathcal{H}_S = \omega_{01} \hat{\alpha}_{14} + \omega_{02} \hat{\alpha}_{24} + \omega_{10} \hat{\alpha}_{01} + \omega_{20} \hat{\alpha}_{02} + \omega_{12} \mathcal{N}, \quad \mathcal{H}_R = \omega_{12} \mathcal{N}. \end{array} \right.$$

Pour les coefficients, on a

$$(320) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\cos 2\hat{\varphi} = \xi, \quad \alpha_2 = \sin 2\hat{\varphi}, \\ \beta_1 = \beta_I \cos \hat{\varphi} + \beta_{II} \sin \hat{\varphi}, \quad \beta_2 = -\beta_I \sin \hat{\varphi} + \beta_{II} \cos \hat{\varphi}, \\ \varepsilon_1 = u + \nu \sin 2\hat{\varphi} - \omega \cos 2\hat{\varphi}, \quad \varepsilon_2 = u - \nu \sin 2\hat{\varphi} + \omega \cos 2\hat{\varphi}, \\ \varepsilon_3 = \nu \cos 2\hat{\varphi} + \omega \sin 2\hat{\varphi}, \\ G_1 = G_I \cos \hat{\varphi} + G_{II} \sin \hat{\varphi} + \hat{\varphi}_{01}, \quad G_2 = -G_I \sin \hat{\varphi} + G_{II} \cos \hat{\varphi} + \hat{\varphi}_{02}. \end{array} \right.$$

Nous rappelons qu'on a toujours (deux relations seulement étant indépendantes)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2u, \quad (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + 4\varepsilon_3^2 = 4(\nu^2 + \omega^2), \quad \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \nu^2 + \omega^2 - u^2.$$

A côté de la formule générale

$$(321) \quad d_S \Phi_S = d\omega \Phi_S + (\mathcal{H}_S | \Phi_S),$$

on devra employer en géométrie réduite

$$(322) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_R \Phi_R = d\omega \Phi_R + (\mathcal{H}_R | \Phi_R) = d\omega \Phi_R + \omega_{12} (\mathcal{N} | \Phi_R), \\ \nabla_R \Phi_R = \nabla_\omega \Phi_R + (\mathcal{N} | \Phi_R) \cdot \mathbf{F}. \end{array} \right.$$

Pour un scalaire φ

$$\nabla_R \varphi = \nabla_S \varphi = \nabla_\omega \varphi = \nabla \varphi \quad (\nabla \text{ relatifs à } \mathbf{M}).$$

On aura encore

$$(323) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_R \mathcal{U}_R = 0, \quad \nabla_R \mathcal{N} = 0, \\ \nabla_R \mathbf{G}^{(2)} = 2 \mathbf{D}^{(2)} \hat{\mathbf{F}}, \quad \nabla_R \mathbf{D}^{(2)} = -2 \mathbf{G}^{(2)} \hat{\mathbf{F}}. \end{array} \right.$$

Revenons maintenant aux équations du paragraphe 70; les équations

tions (283) correspondent à

$$(324) \quad \begin{cases} \text{rot}_R \mathbf{N}_1 = [\mathbf{F} \mathbf{N}_2]_R, & \text{rot}_R \mathbf{N}_2 = -[\mathbf{F} \mathbf{N}_1]_R, \\ \mathbf{F} = \text{rot}_R \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_1 + \text{rot}_R \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_2. \end{cases}$$

L'équation (286) donne

$$(325) \quad \begin{cases} 2u = [\mathbf{K}_1 \mathbf{N}_2 - \mathbf{K}_2 \mathbf{N}_1]_R, & -1 = [\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2]_R, \\ 2u + 1 = \text{rot}_R \mathbf{F} = \text{rot}_\omega \mathbf{F} - [\mathbf{G} \mathbf{F}]_R = \mathbf{F}^2 + \text{rot}_\omega \mathbf{F}, \\ -(2u + 1) = \text{div}_R \mathbf{G} = \text{div}_\omega \mathbf{G} - \mathbf{G}^2, \end{cases}$$

sans changement pour la particularisation principale ; on voit que $2u + 1$ joue le rôle de $-\mathbf{K}$ en géométrie euclidienne ; en posant

$$(326) \quad 2u + 1 = -Q, \quad \omega'_{12} = -Q[\omega_{01}\omega_{02}], \quad \text{rot}_R \mathbf{F} = -Q,$$

puis

$$[\delta \mathbf{M} \cdot d\mathbf{M}]_R = \Delta O,$$

on aura

$$(327) \quad \begin{cases} \nabla_R \Phi_R = -Q(\mathcal{X} | \Phi_R), \\ (d_R \Phi_R)'_R = (\mathcal{X}_{RR} | \Phi_R) = -Q \cdot \Delta O(\mathcal{X} | \Phi_R), \end{cases}$$

et pour une forme réduite

$$\Phi_R = \nabla_R \Psi_R$$

la condition d'intégrabilité sera donnée par

$$(328) \quad \mathbb{E}_1 \nabla_R \Phi_R = -Q(\mathcal{X} | \Psi_R).$$

76. La condition (287) donne

$$(329) \quad \begin{cases} -2v = [\mathbf{C}_1 \mathbf{K}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{K}_2]_R, \\ 2v = \text{rot}_R \mathbf{B} = \text{rot}_\omega \mathbf{B} - [\mathbf{C} \mathbf{F}]_R = \mathbf{B} \cdot \mathbf{F} + \text{rot}_\omega \mathbf{B} \\ 2v = \text{div}_R \mathbf{C} = \text{div}_\omega \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}, \end{cases}$$

$$(329') \quad \omega'_{30} = 2v[\omega_{01}\omega_{02}],$$

et pour la particularisation principale

$$2v = -\frac{1}{2} \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^2 + \text{rot}_\omega \Delta \mathbf{B},$$

Les équations (285) peuvent s'écrire

$$(330) \quad \begin{cases} \text{rot}_R \mathbf{K}_1 = [\mathbf{F} \mathbf{K}_2]_R + [\mathbf{C}_1 \mathbf{B}]_R, \\ \text{rot}_R \mathbf{K}_2 = -[\mathbf{F} \mathbf{K}_1]_R + [\mathbf{C}_2 \mathbf{B}]_R, \end{cases}$$

de même que (288) donne en général

$$(331) \quad \begin{cases} \text{rot}_R \mathbf{C}_1 = [\mathbf{N}_1 \mathbf{B}]_R + [\mathbf{F} \mathbf{C}_2]_R, \\ \text{rot}_R \mathbf{C}_2 = [\mathbf{N}_2 \mathbf{B}]_R - [\mathbf{F} \mathbf{C}_1]_R. \end{cases}$$

Pour la particularisation principale $\mathbf{C}_I = -\mathbf{N}_I$, $\mathbf{C}_{II} = \mathbf{N}_{II}$, on sait qu'on retrouve avec ces dernières équations $\mathbf{B} = -\mathfrak{z} \mathbf{G}^{(2)} | \hat{\mathbf{F}}$ et le calcul de $\text{rot}_R \mathbf{N}_I$ et $\text{rot}_R \mathbf{N}_{II}$. Mais sous la forme générale, ces équations et les précédentes donnent des résultats intéressants, analogues à la condition de Codazzi en géométrie euclidienne. Si l'on pose pour abrégé

$$\mathcal{O} = \mathbf{D}^{(1)}, \quad \mathcal{G} = \mathbf{G}^{(1)}, \quad \mathcal{L} = \mathbf{L}^{(1)},$$

on a en effet

$$(332) \quad \begin{cases} \text{rot}_R \mathbf{C}_1 = \mathbf{N}_1 | \text{rot}_R \mathcal{O} + [\mathbf{F} \mathbf{C}_2]_R, \\ \text{rot}_R \mathbf{C}_2 = \mathbf{N}_2 | \text{rot}_R \mathcal{O} - [\mathbf{F} \mathbf{C}_1]_R, \end{cases}$$

d'où

$$(333) \quad \mathbf{C}_I | \text{rot}_R \mathbf{C}_I + \mathbf{C}_I | \text{rot}_R \mathbf{C}_I = \mathcal{O} | \text{rot}_R \mathcal{O} - \mathbf{F}. \quad [\mathbf{C}_I \mathbf{C}_2]_R = -1.$$

En comparant (331) et (332), on a d'autre part

$$(334) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_1 | \text{rot}_R \mathcal{O} &= \mathbf{N}_2 | \mathbf{B}, & \mathbf{N}_2 | \text{rot}_R \mathcal{O} &= -\mathbf{N}_1 | \mathbf{B}, \\ \text{rot}_R \mathcal{O} &= -\mathcal{N} \mathbf{B}, & \text{rot}_R \mathcal{G} &= -\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Avec la particularisation principale, on tire aussi de (333)

$$\mathcal{O} | \text{rot}_R \mathcal{O} = \mathfrak{z} \hat{\mathbf{F}} = -\mathcal{G} \mathbf{B}.$$

qui résulte bien de l'équation précédente puisque

$$\mathcal{O} \mathcal{N} = \mathcal{G} = -\mathcal{N} \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \mathcal{G} = \mathcal{N} = -\mathcal{G} \mathcal{O}.$$

Ces mêmes relations permettent d'exprimer $\hat{\mathbf{G}}$ et $\hat{\mathbf{F}}$ au moyen de \mathcal{O} et \mathcal{G} et leurs rotationnels ou divergences sous plusieurs formes équivalentes, au moyen de produits intérieurs ou extérieurs.

De la même façon, on aura

$$(335) \quad \begin{cases} \text{rot}_R \mathbf{K}_1 = \mathbf{N}_1 | \text{rot}_R \mathcal{L} + [\mathbf{F} \mathbf{K}_2]_R, \\ \text{rot}_R \mathbf{K}_2 = \mathbf{N}_2 | \text{rot}_R \mathcal{L} - [\mathbf{F} \mathbf{K}_1]_R, \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_1 | \text{rot}_R \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 | \text{rot}_R \mathbf{K}_2 = \mathcal{L} | \text{rot}_R \mathcal{L} + [\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2]_R \mathbf{F}.$$

En comparant (330) et (335), on obtient

$$(336) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_1 | \text{rot}_R \mathcal{L} &= \mathbf{C}_2 | \mathbf{B}, & \mathbf{N}_2 | \text{rot}_R \mathcal{L} &= -\mathbf{C}_1 | \mathbf{B}, \\ \text{rot}_R \mathcal{L} &= \mathcal{G} \mathbf{B} = -\mathfrak{z} \hat{\mathbf{F}}, \end{aligned}$$

formule qu'on retrouve aussi avec la particularisation principale. D'autre part, on a

$$(337) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2]_{\mathbf{R}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_3^2 = u^2 - v^2 - w^2 = \mathcal{L}^{[2]}, \\ [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]_{\mathbf{R}} = -[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]_{\mathbf{R}} = \mathcal{O}^{[2]} = -\mathcal{U}_{\mathbf{R}}^{[2]} = -\mathbf{I}, \\ |[\mathbf{K}_1, \mathbf{N}_2 - \mathbf{K}_2, \mathbf{N}_1]_{\mathbf{R}} = \gamma u = 2[\mathcal{L}^q \mathcal{U}_{\mathbf{R}}], \\ -[\mathbf{C}_1, \mathbf{K}_1 \quad \mathbf{C}_2, \mathbf{K}_1]_{\mathbf{R}} = \gamma v = -2[\mathcal{L}^q \mathcal{G}] \end{array} \right.$$

(avec les notations pour les homographies, § 2), d'où aussi

$$(337') \quad -Q = \gamma[\mathcal{L}^q \mathcal{U}_{\mathbf{R}}] - \mathcal{O}^{[2]}.$$

77. Nous pouvons maintenant terminer la discussion du paragraphe 70. Avec

$$\mathcal{L} = u \mathcal{U}_{\mathbf{R}} + v \mathcal{G} + w \mathcal{O},$$

il s'agit de déterminer le coefficient w ; or par dérivation

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{R}} \mathcal{L} &= v \nabla_{\mathbf{R}} \mathcal{G} - w \nabla_{\mathbf{R}} \mathcal{O} + (\mathcal{U}_{\mathbf{R}}) \nabla u + (\mathcal{G}) \nabla v + (\mathcal{O}) \nabla w, \\ \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{L} &= v \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{G} - w \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{O} - \mathcal{U} \nabla u - \mathcal{O} \nabla v + \mathcal{G} \nabla w, \\ \mathcal{G} \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{L} &= v \mathcal{G} \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{G} - w \mathcal{G} \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{O} - \mathcal{O} \nabla u - \mathcal{U} \nabla v + \nabla w, \end{aligned}$$

et en utilisant les expressions trouvées pour $\text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{L}$, $\text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{G}$, $\text{rot}_{\mathbf{R}} \mathcal{O}$, il vient

$$(291') \quad (338) \quad \begin{aligned} \nabla w + w \mathcal{O} \mathbf{B} - \mathbf{B} \quad \gamma v \hat{\mathbf{F}} - \mathcal{O} \nabla u + \mathcal{U} \nabla v &= \mathbf{0}, \\ \nabla w + w \mathcal{O} \mathbf{B} + \mathbf{X} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

en posant

$$(339) \quad \mathbf{X} = -\mathbf{B} + \gamma v \hat{\mathbf{F}} - \mathcal{O} \nabla u + \mathcal{U} \nabla v.$$

En dérivant (338) et tenant compte de cette équation, on obtient

$$\nabla_{\mathbf{R}}^2 w + w \{ -(\mathcal{O} \mathbf{B})' + \nabla_{\mathbf{R}}(\mathcal{O} \mathbf{B}) \} - (\mathcal{O} \mathbf{B}) \mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

et en passant à la condition d'intégrabilité $\nabla_{\mathbf{R}} w = \mathbf{0}$ et tenant compte de $\mathcal{O} \mathbf{B} = -2 \hat{\mathbf{G}}$, on arrive à

$$(292') \quad (340) \quad -2 \text{rot}_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{G}} \cdot w + 2 \hat{\mathbf{F}} | \mathbf{X} + \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

qui est l'équation (292); du reste

$$\text{rot}_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{G}} = \text{div}_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{F}} = G_{101} + G_{102}.$$

On peut écrire l'équation (340)

$$(340') \quad \text{div}_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{F}} \cdot w = \frac{1}{2} \text{rot}_{\mathbf{R}} \mathbf{X} + \hat{\mathbf{F}} | \mathbf{X}.$$

Dans le cas général, $\text{div}_R \hat{\mathbf{F}} \neq 0$, ω sera donc donné par cette équation; si l'on part de deux formes différentielles quadratiques en u_1, u_2 , susceptibles d'être ramenées simultanément aux formes $\hat{\omega}_{01}^2 + \hat{\omega}_{02}^2$ et $\hat{\omega}_{02}^2 - \hat{\omega}_{01}^2$, par exemple — ce qui fait deux conditions algébriques — ces formes pourront être choisies pour $\varepsilon_0^{(2)}$ et $\delta_0^{(2)}$ d'une particularisation canonique; $\hat{\omega}_{01}$ et $\hat{\omega}_{02}$ seront par suite exprimés en u_1 et u_2 . On connaît alors les tenseurs $\mathcal{U}_R, \mathcal{G}, \mathcal{O}, \mathcal{N}$ et les sphères $\hat{\mathbf{F}}$ et \mathbf{B} pourvu que \mathcal{O} et $\hat{\mathbf{F}}$ satisfassent à la condition $\text{rot}_R \mathcal{O} = 2 \mathcal{O} \hat{\mathbf{F}}$, puis les coefficients u, v, w du tenseur \mathcal{L} , donc celui-ci sans ambiguïté : la surface est déterminée de façon unique au point de vue conforme.

Si $\hat{\mathbf{F}}$ satisfait à la condition $\text{div}_R \hat{\mathbf{F}} = 0$ des surfaces isothermiques, la sphère \mathbf{X} donnée par la formule (33G) doit satisfaire à l'équation

$$\frac{1}{2} \text{rot}_R \mathbf{X} - \hat{\mathbf{F}} | \mathbf{X} = 0.$$

On doit alors calculer ω par intégration, et l'on peut utiliser pour cela la combinaison

$$\hat{\mathbf{F}} | \nabla \omega - \frac{1}{2} \text{rot}_R \mathbf{X} = 0.$$

Les surfaces isothermiques sont susceptibles d'une déformation conforme (du 2^e ordre). On peut encore remarquer que

$$2 \hat{\mathbf{G}} = -\mathcal{O} \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} | \text{rot}_R \mathcal{O} = 0$$

entraînent

$$(341) \quad 2 \text{rot}_R \hat{\mathbf{G}} = 2 \text{div}_R \hat{\mathbf{F}} = -\mathcal{G} | \nabla_R \mathbf{B}.$$

On complète facilement les résultats obtenus dans ces paragraphes par les produits et différentielles extérieures, ou les rotationnels. En tenant compte en effet de ce que $\nabla_R \mathcal{O}$ et $\nabla_R \mathcal{G}$ sont symétriques à gauche, et que

$$\mathcal{U}_R | \nabla_R \mathcal{O} = \mathcal{O} | \nabla_R \mathcal{O} = 0, \quad \mathcal{U}_R | \nabla_R \mathcal{G} = \mathcal{G} | \nabla_R \mathcal{G} = 0,$$

puis introduisant les expressions trouvées pour $\text{rot}_R \mathcal{O}$ et $\text{rot}_R \mathcal{G}$, on obtient

$$(342) \quad \begin{cases} \nabla_R \mathcal{O} = (\mathcal{G}) \mathcal{G} \mathbf{B}, & \text{div}_R \mathcal{O} = -\text{rot}_R \mathcal{G} = \mathbf{B}, \\ \nabla_R \mathcal{G} = -(\mathcal{O}) \mathcal{G} \mathbf{B}, & \text{div}_R \mathcal{G} = \text{rot}_R \mathcal{O} = -\mathcal{N} \mathbf{B} = -\mathbf{C}. \end{cases}$$

Ces formules ont été obtenues par ce procédé par M. Thomsen; ce sont des applications immédiates déjà données de la formule générale (322)

$$(323) \quad \nabla_R \omega = (\mathcal{N} \omega) \cdot \hat{\mathbf{F}}. \quad \nabla_R \mathcal{G} = (\mathcal{N} \mathcal{G}) \cdot \hat{\mathbf{F}}.$$

Elles permettent aussitôt le calcul des dérivées d'expressions du type

$$\mathcal{G}^i | \Phi_R \quad \text{ou} \quad \omega^i | \Phi_R \quad (i = 0, 1, 2)$$

sans formules schématiques; par exemple

$$\nabla_R \mathcal{G}^i | \Phi_R = 2 \omega^i | \Phi_R \cdot \hat{\mathbf{F}} + \mathcal{G}^i | \nabla_R \Phi_R.$$

V. — Courbes tracées sur les surfaces. Réseaux angulaires et complexes harmoniques.

78. Nous avons établi, au paragraphe 75, les formules relatives à une particularisation canonique quelconque. Nous allons maintenant partir de celle-ci pour étudier une courbe tracée sur la surface et pourvue d'un repère canonique $\mathbf{MN}'\mathbf{N}'\mathbf{HW}$ ou \mathbf{MNUHW} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{N}_1 \cos \varphi - \mathbf{N}_2 \sin \varphi, \\ \mathbf{U} &= -\mathbf{N}_1 \sin \varphi - \mathbf{N}_2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Ce repère sera caractérisé par des formes de Pfaff ϖ liées aux formes ω par les relations

$$(343) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi_{01} &= \omega_{01} \cos \varphi + \omega_{02} \sin \varphi, \\ \varpi_{02} &= -\omega_{01} \sin \varphi + \omega_{02} \cos \varphi, \\ \varpi_{10} &= \omega_{10} \cos \varphi + \omega_{20} \sin \varphi, \\ \varpi_{20} &= -\omega_{10} \sin \varphi + \omega_{20} \cos \varphi, \\ \varpi_{13} &= \omega_{13} \cos \varphi + \omega_{23} \sin \varphi, \\ \varpi_{23} &= -\omega_{13} \sin \varphi + \omega_{23} \cos \varphi, \\ \varpi_{12} &= \omega_{12} + d\varphi, \\ \varpi_{30} &= \omega_{30}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette rotation de l'angle φ , à côté des formes comitantes, on a à considérer les nouvelles sphères \mathbf{F}' et \mathbf{G}'

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \nabla_R \varphi, \quad \mathbf{G}' = \mathcal{N} \mathbf{F}'.$$

Nous prendrons ensuite la sphère \mathbf{N} orthogonale à la courbe en \mathbf{m} ,

donc la sphère U tangente, et poserons

$$\begin{aligned} \varpi_{01} &= dm = \frac{\omega_{01}}{\cos \varphi} = \frac{\omega_{02}}{\sin \varphi}, & \varpi_{03} &= 0, \\ (344) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{M} &= \dots \quad dm \cdot \mathbf{N} \\ d\mathbf{N} &= a_{10} dm \cdot \mathbf{M} \quad \dots \quad a_{12} dm \cdot \mathbf{U} \quad \dots \quad a_{13} dm \cdot \mathbf{H} - dm \cdot \mathbf{W} \\ d\mathbf{U} &= a_{20} dm \cdot \mathbf{M} - a_{21} dm \cdot \mathbf{N} \quad \dots \quad a_{23} dm \cdot \mathbf{H} \\ d\mathbf{H} &= a_{30} dm \cdot \mathbf{M} - a_{31} dm \cdot \mathbf{N} - a_{23} dm \cdot \mathbf{U} \\ d\mathbf{W} &= \dots \quad - a_{10} dm \cdot \mathbf{N} - a_{20} dm \cdot \mathbf{U} - a_{30} dm \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

d'où

$$(345) \quad \left\{ \begin{aligned} G &= a_{12} = \frac{\varpi_{12}}{dm} = \frac{\Lambda}{\varepsilon_0^2 \frac{1}{2}} = G_1 \cos \varphi + G_2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dm}, \\ \xi &= a_{13} = \frac{\varpi_{13}}{dm} = \frac{\delta_0^{(2)}}{\varepsilon_0^2} = \alpha_1 \cos 2\varphi + \alpha_3 \sin 2\varphi, \\ a_{23} &= \frac{\varpi_{23}}{dm} = \frac{\gamma_0^{(2)}}{\varepsilon_0^2} = -\alpha_1 \sin 2\varphi + \alpha_3 \cos 2\varphi, \\ a_{10} &= \frac{\varpi_{10}}{dm} = \frac{\lambda_0^{(2)}}{\varepsilon_0^2} = \varepsilon_1 \cos^2 \varphi + \varepsilon_3 \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon_2 \sin^2 \varphi \\ &= u + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\varphi + \varepsilon_3 \sin 2\varphi, \\ a_{20} &= \frac{\varpi_{20}}{dm} = \frac{\mu_0^{(2)}}{\varepsilon_0^2} = \varepsilon_3 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \sin 2\varphi + \varepsilon_3 \cos 2\varphi, \\ a_{30} &= \frac{\varpi_{30}}{dm} = \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \sin \varphi, \end{aligned} \right.$$

et si l'on suppose en particulier que le repère initial était le repère principal, on a

$$(345') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{F}' | \mathbf{N} &= \mathbf{G} = G_1 \cos \hat{\varphi} + G_2 \sin \hat{\varphi} + \frac{d\hat{\varphi}}{dm}, \\ \mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{N}' &= \xi = -\cos 2\hat{\varphi}, \\ \mathbf{G}^{(2)} | \mathbf{N}^2 &= a_{21} = \sin 2\hat{\varphi}, \\ \mathbf{L}^{(2)} | \mathbf{N}' - a_{10} &= u - w \cos 2\hat{\varphi} + v \sin 2\hat{\varphi}, \\ \mathbf{M}^{(2)} | \mathbf{N}' - a_{20} &= w \sin 2\hat{\varphi} + v \cos 2\hat{\varphi}, \\ \mathbf{B} | \mathbf{N} &= a_{30} = -2G_2 \cos \hat{\varphi} - 2G_1 \sin \hat{\varphi}. \end{aligned} \right.$$

G s'appellera la courbure géodésique (conforme) canonique, a_{10} et a_{20} la

courbure et la torsion normales canoniques de la courbe considérée. Pour une courbe orthogonale à la première et pour laquelle les lettres seraient accentuées, on aurait en particulier

$$(346) \quad \begin{cases} a'_{10} + a_{10} = \nu u, & a'_{20} + a_{20} = 0, \\ a'_{30} + a_{30} = 4(G_1^2 + G_2^2) = \mathbf{B}^2. \end{cases}$$

A a_{30} on peut substituer

$$(347) \quad \frac{a_{30}}{\sqrt{a_{30}^2 - a'_{30}}} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{B}^2}} = \cos \beta,$$

cosinus de l'angle des sphères \mathbf{B} et \mathbf{N} . Les formules précédentes montrent la similitude que l'on peut poursuivre dans l'étude des courbes en géométrie canonique et en géométrie euclidienne. Nous avons introduit un nouveau noyau

$$(348) \quad \mathbf{M}^{(1)} = -\frac{1}{\nu} (\mathcal{N}\mathcal{L}),$$

et la forme différentielle correspondante

$$(348') \quad \begin{aligned} -[d\mathbf{M} \cdot d_R \mathbf{W}]_R &= \mathbf{M}^{(1)2} (d\mathbf{M})^2 = \mu_0^{(2)} = \omega_{01} \omega_{20} - \omega_{02} \omega_{10} \\ &= \varepsilon_3 (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \omega_{01} \omega_{02}, \end{aligned}$$

$\mu_0^{(2)}$ est liée à $\lambda_0^{(2)}$ comme $\gamma^{(2)}$ l'était à $\varphi^{(2)}$ en géométrie euclidienne; à côté de ces tenseurs on peut encore considérer

$$(349) \quad \begin{cases} \mathbf{N}^{(1)} = \frac{1}{2} (\mathcal{N} \mid \mathbf{M}^{(1)}) = \mathbf{L}^{(1)} - u \mathbf{E}^{(2)}, \\ \mathbf{N}^{(2)2} (d\mathbf{M})^2 = \nu_0^{(2)} = \nu \varepsilon_3 \omega_{01} \omega_{02} + \frac{1}{\nu} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2), \end{cases}$$

$\nu_0^{(2)}$ joue en géométrie canonique le rôle de $\delta^{(2)}$ en géométrie euclidienne.

$$\varepsilon = a_{10} - u = \frac{1}{\nu} (a_{10} - a'_{10})$$

pourra s'appeler l'excès de courbure normale canonique d'une courbe tracée sur la surface.

Les fonctions a_{10} et a_{20} — ou ε et a_{20} — sont, avec a_{30} ou $\cos \beta$, communes aux courbes tangentes en un point; par le procédé utilisé en géométrie euclidienne on pourra constituer, à partir d'elles, des chaînes de fonctions analogues à celles qui comprennent les fonctions de Laguerre et Darboux, et également communes aux courbes tangentes.

D'après

$$[\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} \cdot d' \mathbf{M}] = dm^3 (G[\mathbf{MNU}] - \cos^2 \hat{\varphi} [\mathbf{MNH}] - [\mathbf{MNW}]),$$

la courbure géodésique canonique G est commune aux courbes ayant en \mathbf{m} le même cercle osculateur; nous reviendrons du reste sur la signification de G .

La comparaison avec la géométrie euclidienne donne encore

$$(350) \quad LG = g - \frac{1}{L} \frac{dL}{ds}, \quad L\xi = k - H = e, \quad La_{23} = h.$$

79. Nous allons maintenant, pour trouver les relations entre les fonctions attachées à une courbe sur une surface, et celles qui ont été définies intrinsèquement aux paragraphes 62 et 63, faire subir au repère les modifications successives qui le ramèneront à un repère naturel; nous ferons d'abord une particularisation *géodésique tangente*, en prenant pour sphère tangente à la courbe en \mathbf{m} la sphère de courbure géodésique euclidienne. Appelons $\mathbf{MNA}_2\mathbf{HA}_1$ le nouveau repère, les coefficients a étant remplacés en général par des coefficients b . Il suffit de faire l'élation

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{U} - G\mathbf{M}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{W} - G\mathbf{U} - \frac{G^2}{2}\mathbf{M}$$

pour obtenir

$$(351) \quad \mathbf{M} | d^2 \mathbf{A}_2 = -d\mathbf{M} | d\mathbf{A}_2 = dm^2 b_{12} = 0, \quad b_{12} = 0.$$

On a du reste la vérification euclidienne

$$\mathbf{U} = 2\mathbf{m} \times \mathbf{q} + \frac{1}{L} \frac{dL}{ds} \mathbf{m}^{\hat{x}}, \quad LG = g - \frac{1}{L} \frac{dL}{ds}, \quad \mathbf{M} = L\mathbf{m}^{\hat{x}},$$

$$\mathbf{A}_2 = 2\mathbf{m} \times \mathbf{q} - g\mathbf{m}^{\hat{x}} = g\mathbf{m} \times (\mathbf{m} + r\mathbf{q}).$$

Les autres coefficients sont

$$(352) \quad \begin{cases} b_{13} = a_{13} = -\cos 2\hat{\varphi}, & b_{23} = a_{23} = \sin 2\hat{\varphi}, \\ b_{10} = a_{10} - \frac{G^2}{2}, & b_{20} = a_{20} + \frac{dG}{dm}, \quad b_{30} = a_{30} + G a_{23}. \end{cases}$$

La signification conforme de G est donnée par

$$(353) \quad G = \mathbf{W} | \mathbf{A}_2,$$

on obtient une expression euclidienne en posant

$$\mathbf{W} = z\mathbf{w}^{\hat{x}},$$

le point \mathbf{w} étant de masse un, et déterminant le coefficient z par la relation (269); nous poserons pour un instant

$$\mathbf{w}^{\hat{x}} | \mathbf{A}_2 = -2P,$$

P représentant la *puissance réduite* de \mathbf{w} par rapport à la sphère \mathbf{A}_2 ; on trouve alors

$$(353') \quad G = -\frac{P}{2} \Delta_s \left(\frac{1}{L^2} \right).$$

La particularisation à laquelle nous sommes arrivés est attachée à la connexion superficiellement induite — nous dirons *transinduite* — de la courbe tracée sur la surface, considérée comme espace (non linéaire) à deux dimensions; les formules superficielles sont en effet

$$(354) \quad \begin{cases} d_s \mathbf{M} = & . & dm \mathbf{N} & . \\ d_s \mathbf{N} = b_{10} dm \mathbf{M} & . & . & - dm \mathbf{A}_1 \\ d_s \mathbf{A}_1 = b_{20} dm \mathbf{M} & . & . & . \\ d_s \mathbf{A}_2 = & . & - b_{10} dm \mathbf{N} - b_{20} dm \mathbf{A}_2 & . \end{cases}$$

et sur la courbe on obtient seulement

$$(354') \quad \begin{cases} \delta \mathbf{M} = & . & - dm \mathbf{N} & . \\ \delta \mathbf{N} = b_{10} dm \mathbf{M} & . & - dm \mathbf{A}_1 & . \\ \delta \mathbf{A}_1 = & . & - b_{13} dm \mathbf{N} & . \end{cases}$$

Les connexions induites d'une courbe sont donc différentes, selon que l'on considère cette courbe comme directement plongée dans l'espace conforme, ou comme tracée sur une surface, pourvue d'une connexion induite, et elle-même plongée dans cet espace. Dans la connexion transinduite, le cercle osculateur de la courbe est remplacé par le *cercle harmonique*, intersection de la sphère harmonique avec la sphère de courbure géodésique euclidienne; celle-ci contenant le cercle osculateur, on peut dire que le cercle harmonique est la projection ou l'image sur \mathbf{H} du cercle osculateur. C'est sur le cercle harmonique qu'est représentée la courbe par la connexion transinduite. On pourrait, en suivant la même marche qu'aux paragraphes 62 et 63, simplifier les formules (354) par le choix d'un nouveau paramètre (transnaturel) et une modification du repère. Pour ce paramètre l , on aurait

$$dl^2 = -b_{10} dm'^2 = -b_{10} l^2 ds'^2, \quad \bar{q}' = -b_{20}.$$

et le repère serait pourvu d'un pôle transnaturel \mathbf{J} .

Un tel choix écarte le cas des lignes pour lesquelles b_{20} serait nul; ces lignes sont précisément les cercles de M. Cartan, ou cercles induits; ceux-ci sont en effet caractérisés par

$$\mathbf{M} | \mathbf{A}_2 = 0, \quad d_s \mathbf{M} | \mathbf{A}_2 = 0, \quad d_s^2 \mathbf{M} | \mathbf{A}_2 = 0, \quad d_s^3 \mathbf{M} | \mathbf{A}_2 = 0.$$

Les trois premières conditions sont réalisées et la dernière peut s'écrire

$$-dm^2 d_s \mathbf{N}_1 | d_s \mathbf{A}_2 = dm^3 b_{20} = 0, \quad b_{20} = 0.$$

Avec le repère initial $\mathbf{MN}'_1 \mathbf{N}'_2 \mathbf{HW}$, l'équation des cercles induits serait, par suite, avec

$$(355) \left\{ \begin{aligned} b_{20} &= a_{20} \gamma \frac{dG}{dm} = \frac{\varpi_{10} + dG}{dm} = \frac{\varpi_{10}}{dm} \frac{d\varpi_{10}}{d\mathbf{m}'} = \frac{\mu_0'^2}{\varepsilon_0'^2} + \frac{d}{dm} \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon_0'^2} \right), \\ b_{20} &= \frac{d^2 \varphi}{dm^2} - (G_1 \sin \varphi - G_2 \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dm} + \frac{dG_1}{dm} \cos \varphi + \frac{dG_2}{dm} \sin \varphi \\ &\quad + \frac{\varepsilon_1}{2} \sin 2\varphi - \varepsilon_3 \cos^2 \varphi, \end{aligned} \right.$$

$$(355') \quad dm^6 \cdot b_{20} = \Psi = \varepsilon_0'^2 d\Lambda - \frac{3}{2} \Lambda d\varepsilon_0'^2 - \varepsilon_0'^2 \mu_0'^2 = 0.$$

Or l'équation des cercles géodésiques canoniques peut s'écrire

$$(356) \quad \Phi = \varepsilon_0'^2 d\Lambda - \frac{3}{2} \Lambda d\varepsilon_0'^2 = 0,$$

d'où aussi

$$(357) \quad \Psi = \Phi + \varepsilon_0'^2 \mu_0'^2 = 0.$$

Au point de vue de la connexion induite, les formules ($b_{20} = 0$)

$$(358) \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{A}_2 &= \dots \dots \dots b_{23} d\mathbf{m} \mathbf{H}, \quad d_s \mathbf{A}_2 = 0 \\ d\mathbf{H} &= b_{30} dm \mathbf{M} - b_{13} dm \mathbf{N} - b_{23} dm \mathbf{A}_2 \end{aligned} \right.$$

$$(358') \quad [\mathbf{A}_2, d\mathbf{A}_2] = b_{13} dm [\mathbf{A}_2, \mathbf{H}], \quad d[\mathbf{A}_2, \mathbf{H}] = [\mathbf{A}_2, d\mathbf{H}]$$

montrent que le cercle harmonique d'un cercle induit est *superficiellement fixe*; ou encore que ce cercle harmonique est en général le cercle caractéristique de la sphère de courbure géodésique \mathbf{A}_2 et décrit par suite une surface périsphérique : le cercle induit est l'intersection partielle de celle-ci avec la surface considérée (1).

(1) De même, en géométrie euclidienne, la tangente à une ligne géodésique est la caractéristique du plan normal à la surface mené par cette droite. Mais l'analogie entre géodésiques euclidiennes et cercles induits est plus profonde : on peut mettre en parallèle l'étude des surfaces faite par Gauss à partir du ds^2 et l'étude des surfaces en géométrie conforme avec particularisation fondamentale; les deux familles de lignes tiennent dans ces études des places correspondantes.

En substituant à la sphère harmonique une sphère $\mathbf{H} + \xi_0 \mathbf{M}$ ($\xi_0 = \text{const.}$) du faisceau tangent (particularisation tangente non fondamentale), on généraliserait les cercles induits par les lignes d'équation canonique

$$\Psi - \xi_0 \varepsilon_0'^2 \gamma_0'^2 = 0$$

ou d'équation euclidienne

$$\Psi - \xi_0 L \varepsilon_0'^2 \gamma_0'^2 = 0,$$

qui ont aussi une signification intrinsèque.

Si l'on forme, avec les formules (267') ou (275), l'équation des cercles induits en géométrie euclidienne, en utilisant la particularisation fondamentale du paragraphe 68, Γ et $\varepsilon^{(2)}$ se substituent à Λ et $\varepsilon_0^{(2)}$; on obtient

$$(359) \quad \begin{aligned} \mu^{(2)} &= -\gamma LH \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 = -H \gamma^{(2)}, \\ \Psi &= \varepsilon^{(2)} d\Gamma - \frac{3}{2} \Gamma d\varepsilon^{(2)} - H \varepsilon^{(2)\prime} \gamma^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Pour les surfaces minima $H = 0$, la sphère harmonique devient le plan tangent à la surface et les cercles induits coïncident avec les cercles géodésiques, les surfaces périsphériques correspondantes étant des surfaces canaux. De même, une ligne de courbure qui est cercle géodésique sur une surface est aussi cercle induit; on sait qu'elle est alors sphérique, etc.

Le long des cercles induits, on a en général

$$(359') \quad \frac{d\kappa}{ds} = H h = \frac{H}{T}.$$

80. On revient à la connexion directement induite d'une courbe et à une particularisation fondamentale en remplaçant la sphère harmonique H par la sphère de courbure normale \overline{A}_3 , ce qui conduit à un repère $MNA_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4$ avec des coefficients c , au moyen de l'élation

$$\overline{A}_3 = H + \xi M. \quad \overline{A}_4 = A_4 - \xi H - \frac{\xi'}{\gamma} M. \quad \xi = b_{13} = a_{13}.$$

On vérifie comme précédemment que

$$\overline{A}_3 = 2m \times n + km^2 = km \times (m + \gamma Rn).$$

On obtient ainsi les nouveaux coefficients

$$(360) \quad \left\{ \begin{aligned} c_{13} &= 0, & c_{23} &= b_{23} = a_{23} & c_{30} &= b_{30} + \frac{d\xi}{dm} = a_{30} + G a_{23} + \frac{d\xi}{dm}, \\ c_{10} &= b_{10} - \frac{\xi'}{\gamma} = a_{10} - \frac{G^2 + \xi^2}{\gamma}, & c_{20} &= b_{20} - \xi a_{23} = a_{20} - \xi a_{23} + \frac{dG}{dm}. \end{aligned} \right.$$

Une rotation autour du cercle osculateur $[A_2 \overline{A}_3]$ ramène alors à une particularisation osculatrice et à un repère $MNRSA_4$ avec des coefficients d ,

$$\begin{aligned} R &= A_2 \cos \psi + \overline{A}_3 \sin \psi, \\ S &= -A_2 \sin \psi + \overline{A}_3 \cos \psi, \end{aligned}$$

l'angle ψ étant choisi pour annuler d_{30} ; or on a les nouveaux coefficients

$$(361) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_{23} = c_{23} + \frac{d\psi}{dm}, \quad d_{20} = c_{20} \cos \psi + c_{30} \sin \psi, \\ d_{30} = -c_{20} \sin \psi + c_{30} \cos \psi = 0. \end{array} \right.$$

Pour annuler d_{30} , il faut prendre

$$(362) \quad \text{tang } \psi = \frac{c_{30}}{c_{20}} = \frac{a_{30} + G a_{23} + \frac{d\xi}{dm}}{a_{20} - \xi a_{23} + \frac{dG}{dm}}.$$

Ce serait une vérification assez ardue, à faire sur cette formule, que de retrouver

$$(363) \quad \text{tang } \psi = \text{tang } (\theta + \zeta);$$

nous avons en effet appelé :

θ l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la surface ;

ζ l'angle de la sphère osculatrice avec le plan osculateur ;

ψ l'angle de la sphère osculatrice avec le plan tangent, et adopté les notations

$$\text{tang } \theta = \frac{r}{R} = \frac{k}{g}, \quad \text{tang } \zeta = -\frac{\rho}{\tau \frac{d\rho}{ds}} = \tau \kappa \frac{dx}{ds},$$

et il resterait à vérifier la formule donnée par Demartres

$$(363') \quad \text{tang } \psi = \frac{\frac{dk}{ds} + gh}{\frac{dg}{ds} - kh}.$$

Mais nous en sommes arrivés, dans la suite des modifications du repère, à un point où il ne reste plus qu'à répéter les dernières opérations faites au paragraphe 63. On déduit d'abord de la comparaison des formules

$$d\zeta + \frac{ds}{\tau} = d_{23} dm = c_{23} dm + d\psi.$$

Mais

$$c_{23} dm = h ds = \frac{ds}{T},$$

donc on a bien

$$(364) \quad d\psi = d\zeta + ds \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T} \right) = d\zeta + d\theta.$$

Si l'on imagine alors qu'on a modifié le repère $\overline{\mathbf{MNRSA}_4}$ pour obtenir le repère naturel \mathbf{PQRSV} , on trouvera les relations suivantes, entre les paramètres et les fonctions introduits, données par

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= q \mathbf{m}^{\bar{x}} = \bar{Q} \mathbf{M}, \\ q - \bar{Q} \mathbf{L}_1, \quad dp &= q ds - \bar{Q} \mathbf{L}_1 ds = \bar{Q} dm, \\ (365) \quad t &= \frac{1}{q} \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{\bar{Q}} \left(\frac{d\psi}{dm} - c_{23} \right) \quad (1), \quad c_{23} = a_{23}. \end{aligned}$$

Mais

$$q^2 = \frac{\sigma}{\rho^2 \tau}, \quad \bar{Q}^2 = -d_{20} = \mp \sqrt{c_{20}^2 + c_{30}^2}.$$

L'angle ψ n'étant déterminé qu'à un multiple de π près, on pourra prendre

$$(366) \quad \bar{Q} = \sqrt{c_{20}^2 + c_{30}^2} = \sqrt{\left(a_{20} - \xi a_{23} - \frac{dG}{dm} \right)^2 + \left(a_{30} + G a_{23} + \frac{d\xi}{dm} \right)^2},$$

et l'on aura l'expression de la courbure conforme

$$(367) \quad c = \frac{{}_2\bar{Q} \frac{d^2\bar{Q}}{dm^2} - 3 \left(\frac{d\bar{Q}}{dm} \right)^2}{{}_2\bar{Q}^3} = \frac{1}{\bar{Q}^2} \left(a_{10} - \frac{G^2 + \xi^2}{2} \right).$$

En se reportant aux formules (345), on pourra exprimer finalement $\tan \psi$, \bar{Q}^2 , dp , t , c au moyen des formes comitantes introduites sur la surface et de leurs différentielles, ou avec les coefficients de ces formes et les angles φ ou $\hat{\varphi}$; mais la complication des formules leur ôterait beaucoup d'utilité.

Nous remarquerons cependant qu'une courbe tracée sur une surface sera un cercle pour $d_{20} = \sqrt{c_{20}^2 + c_{30}^2} = 0$, c'est-à-dire pour $c_{20} = c_{30} = 0$; il y aura avantage à donner les expressions explicites de ces équations, qu'on trouverait aussi par $[\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} \cdot d^2\mathbf{M} \cdot d^3\mathbf{M}] = 0$

$$(368) \quad dm^5 \cdot c_{20} = \Psi^2 - \gamma_0^2 \delta_0^2 \gamma_0^2 - \gamma_0^2 d\Lambda - \frac{1}{2} \Lambda d\gamma_0^2 + \varepsilon_0^2 (\varepsilon_0^2 \mu_0^2 - \delta_0^2 \gamma_0^2),$$

$$(369) \quad dm^5 \cdot c_{30} = \gamma_0^2 \Lambda - \delta_0^2 d\gamma_0^2 + \varepsilon_0^2 (\varepsilon_0^2 \mu_0^2 + d\delta_0^2).$$

Nous poserons

$$(370) \quad J = c_{30} dm^5, \quad N = c_{20} dm^5, \quad \tan \psi = \frac{J dm}{N};$$

(1) En désignant par Σ l'angle de deux sphères osculatrices infiniment voisines, Θ la différentielle de l'angle ψ , cette formule est équivalente à celle de Demartres (*loc. cit.*)

$$\Sigma = \bar{\sigma} + \Theta.$$

$J = 0$, $N = 0$ sont respectivement les équations, en géométrie conforme, des courbes dont les sphères osculatrices sont soit tangentes, soit orthogonales à la surface, et les équations des cercles seraient $J = N = 0$.

Les lignes sphériques ont pour équation

$$(371) \quad \bar{Q}l = \frac{d\psi}{dm} \quad a_{23} = 0,$$

$$(371') \quad \frac{1}{2} \sqrt{J} d\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2 (N dJ - J dN) + \gamma_0^{(2)} (N^2 + J^2 \varepsilon_0^{(2)}) = 0,$$

et pour les lignes de courbure sphériques $\gamma_0^{(2)} = 0$, on retrouve aussitôt

$$\text{tang } \psi = \text{const.}, \quad \psi = \psi_0.$$

81. Pour poser ou résoudre des problèmes relatifs à des courbes ou des familles de courbes tracées sur une surface, on peut procéder comme en géométrie euclidienne et utiliser, soit des systèmes de Pfaff, soit les équations différentielles d'ordre supérieur équivalentes (Chap. II, §§ 37 et suivants). Nous pourrions former les expressions générales de $d^{p+1} \mathbf{M}$, ou $d^{p-1} \mathbf{M}$, ou $d_{\mathbf{R}}^p \mathbf{M}$ par des formules semblables à celles de la géométrie euclidienne; du reste, nous avons déjà rencontré les équations différentielles des courbes les plus intéressantes. Comme nous utiliserons des formes différentielles scalaires, nous continuerons à opérer en géométrie réduite, et n'aurons qu'à répéter la formule (120) relative à une forme différentielle

$$(372) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{(p)} - \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^p \Big| (d\mathbf{M})^p - \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^p \Big| \mathbf{N}^p dm^p, \\ d\alpha^{(p)} = \alpha^{(p+1)} - \left(\partial_{\mathbf{R}} \Big| \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^p \right)^p (d\mathbf{M})^p \frac{\lambda}{dm} + p\alpha^{(p)} \frac{d^2 m}{dm^2}, \end{array} \right.$$

avec

$$(372') \quad \alpha^{(p+1)} = \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^p \Big| (d\mathbf{M})^{p+1} \quad dm = \varepsilon_0^{(2)\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$(373) \quad d^{p+1} \mathbf{M} = \varpi_{00}^{(p+1)} \mathbf{M} + \varpi_{01}^{(p+1)} \mathbf{N} + \varpi_{02}^{(p+1)} \mathbf{U} + \varpi_{03}^{(p+1)} \mathbf{H} + \varpi_{04}^{(p+1)} \mathbf{W},$$

$$\varpi_{0i}^{(i)} = \varpi_{01} = dm, \quad \varpi_{0i}^{(i)} = 0 \quad (i \neq 1),$$

nous aurons,

$$(374) \quad \varpi_{0i}^{(p+1)} = d\varpi_{0i}^{(p)} + \sum_j \varpi_{ji} \varpi_{0j}^{(p)} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4),$$

$$\varpi_{1i} = -\varpi_{01}, \quad \varpi_{ik} = 0 \quad (i \neq 1),$$

$$\varpi_{ki} = -\varpi_{i0} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Pour les premières différentielles, il vient

$$(375) \quad d^2 \mathbf{M} = \lambda_0^{(2)} \mathbf{M} + d^2 m \mathbf{N} + \frac{\Lambda}{dm} \mathbf{U} + \delta_0^{(2)} \mathbf{H} - \varepsilon_0^{(2)} \mathbf{W},$$

et, en tenant compte de (372),

$$(376) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi_0^{(1)} &= d\lambda_0^{(2)} - \frac{\lambda_0^{(2)}}{dm} d^2 m + \frac{\Lambda \mu_0^{(2)}}{dm^2} - \varpi_{30} \delta_0^{(2)} \\ &= \lambda_0^{(3)} - 3 \frac{\Lambda \mu_0^{(2)} - \lambda_0^{(2)} dm d^2 m}{dm^2} - \varpi_{30} \delta_0^{(2)} = \frac{3 d\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^{(3)}}{2} + \varpi_{30} \delta_0^{(2)}, \\ \varpi_0^{(3)'} &= d^3 m - \frac{\Lambda^2}{dm^3} - \frac{2 \varepsilon_0^{(2)} \lambda_0^{(2)} - \delta_0^{(2)2}}{dm}, \\ \varpi_0^{(2)} &= d \left(\frac{\Lambda}{dm} \right) + \frac{\Lambda}{dm} d^2 m - \frac{\gamma_0^{(2)}}{dm} \delta_0^{(2)} + \frac{\mu_0^{(2)}}{dm} \varepsilon_0^{(0)} \\ &= \frac{d\Lambda + \varepsilon_0^{(2)} \mu_0^{(2)} - \delta_0^{(2)} \gamma_0^{(2)}}{dm}, \\ \varpi_0^{(3)'} &= d\delta_0^{(2)} - \frac{\delta_0^{(2)}}{dm} d^2 m + \frac{\Lambda \gamma_0^{(2)}}{dm^2} + \varpi_{30} \varepsilon_0^{(2)} \\ &= \delta_0^{(3)} - 3 \frac{\Lambda \gamma_0^{(2)} + \delta_0^{(2)} dm d^2 m}{dm^2} + \varpi_{30} \varepsilon_0^{(2)} = \frac{3 d\delta_0^{(2)} - \delta_0^{(3)}}{2} + \varpi_{30} \varepsilon_0^{(2)}, \\ \varpi_0^{(4)} &= -d\varepsilon_0^{(2)} - dm d^2 m = -3 dm d^2 m. \end{aligned} \right.$$

Nous rappelons du reste que

$$(377) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_0^{(2)2} + \gamma_0^{(2)2} &= \varepsilon_0^{(0)2}, & \delta_0^{(2)} d\delta_0^{(2)} + \gamma_0^{(2)} d\gamma_0^{(2)} &= \varepsilon_0^{(2)} d\varepsilon_0^{(2)} = 2 dm^3 d^2 m, & \dots, \\ \delta_0^{(3)} &= -2 \gamma_0^{(2)} \cdot \hat{\omega}_{12}, & \gamma_0^{(3)} &= 2 \delta_0^{(2)} \cdot \hat{\omega}_{12}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons ainsi calculé les coefficients de $d^3 \mathbf{M}$; ceux de $d^4 \mathbf{M}$ sont déjà plus compliqués et l'on n'aura en général besoin dans les problèmes que d'une partie de ceux-ci, aussi nous ne poursuivons pas les calculs.

Si l'on cherche les équations des cercles au moyen des formules précédentes, on trouve

$$(378) \quad dm \cdot \left\| \begin{array}{ccc} \varpi_0^{(2)'} & \varpi_0^{(2)'} & \varpi_0^{(2)'} \\ \varpi_0^{(1)'} & \varpi_0^{(1)'} & \varpi_0^{(1)'} \end{array} \right\| = 0.$$

Représentons par [23], [34], [42] les déterminants déduits du tableau; on obtient

$$[23] = \frac{P}{dm^3}, \quad [34] = J, \quad [42] = -\frac{N}{dm},$$

et l'on vérifie l'identité

$$(378') \quad \Lambda J = P + \delta_0^{(2)} N.$$

Les équations $\mathbf{J} = 0$, $\mathbf{N} = 0$ sont donc bien celles qu'il convient d'employer dans la recherche des cercles. Il semble du reste assez difficile d'aborder avec ces équations la théorie des surfaces cercleées, qui a été étudiée directement dans d'importants Mémoires (1); rappelons qu'il y a lieu en particulier de distinguer parmi elles les surfaces périsphériques (enveloppes de sphères à un paramètre), caractérisées par $\varpi'_{3,0} = 0$ ou $\mathbf{G}^{(2)} | \mathbf{B}^2 = 0$ et les cyclides de Dupin, pour lesquelles $\varpi_{3,0}$ s'évanouit, ou $\mathbf{B} = 0$ (2). Aussi on serait amené à étudier d'abord les surfaces pour lesquelles les équations des cercles ont des solutions communes avec $\gamma_0^{(2)} = 0$; de même avec $\delta_0^{(2)} = 0$, les équations (377) permettant alors d'importantes simplifications.

82. LES CERCLES INDUITS. — C'est sur les cercles induits que nous allons revenir; on peut en effet chercher si des surfaces, distinctes au point de vue conforme, sont susceptibles d'une *représentation* l'une sur l'autre au moyen de tels cercles. Nous rappelons l'équation

$$(355') \quad \Psi = \varepsilon_0^2 d\Lambda - \frac{3}{2} \Lambda d\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^{2,2} \mu_0^{(2)} = 0.$$

Suivant une indication de M. Cartan, en remarquant que l'équation $\Psi = 0$ admet pour solution singulière l'équation des lignes isotropes, la représentation cherchée, qui conserverait les cercles induits, conserverait aussi les angles.

Aussi on peut d'abord chercher, en abandonnant la connexion induite des surfaces, une autre connexion donnant les mêmes cercles. Comme

$$\Lambda = \omega_{01} d\omega_0 - \omega_{02} d\omega_1 + \varepsilon_0^2 \omega_{12}$$

avec un repère canonique quelconque, et qu'on pourra toujours, dans un changement de connexion, choisir le nouveau repère pour avoir les mêmes composantes ω_{01} , ω_{02} , ω_{12} , $\omega_{00} = 0$ (3), le changement de connexion (superficielle) ne portera que sur ω_{10} et ω_{20} et devra conserver la forme

$$\mu_0^{(2)} = \omega_{01} \omega_{20} - \omega_{02} \omega_{10}.$$

Caractérisons donc le premier repère de notre connexion induite, avec particularisation canonique, par des coefficients ω et le repère corres-

(1) G. DEMARTRES, *Thèse*, 1883. — A. BESSERVE, *Thèse*, 1915. — E. VESSIOT, *J. de Math.* (*loc. cit.*).

(2) G. THOMSEN, *Thèse* (*loc. cit.*).

(3) Cf. E. CARTAN, *Les espaces à connexion conforme* (*loc. cit.*).

pendant d'une autre connexion par des coefficients ϖ , soumis aux restrictions indiquées.

M. Cartan a suggéré la recherche d'une connexion particulière (1), que nous appellerons *circulaire*, conservant les cercles de la connexion induite et pour laquelle les composantes du tenseur de courbure satisferaient à

$$\Pi_{S_{00}} = \Pi_{S_{01}} = \Pi_{S_{02}} = \Pi_{S_{11}} = 0.$$

Comme

$$\varpi_{00} = 0, \quad \varpi_{01} = \omega_{01}, \quad \varpi_{02} = \omega_{02}, \quad \varpi_{12} = \omega_{12},$$

il restera seulement à satisfaire à

$$\begin{aligned} -\Pi_{S_{00}} &= [\varpi_{01}\varpi_{10} + \varpi_{02}\varpi_{20}] = 0, \\ \Pi_{S_{12}} &= \varpi'_{12} - [\varpi_{01}\varpi_{20} - \varpi_{02}\varpi_{10}] = 0. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} -\Omega_{S_{00}} &= [\omega_{01}\omega_{10} + \omega_{02}\omega_{20}] = 0, \\ \Omega_{S_{12}} &= \omega'_{12} - [\omega_{01}\omega_{20} - \omega_{02}\omega_{10}] = [\omega_{01}\omega_{02}], \end{aligned}$$

d'où les conditions à satisfaire par ϖ_{10} et ϖ_{20}

$$(379) \quad \begin{cases} [\omega_{01}(\varpi_{10} - \omega_{10}) + \omega_{02}(\varpi_{20} - \omega_{20})] &= 0, \\ [\omega_{01}(\varpi_{20} - \omega_{20}) - \omega_{02}(\varpi_{10} - \omega_{10}) - \omega_{01}\omega_{02}] &= 0, \\ \omega_{01}(\varpi_{20} - \omega_{20}) - \omega_{02}(\varpi_{10} - \omega_{10}) &= \omega_{01}\omega_{02}. \end{cases}$$

Il s'ensuit

$$(379') \quad \begin{cases} \varpi_{10} = \omega_{10} + \frac{1}{2}\omega_{01}, \\ \varpi_{20} = \omega_{20} + \frac{1}{2}\omega_{02}, \end{cases}$$

et l'on vérifie qu'alors

$$(380) \quad \begin{cases} \Pi_{S_{10}} = \varpi'_{10} - [\varpi_{12}\varpi_{20}] = \omega'_{10} - [\omega_{12}\omega_{20}] = \Omega_{S_{10}}, \\ \Pi_{S_{20}} = \varpi'_{20} - [\varpi_{21}\varpi_{10}] = \omega'_{20} - [\omega_{21}\omega_{10}] = \Omega_{S_{20}}. \end{cases}$$

Les composantes du tenseur de courbure superficiel sont donc, pour la connexion circulaire, les mêmes que celles relatives à la connexion induite, sauf $\Pi_{S_{11}}$, qui est nulle. La transformation conforme définie à la surface par le tenseur de courbure, dans la connexion circulaire, est alors réduite à une élation de centre m , dont l'axe est tangent aux lignes $\hat{G} \mid dM = 0$.

(1) On pourrait aussi rattacher ce problème à la théorie des équations différentielles. Cf. E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 52, 1924).

Notre analyse laisse de côté les lignes pour lesquelles $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$, les sphères en particulier; on aurait pu étudier simultanément tous les cas avec une particularisation seulement semi-simple; mais on voit aussitôt que pour les sphères toutes les composantes Π , comme toutes les composantes Ω , sont nulles.

Dans le cas général, si deux surfaces sont représentables l'une sur l'autre par cercles induits, l'égalité des composantes $\Pi_{s,10}$ et $\Pi_{s,20}$ relatives à ces deux surfaces entraîne celle des composantes $\Omega_{s,10}$, $\Omega_{s,20}$, $\Omega_{s,1}$, chacune à chacune; *les deux surfaces doivent donc avoir même tenseur de courbure* (1). Mais, plus exactement, ce sont seulement les tenseurs de courbure d'élation qui doivent être identiques; aussi les cyclides de Dupin, pour lesquelles le tenseur de courbure d'élation est nul, sont représentables par cercles sur la sphère.

L'interprétation géométrique de la connexion circulaire attribuée à une surface nécessiterait sans doute l'intervention d'un espace supérieur où serait plongée la surface.

83. Nous avons fait remarquer que la notion de réseau angulaire de lignes subsistait en géométrie conforme; on peut donc y parler des sphères **F** et **G** attachées à un tel réseau comme front et guide réduits, et, dans le domaine de la géométrie réduite, introduire une notion analogue à celle de déplacement parallèle en géométrie euclidienne induite. C'est seulement avec les cercles induits qu'on pourrait introduire une notion plus générale valable pour la géométrie superficielle induite.

Nous n'étudierons la théorie des réseaux angulaires que pour deux cas simples.

Réseaux isothermes et réseaux à géodésiques canoniques. — Le retour aux formules euclidiennes

$$(27'') \quad \hat{\mathbf{f}}_0 = \hat{\mathbf{f}} + \mathcal{J} \nabla_s \log L, \quad \hat{\mathbf{g}}_0 = \hat{\mathbf{g}} - \nabla_s \log L \quad (\nabla_s \text{ euclidiens}),$$

qui donnent par changement de repère en géométrie réduite,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \mathbf{f} + \mathcal{J} \nabla_s \log L, & \mathbf{g}_0 &= \mathcal{J} \mathbf{f}_0, \\ \mathbf{f}'_0 &= \mathbf{f}_0 + \nabla_s \varphi, & \mathbf{g}'_0 &= \mathcal{J} \mathbf{f}'_0, \end{aligned}$$

(1) Les surfaces déformables avec conservation des cercles induits dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument; les lignes caractéristiques de cette déformation sont les lignes minima (Remarque de M. E. CARTAN).

suffit à montrer par

$$(381) \quad \mathbf{I} = \text{rot}_s \mathbf{g} = \text{div}_s \mathbf{f} = \text{rot}_s \mathbf{g}_0 = \text{div}_s \mathbf{f}_0,$$

que la condition d'isothermie $\mathbf{I} = 0$ est la même en géométrie euclidienne et en géométrie conforme; mais on a

$$(382) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{L} \{ 2\mathbf{m} \times \mathbf{f}_0 + (\mathbf{f}_0 \times \nabla_s \log L) \mathbf{m}^2 \}, \quad \mathbf{G} = \partial \mathcal{L} \mathbf{F},$$

et par suite, exactement,

$$(381') \quad \mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{I}}{L^2} = \text{rot}_R \mathbf{G} = \text{div}_R \mathbf{F},$$

ce qui permet de rester en géométrie conforme et de répéter, dans cette géométrie, les théories établies en géométrie euclidienne. Le cas le plus intéressant, déjà signalé, est celui où le réseau principal est isotherme; nous avons vu

$$(341) \quad 2 \text{rot}_R \hat{\mathbf{G}} = 2 \text{div}_R \hat{\mathbf{F}} = -\mathcal{G} \mid \nabla_R \mathbf{B};$$

donc la condition pour qu'une surface soit isothermique peut s'écrire

$$(383) \quad \mathcal{G} \mid \nabla_R \mathbf{B} = 0,$$

ce qui donne en géométrie euclidienne une équation en \mathcal{J} ,

$$(383') \quad \mathbf{g}^{(2)} \frac{2}{\lambda} (\nabla_s^2 \mathbf{H} - \nabla_s \log L \cdot \nabla_s \mathbf{H}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{g}^{(2)} \frac{2}{\lambda} \nabla_s \left(\frac{\nabla_s \mathbf{H}}{L} \right) = 0.$$

Tant qu'on reste en géométrie canonique, où l'élément linéaire dm^2 est fixé, les réseaux isothermes ne donnent, pour la représentation conforme, que les résultats qu'on pouvait obtenir en géométrie euclidienne à partir du ds^2 ; l'étude de la représentation sur la sphère, en particulier, n'est pas facilitée parce que la sphère échappe à la particularisation canonique. Mais on peut prévoir l'existence de surfaces pour lesquelles le dm^2 sera réductible à la forme

$$(384) \quad dm^2 = du_1^2 + du_2^2 = L^2 ds^2.$$

Ce problème se rapporte en même temps à l'étude des réseaux à géodésiques canoniques pour lesquelles on peut encore répéter en partie ce qui a été dit pour la géométrie euclidienne. Cependant, aux surfaces développables, $\mathbf{K} = 0$, de cette géométrie correspondent en géométrie canonique celles pour lesquelles

$$(385) \quad -Q = 2u + 1 = \text{rot}_R \mathbf{F} = -\text{div}_R \mathbf{G} = 0.$$

On a, du reste, exactement, en géométrie euclidienne, d'après (382),

$$(386) \quad -Q = \frac{\Delta_s \log L - K}{L^2};$$

aussi ces surfaces sont caractérisées en géométrie euclidienne, ce qui est bien d'accord avec (277'), par

$$(385') \quad \Delta_s \log L = H^2 - L'' = K,$$

soit une équation aux dérivées partielles relative à l'homographie \mathcal{F} ; ces surfaces ont même degré de généralité que les surfaces isothermiques. La condition (385) est indépendante du repère; supposons-la réalisée pour le repère principal, par exemple; on a alors

$$\hat{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{R}} \alpha, \quad \alpha = \alpha(u_1, u_2),$$

et pour un autre repère,

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \alpha + \nabla_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}.$$

On peut donc déterminer $\hat{\varphi}$, à une constante près — ce qui définit un réseau angulaire — pour que le front \mathbf{F} attaché à ce réseau soit nul; un tel réseau peut être dit *totalelement géodésique* et est aussi *isotherme*; le dm^2 , rapporté aux repères d'un tel réseau, a bien la forme (383), et ceci correspond aussi aux expressions (176) données en géométrie euclidienne: ici,

$$\mathbf{g} = \nabla_s \log L, \quad K = \Delta_s \log L,$$

$$\Delta_s(u_1) = \Delta_s(u_2) = L', \quad \Delta_{\mathbf{R}}(u_1) = \Delta_{\mathbf{R}}(u_2) = 1.$$

On aura encore des surfaces particulières si le réseau principal est géodésique, ou seulement comprend des géodésiques; les formules (284') ou (289) indiquent alors l'axe de l'élation du tenseur de courbure. On retrouve ainsi les surfaces périsphériques si cet axe est tangent à une ligne de courbure, et les cyclides de Dupin si le tenseur de courbure d'élation est nul, le repère principal étant alors totalement géodésique et isotherme: ces cyclides sont donc des surfaces $Q = 0$ isothermiques.

L'analogie avec la géométrie euclidienne mènerait ensuite à l'étude des dm^2 correspondant aux ds^2 de révolution, et aux transformations conformes infinitésimales attachées à ce cas. Mais l'intérêt n'est pas le même en géométrie conforme à cause de la différence des déformations euclidienne et conforme.

pour ramener $d\bar{\mathbf{M}}$ à une forme quasi canonique

$$d\bar{\mathbf{M}} = \bar{\omega}_{01} \mathbf{A}_1 + \bar{\omega}_{02} \mathbf{A}_2 \quad (\bar{\omega}_{00} = 0).$$

Il faudrait, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \mathbf{I} | d\bar{\mathbf{M}} &= 0, \\ \frac{dx}{x} &= \mathbf{G} | d\bar{\mathbf{M}} = \omega_{12}, \end{aligned}$$

et cette condition ne pourra être réalisée que si l'on a la condition d'intégrabilité

$$- \text{rot}_R \mathbf{I}_R = \text{rot}_R \mathbf{G} = 0, \quad \omega'_{12} = 0,$$

c'est-à-dire si le réseau considéré est *isotherme*; dans ce cas seulement

$$\begin{aligned} -\mathbf{I}_R &= \mathbf{G} = \nabla_R v, & \frac{dx}{x} &= dv, \\ (d\bar{\mathbf{M}})^2 &= d\bar{m}^2 = x^0 dm^2 = x^2 L^2 ds^2, \end{aligned}$$

le pôle du réseau peut servir de pôle à la surface pour une particularisation nouvelle (quasi canonique) (1). On a alors

$$d\mu = \mathbf{g} \times d\mathbf{m} = \mathbf{g}_0 \times d\mathbf{m} + d \log L = d(v + \log L),$$

et l'on peut prendre, avec les formules (176),

$$ds^2 = e^{-2\mu} (du_1^2 + du_2^2), \quad d\bar{m}^2 = \frac{1}{L^2} (du_1^2 + du_2^2).$$

On obtient évidemment des réseaux angulaires intéressants quand le pôle \mathbf{I} du réseau coïncide avec un des points particuliers mis en évidence sur la sphère \mathbf{H} , ou reste sur le cercle $[\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{T}}]$, etc. De même, on peut

(1) La particularisation géodésique semble indiquée pour l'étude des surfaces isothermiques; \mathbf{I} étant le pôle principal correspondant, on retrouve la particularisation incidente; on peut aussi dans ce cas employer le pôle de contact \mathbf{T} , $\mathbf{T}_R = -2\hat{\mathbf{G}}$ étant un gradient.

En général, pour un changement de pôle donnant une particularisation quasi canonique (conservant $\omega_{00} = 0$),

$$\bar{\mathbf{M}} = x \mathbf{M} \quad \bar{\mathbf{W}} = \frac{1}{x} \left(\mathbf{W} - \mathbf{Z} - \frac{\mathbf{Z}^2}{2} \mathbf{M} \right), \quad \mathbf{Z} | \mathbf{M} = \mathbf{Z} | \mathbf{W} = 0,$$

il est nécessaire et suffisant que

$$\text{rot}_R \mathbf{Z} = 0, \quad \mathbf{Z} = -\nabla_R \log x,$$

et l'on peut alors faire varier le pôle $\bar{\mathbf{W}}$ sur le cercle $[\mathbf{Z}\mathbf{H}]$ en choisissant un nouveau paramètre $\mathbf{X}(x)$.

utiliser ce pôle \mathbf{I} pour des assemblages de réseaux; considérons ainsi les assemblages qui feraient décrire à \mathbf{I} un cercle de la sphère \mathbf{H} ; pour un autre réseau, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \mathbf{G} + \mathcal{H} \nabla_{\mathbf{R}} \varphi, \\ \mathbf{I}' &= \mathbf{W} - \mathbf{G}' - \frac{\mathbf{G}'^2}{2} \mathbf{M} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} - \mathcal{H} \nabla_{\mathbf{R}} \varphi - \frac{\Delta_{\mathbf{R}}(\varphi) + 2\mathbf{F} | \nabla_{\mathbf{R}} \varphi}{2} \mathbf{M}.$$

Soit \mathbf{A} une sphère orthogonale à \mathbf{H} découpant sur cette sphère le cercle envisagé; si

$$\mathbf{A} = a\mathbf{M} + b(\mathbf{F} \cos \alpha + \mathbf{G} \sin \alpha) + c\mathbf{W},$$

on devra d'abord avoir $\mathbf{A} | \mathbf{I} = 0$, donc

$$(388) \quad \mathbf{A} = b(\mathbf{F} \cos \alpha + \mathbf{G} \sin \alpha - \mathbf{G}^2 \sin \alpha \cdot \mathbf{M}) + c\left(\mathbf{W} + \frac{\mathbf{G}^2}{2} \mathbf{M}\right),$$

et alors la condition $\mathbf{A} | \mathbf{I}' = 0$ donne

$$b(\mathbf{F} \cos \alpha + \mathbf{G} \sin \alpha) | \mathcal{H} \nabla_{\mathbf{R}} \varphi + \frac{c}{2} (\Delta_{\mathbf{R}}(\varphi) + 2\mathbf{F} | \nabla_{\mathbf{R}} \varphi) = 0$$

ou

$$(389) \quad (c + b \sin \alpha) \mathbf{F} | \nabla_{\mathbf{R}} \varphi - b \cos \alpha \mathbf{G} | \nabla_{\mathbf{R}} \varphi + \frac{c}{2} \Delta_{\mathbf{R}}(\varphi) = 0,$$

condition d'assemblage très générale, les coefficients b, c, α étant arbitraires.

Si $c = 0$, la sphère \mathbf{A} passe par \mathbf{M} (et \mathbf{I}), donc fait partie du faisceau $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, et la condition imposée à φ donne des réseaux incidents; on examinerait de même les conditions exprimant que \mathbf{A} passe par \mathbf{W}, \mathbf{T} ou $\hat{\mathbf{I}}$, ou contient le cercle $[\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{T}}]$, etc.

85. LES COMPLEXES HARMONIQUES. — En géométrie euclidienne, à côté du réseau des géodésiques, d'équation $\Gamma = 0$, nous avons développé (Chap. II, VI), une théorie des réseaux angulaires, définis à partir d'un faisceau de courbes, de front \mathbf{f} , autrement dit à partir d'un système de repères, par une équation différentielle

$$\Gamma = \mathcal{H}(\mathbf{f} \times d\mathbf{m}) = 0.$$

Nous avons brièvement repris cette théorie en géométrie conforme canonique, comme on pourrait la reprendre avec toute autre particularisation. Plutôt que les premiers membres des équations précédentes,

les expressions intéressantes sont d'ailleurs

$$\frac{\Gamma}{\varepsilon^{(2)}} = \varpi_{12} = \omega_{12} + d\varphi, \quad \frac{\Gamma}{\varepsilon^{(2)}} - \mathbf{f} \times d\mathbf{m} = d\varphi \quad (\omega_{12} \text{ et } \varpi_{12} \text{ euclidiens}).$$

comme le montre l'usage de la différentiation extérieure

$$- \mathbf{K}[\varpi_1 \varpi_2] = \varpi'_{12} - \left(\frac{\Gamma}{\varepsilon^{(2)}} \right)', \quad (d\varphi)' = 0.$$

En géométrie conforme, nous avons aussi considéré

$$\frac{\Lambda}{\varepsilon_0^2} = \varpi_{12} = \omega_{12} + d\varphi, \quad \frac{\Lambda}{\varepsilon_0^2} - \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M} = d\varphi, \\ - \mathbf{Q}[\varpi_{01} \varpi_{02}] = \varpi'_{12} - \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon_0^2} \right)', \quad (d\varphi)' = 0.$$

mais seule la forme $d\varphi$ est un comitant dans un changement de variable par homothétie $\mathbf{M}' = x\mathbf{M}$. Il faut aller jusqu'aux cercles induits pour trouver une équation invariante par ce changement, soit $\Psi = 0$, et c'est seulement l'expression $\frac{\Psi}{\varepsilon_0^2}$ qui est alors comitant absolu, car elle se rattache à la connexion induite et à la particularisation fondamentale, mais ne dépend pas des particularisations suivantes. Or, nous avons

$$(390) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Psi}{\varepsilon_0^2} - \frac{\Phi}{\varepsilon_0^2} + \mu_0^2 &= \frac{d\Lambda}{\varepsilon_0^2} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{\Lambda}{\varepsilon_0^2} \frac{d\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} - \mu_0^2 = d\varpi_{12} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \varpi_{12} \frac{d\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} + \mu_0^2, \\ d\varpi_{10} &= d\omega_{12} + d\varphi, \quad d\varphi = \frac{\omega_{01} d\omega_{02} - \omega_{02} d\omega_{01}}{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}, \\ \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{d\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2} &= \frac{\omega_{01} d\omega_{01} + \omega_{02} d\omega_{02}}{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}, \quad (\mu_0^2) = \omega_{01} \omega_{20} - \omega_{02} \omega_{10}. \end{aligned} \right.$$

A côté du complexe des cercles induits, défini sur la surface par l'équation du troisième ordre $\Psi = 0$, nous allons considérer la famille de courbes, définie par rapport au repère (de composantes ω) par l'équation

$$(391) \quad dm^2 \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)}{dm} = dm \cdot d\left(\frac{d\varphi}{dm}\right) = 0.$$

Soit donc, en géométrie canonique, un système de courbes coordonnées pourvues de repères $\mathbf{MN}, \mathbf{N}_2 \mathbf{HW}$, ou un seul des faisceaux orthogonaux formé de l'une de ces familles de courbes: nous appelons *complexe harmonique* l'ensemble des courbes satisfaisant à l'équation (391), en négligeant la famille singulière formée par les lignes isotropes. On a donc

$$(392) \quad d\varphi = c_0 dm, \quad \varphi = c_0 m - \varphi_0 \quad (c_0, \varphi_0 \text{ constantes}),$$

le long d'une courbe de ce complexe: dm étant l'angle de deux sphères

harmoniques infiniment voisines, un tel complexe a bien une signification géométrique; il comprend aussi le réseau angulaire défini à partir du faisceau initial. De même qu'en un point de la surface un réseau angulaire est représenté sur la sphère \mathbf{H} par un faisceau linéaire de cercles harmoniques et le second point \mathbf{I} commun à ces cercles (pôle du réseau), on pourra en tout point associer à un complexe harmonique un réseau de loxodromies tracé sur \mathbf{H} .

En notations euclidiennes, ceci correspond à

$$(392') \quad d\varphi = c_0 L ds, \quad \varphi = c_0 \int L ds + \varphi_0.$$

Nous rappelons que dans un changement de variable par homothétie,

$$\mathbf{M}' = x \mathbf{M}, \quad dm' = x dm,$$

l'expression $\frac{d^2 \varphi}{dm^2}$ n'est pas comitante; on vérifierait qu'on a seulement

$$\frac{\frac{d^2 \varphi}{dm'^2} + \frac{d \log x}{dm'} \frac{d\varphi}{dm'}}{\left(\frac{d\varphi}{dm'}\right)^2} = \frac{\frac{d^2 \varphi}{dm^2}}{\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2}.$$

En revenant à une particularisation fondamentale euclidienne

$$\mathbf{m}^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{L} \mathbf{M}, \quad x = \frac{1}{L}, \quad ds = \frac{1}{L} dm, \quad \varepsilon^{(2)} = x^2 \varepsilon_0^{(2)},$$

on aurait donc à considérer l'équation

$$\frac{d^2 \varphi}{ds'^2} - \frac{d \log L}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

qui donne bien la solution indiquée.

L'expression que nous considérons,

$$\delta m^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dm^2} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dm} \frac{d\varepsilon_0^{(2)}}{\varepsilon_0^{(2)}} \right),$$

a bien au contraire la propriété d'invariance voulue ⁽¹⁾. On pourra, par

⁽¹⁾ Il y aurait lieu de développer les expressions analytiques invariantes pour le changement de variable géométrique; c'est d'abord la dérivée logarithmique qui permet les formes les plus simples; on reconnaîtra ensuite l'intervention des dérivées de Schwarz

$$y^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{y''}{y'^{\frac{3}{2}}} \right)' = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2,$$

avec les expressions plus générales

$$\frac{\Phi}{\varepsilon_0^{(2)^{\frac{3}{2}}}} = \varepsilon_0^{(2)^{\frac{1}{2}}} d \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon_0^{(2)^{\frac{3}{2}}}} \right)$$

où $dm^2 = \varepsilon_0^{(2)}$.

suite, prendre pour l'équation différentielle du troisième ordre d'un complexe harmonique tracé sur la surface

$$(393) \quad \frac{\Psi}{\varepsilon_0^{(2)}} - d\omega_{12} + \frac{1}{2} \omega_{12} \frac{d\varepsilon_0^{(2)}}{\varepsilon_0^{(2)}} - \mu_0^{(2)} = 0,$$

équation qui sera valable pour une particularisation fondamentale quelconque.

86. Le terme correctif ajouté à l'équation des cercles induits est

$$(-\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{F} + \mathbf{GF} - \mathbf{M}^{(1)}) \dot{\mid} (d\mathbf{M})^2$$

de noyau

$$(394) \quad -\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{F} + \mathbf{GF} - \mathbf{M}^{(1)} = -(\nabla_{\omega}\mathbf{F} + \mathbf{M}^{(2)}) = -\mathcal{R},$$

\mathcal{R} est l'analogie, à un degré supérieur, de ce que nous appelions front pour un réseau angulaire, et ce noyau du second ordre est un comitant d'un complexe harmonique; l'équation d'un complexe harmonique pourra encore s'écrire

$$(393') \quad \Psi - \varepsilon_0^{(2)}\mathcal{R} \dot{\mid} (d\mathbf{M})^2 = 0.$$

L'équation des cercles géodésiques canoniques correspond à la substitution de $\nabla_{\omega}\mathbf{F}$ à \mathcal{R} , ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé pour les cercles géodésiques euclidiens, mais tous ces cercles géodésiques ne sont pas attachés à la seule particularisation fondamentale; dans \mathcal{R} il y a une partie symétrique et une partie alternée qu'on peut négliger quand \mathcal{R} agit sur une expression symétrique, $(d\mathbf{M})^2$ par exemple.

Si, pour une courbe du complexe harmonique, on a

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N} dm.$$

$$\mathcal{R} \dot{\mid} \mathbf{N}^2 = \mathcal{R} \dot{\mid} (\mathbf{N} - \mathbf{G}'\mathbf{M})^2 = 0,$$

la sphère de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale est orthogonale à une des sphères \mathbf{R}_1 ou \mathbf{R}_2 , qu'on peut mettre en évidence dans la partie symétrique de \mathcal{R} ,

$$\S \mathcal{R} = \widehat{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2},$$

et la sphère de courbure géodésique $\mathbf{U} + \mathbf{GM}$ de la ligne considérée, tangente à une de ces sphères. La ligne présentera un sommet induit, puisque au point considéré l'équation du complexe se réduira à celle des cercles induits.

Il semble qu'il y aurait lieu, pour pousser plus loin l'étude des complexes harmoniques, puis de leurs assemblages, d'étudier la distribution sur la sphère \mathbf{H} , des pôles transnaturels \mathbf{J} attachés à chaque ligne du complexe, et leurs relations avec le pôle canonique \mathbf{W} de la surface, et le pôle \mathbf{I} du réseau angulaire compris dans le complexe: dans la particularisation géodésique tangente d'une courbe, nous avons d'abord considéré un pôle intermédiaire

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{W} - \mathbf{G}\mathbf{U} - \frac{G^2}{2} \mathbf{M},$$

et pour le pôle du réseau, nous avons

$$\mathbf{I} = \mathbf{W} - \mathbf{G} - \frac{\mathbf{G}^2}{2} \mathbf{M}. \quad \mathbf{G} \dots = \mathbf{G}'\mathbf{N} + \mathbf{G}\mathbf{U}.$$

Pour les courbes d'un réseau, \mathbf{A}_4 appartient aux sphères \mathbf{N} et $\mathbf{U} + \mathbf{G}\mathbf{M}$, donc décrit le cercle découpé sur \mathbf{H} par la sphère $\mathbf{W} - \frac{1}{2} \mathbf{G}$, et l'on forme facilement l'expression de \mathbf{A}_4 en fonction de φ : mais, même pour φ constant, l'expression de \mathbf{J} est déjà compliquée.

Il resterait enfin à mettre en évidence les relations du tenseur de courbure avec la forme différentielle $\frac{u'}{z_0^2}$, mais nous n'avons pas non plus résolu ce problème.

VI. — Contact et applicabilité des surfaces conformes. Tenseurs de courbure.

87. Nous procéderons comme au Chapitre II (§ 34) en considérant une position initiale $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ du repère mobile $\mathbf{MN}, \mathbf{N}, \mathbf{HW}$ et supposant que le déplacement de celui-ci dépend des coordonnées absolues X, Y de son origine par rapport au repère fixe, la troisième coordonnée absolue Z étant la fonction des premières variables définie par l'équation de la surface

$$Z = f(\lambda, Y).$$

En coordonnées pentasphériques homogènes, les coordonnées t, x, y, z, u de l'origine étant liées par la relation

$$x' + y' + z^2 + 2tu = 0,$$

ceci donne en coordonnées absolues

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{t}, & Y &= \frac{y}{t}, & Z &= \frac{z}{t}, & U &= \frac{u}{t}, \\
 X^2 + Y^2 + Z^2 + 2U &= 0, \\
 (395) \quad U &= -\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2),
 \end{aligned}$$

qui fait connaître U après Z.

Nous restons en géométrie canonique, $\omega_{00} = 0$, et avons déjà établi 81) les relations successives par rapport au repère mobile

$$(396) \quad \left\{ \begin{aligned}
 d\mathbf{M} &= \omega_{01} \mathbf{N}_1 + \omega_{02} \mathbf{N}_2 + \omega_{03} \mathbf{H} + \omega_{04} \mathbf{W}, \\
 d^{p+1} \mathbf{M} &= \omega_{00}^{(p+1)} \mathbf{M} + \omega_{01}^{(p+1)} \mathbf{N}_1 + \omega_{02}^{(p+1)} \mathbf{N}_2 + \omega_{03}^{(p+1)} \mathbf{H} + \omega_{04}^{(p+1)} \mathbf{W}, \\
 \omega_{0i}^{(1)} &= \omega_{0i}, & \omega_{02}^{(2)} &= \omega_{02}, & \omega_{0i}^{(3)} &= \omega_{0i} = 0 \quad (i = 0, 3, 4), \\
 \omega_{14} &= -\omega_{04}, & \omega_{4i} &= -\omega_{i0}, \\
 \omega_{0i}^{(p+1)} &= d\omega_{0i}^{(p)} + \sum_j \omega_{ji} \omega_{0j}^{(p)}.
 \end{aligned} \right.$$

Par rapport au repère fixe, on a

$$(397) \quad \mathbf{M} = t\mathbf{E}_0 + x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3 + u\mathbf{E}_4,$$

pour revenir aux coordonnées absolues, nous poserons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= t\mathbf{P}, & \mathbf{P} &= \mathbf{E}_0 + X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3 + U\mathbf{E}_4, \\
 d\mathbf{P} &= dX\mathbf{E}_1 + dY\mathbf{E}_2 + dZ\mathbf{E}_3 + dU\mathbf{E}_4, \\
 d^{p+1} \mathbf{P} &= d^{p+1}Z\mathbf{E}_3 + d^{p+1}U\mathbf{E}_4.
 \end{aligned}$$

Aussi, avec

$$(397') \quad d^{p+1} \mathbf{M} = \tau_1^{(p+1)} \mathbf{E}_0 + \tau_1^{(p+1)} \mathbf{E}_1 - \tau_2^{(p+1)} \mathbf{E}_2 + \tau_3^{(p+1)} \mathbf{E}_3 + \tau_4^{(p+1)} \mathbf{E}_4 = d^{p+1}(t\mathbf{P}),$$

on aura les formules

$$(398) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \tau_1^{(p+1)} &= X \cdot d^{p+1}t + (p+1)dX \cdot d^p t, & \tau_2^{(p+1)} &= Y \cdot d^{p+1}t + (p+1)dY \cdot d^p t, \\
 \tau_3^{(p+1)} &= d^{p+1}(tZ), & \tau_4^{(p+1)} &= d^{p+1}(tU).
 \end{aligned} \right.$$

En supposant alors la coïncidence initiale des deux repères, nous obtiendrons, en égalant chacune à chacune les composantes $\omega_{0i}^{(p+1)}$ et $\tau_i^{(p+1)}$ et tenant compte des simplifications successives, une suite de formules *valables pour les valeurs des paramètres et des fonctions en \mathbf{E}_0* , et calculables de proche en proche. On a d'abord

$$(399) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{E}_0, & \mathbf{N}_1 &= \mathbf{E}_1, & \mathbf{N}_2 &= \mathbf{E}_2, & \mathbf{H} &= \mathbf{E}_3, & \mathbf{W} &= \mathbf{E}_4, \\
 t &= 1, & X &= Y &= Z &= U &= 0, \\
 0 &= dt, & \omega_{01} &= dX, & \omega_{02} &= dY, & 0 &= dZ, & 0 &= dU,
 \end{aligned} \right.$$

puis

$$(400) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0^{(2)} = d^2 t, \quad d\omega_{01} - \omega_{12}\omega_{02} = 0, \quad d\dot{\varphi}_{02} - \omega_{21}\omega_{01} = 0, \\ \delta_0^{(2)} = d^2 Z, \quad -\varepsilon_0^{(2)} = d^2 U. \end{array} \right.$$

On voit donc que $d^2 \mathbf{M}$ n'a pas de réduite, que les différentielles de ω_{01} et ω_{02} se calculent comme des noyaux dérivés réduits, les formules précédentes donnant aussi

$$(400') \quad d\varepsilon_0^{(2)} = 0, \quad d\varphi + \omega_{12} = 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda = 0.$$

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 34, et comme cela résulte de la formule (372), le calcul des différentielles des formes comitantes se poursuivra comme celui des noyaux dérivés réduits; nous avons surtout en vue les différentielles de Z ; il résulte des formules (376)

$$(401) \quad \lambda_0^{(3)} + \omega_{30}\delta_0^{(2)} = d^3 t, \quad \delta_0^{(3)} + \omega_{30}\varepsilon_0^{(2)} = d^3 Z, \quad 0 = d^3 U.$$

On a vu que

$$(323') \quad \delta_0^{(3)} = -2 \overset{\wedge}{\omega}_{12} \gamma_0^{(2)};$$

donc nous poserons

$$(402) \quad d^3 Z = \omega_{30}\varepsilon_0^{(2)} - 2 \overset{\wedge}{\omega}_{12} \gamma_0^{(2)} = \varphi_0^{(3)}.$$

Nous avons déjà rencontré cette forme symétrique $\varphi_0^{(3)}$ au paragraphe 67, dans les particularisations du repère; elle était introduite dès la particularisation simple, mais c'est la particularisation canonique qui lui a donné comme hessienne $\delta_0^{(2)}$, en la privant d'un terme $\omega_{00}\delta_0^{(2)}$; avant la particularisation simple, on avait en effet

$$\mathbf{D}^{(1)} | \mathbf{D}^{(1)} = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \mathbf{E}^{(2)} | \mathbf{E}^{(1)},$$

ensuite

$$\mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)} | \mathbf{E}^{(2)}.$$

Ce n'est qu'après la particularisation canonique qu'on a eu

$$\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{E}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{D}^{(2)} | \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{D}^{(2)} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{D}^{(3)} = 0.$$

Or, en posant

$$\varphi_0^{(3)} = \mathbf{F}^{(3)} | (\mathbf{dM})^3, \quad \mathbf{F}^{(3)} = \mathbf{D}^{(3)} + \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{B},$$

il en résulte bien

$$(403) \quad \mathbf{D}^{(2)} | \mathbf{F}^{(3)} = 0,$$

88. Les formules donnant les valeurs suivantes des coefficients de

$d^{p+1} \mathbf{M}$ restent assez compliquées, malgré leur mode de formation régulier; on utilisera la réduction de la formule (272) à

$$d\alpha^{(p)} = \alpha^{(p+1)}$$

(mais, pour éviter des confusions, nous n'emploierons pas cette notation pour les $\eta_i^{(p)}$ ou $\omega_{0i}^{(p)}$).

D'autre part, on aura seulement

$$(404) \quad \eta_1^{(p+1)} = (p+1)\omega_{01}\omega_{00}^{(p)}, \quad \eta_2^{(p+1)} = (p+1)\omega_{02}\omega_{00}^{(p)},$$

tandis que les égalités $\omega_{01}^{(p+1)} = \eta_1^{(p+1)}$, $\omega_{02}^{(p+1)} = \eta_2^{(p+1)}$ donneront des formules de réduction valables pour la suite des calculs. On calculera ensuite

$$(405) \quad d^{p+1} t = \eta_0^{(p+1)} = \omega_{00}^{(p+1)} = d\omega_{00}^{(p)} + p\lambda_0^{(2)}\omega_{00}^{(p)} + \omega_{30}\omega_{03}^{(p)},$$

puis

$$(406) \quad \begin{cases} \omega_{03}^{(p+1)} = d\omega_{03}^{(p)} + p\delta_0^{(2)}\omega_{03}^{(p)} - \omega_{30}\omega_{04}^{(p)}, \\ \omega_{04}^{(p+1)} = d\omega_{04}^{(p)} - p\varepsilon_0^{(2)}\omega_{00}^{(p)}, \end{cases}$$

les égalités $\omega_{03}^{(p+1)} = \eta_3^{(p+1)}$, $\omega_{04}^{(p+1)} = \eta_4^{(p+1)}$ donneront alors $d^{p+1} \mathbf{Z}$ et $d^{p+1} \mathbf{U}$ au moyen des différentielles précédentes des mêmes fonctions et de t ; pour \mathbf{U} , on pourrait aussi utiliser l'équation (395).

On arrive donc aux formules d'accroissements des fonctions $t, \mathbf{Z}, \mathbf{U}$:

$$(407) \quad \begin{cases} \Delta t = \frac{1}{2!} \lambda_0^{(2)} + \frac{1}{3!} (\lambda_0^{(3)} + \omega_{30} \delta_0^{(2)}) + \dots, \\ \Delta \mathbf{Z} = \frac{1}{2!} \delta_0^{(2)} + \frac{1}{3!} \varphi_0^{(3)} + \dots, \\ \Delta \mathbf{U} = -\frac{1}{2!} \varepsilon_0^{(2)} + 0 + \dots, \end{cases}$$

et l'on a alors pour l'accroissement $\Delta \mathbf{M}$

$$\Delta \mathbf{M} = d\mathbf{M} + \Delta t \cdot \mathbf{E}_0 + \Delta \mathbf{Z} \cdot \mathbf{E}_3 + \Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}_4.$$

La formule

$$(407') \quad \Delta \mathbf{Z} = \frac{1}{2!} \delta_0^{(2)} + \frac{1}{3!} \varphi_0^{(3)} + \dots = \Delta f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

est suffisante pour l'étude du contact des surfaces en un même point \mathbf{E}_0 , la sphère harmonique \mathbf{E}_3 étant d'abord rendue commune aux surfaces; pour les contacts des divers ordres, il restera à exprimer les égalités chacune à chacune des formes différentielles du développement de $\Delta \mathbf{Z}$, jusqu'à l'ordre considéré inclus. En particulier, une seconde approximation d'une surface (la première étant la sphère harmonique)

est donnée par la cyclide de Dupin d'équation

$$Z = \frac{1}{2}(Y^2 - X^2).$$

Pour les conditions d'applicabilité des surfaces, on peut utiliser la forme $\mathbf{F}^{(3)}$ précédemment introduite

$$(402') \quad \mathbf{F}^{(3)} = \mathbf{D}^{(3)} - \mathbf{E}^{(2)}\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{R}}\mathcal{O} - (\mathcal{U}_{\mathbf{R}})\mathbf{B}.$$

La condition de symétrie (à droite, celle à gauche étant acquise) de $\mathbf{F}^{(3)}$ est

$$-\mathbf{F}^{(3)} \mid \mathcal{H} = \text{rot}_{\mathbf{R}}\mathcal{O} + \mathcal{H}\mathbf{B} = \text{rot}_{\mathbf{R}}\mathcal{O} - \mathcal{O}\hat{\mathbf{F}} = 0.$$

D'autre part

$$\mathbf{F}^{(3)} = \mathbf{E}^{(2)}\mathbf{B} - \mathcal{O}\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}\mathcal{U}_{\mathbf{R}} - \mathcal{O}\hat{\mathbf{F}}\mathcal{G},$$

et en formant $\mathbf{F}^{(3)} \mid \mathcal{U}_{\mathbf{R}}$, on retrouve

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(3)} \mid \mathcal{U}_{\mathbf{R}} &= \mathbf{B} - \mathcal{O}\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= -\mathcal{O}\hat{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

Les conditions indiquées au paragraphe 77 entre les formes $\mathcal{U}_{\mathbf{R}}$ et \mathcal{O} , conditions d'apolarité et conditions d'intégrabilité, reviennent donc à des conditions portant sur $\mathbf{D}^{(2)}$ et $\mathbf{F}^{(1)}$ (ou $\delta_0^{(2)}$ et $\varphi_0^{(3)}$), exprimant que la première forme est la hessienne (équilatère) de la seconde. Dans le cas général des surfaces non isothermiques, ces deux formes suffisent pour la détermination de la surface au point de vue conforme. L'applicabilité du second ordre entraîne donc en général l'identité conforme, celle du premier ordre correspondant à la représentation conforme (1).

89. Nous nous contentons de donner, en géométrie canonique, les formules les plus simples relatives aux tenseurs de courbure. Nous avons indiqué, au paragraphe 66, diverses formes des homographies \mathcal{H}_s et \mathcal{H}_E ; en géométrie réduite on utilise une homographie

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}} = \omega_{12}\mathcal{H} = \mathcal{O}\overline{\mathbf{N}_2\mathbf{N}_1} = \overline{d_{\mathbf{R}}\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_1} + \overline{d_{\mathbf{R}}\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_2}$$

qui, tirée de \mathcal{H}_s , introduit une nouvelle décomposition de celle-ci; il

(1) Cf. E. CARTAN (*loc. cit.*) l'étude des applicabilités et isomorphismes; la représentation conforme sur la sphère échappe à vrai dire à notre analyse.

s'y associe le tenseur correspondant

$$\mathcal{K}_{RR} = -Q[\omega_{01}\omega_{02}]\mathcal{R},$$

mais celui-ci n'est qu'une partie du tenseur de courbure de rotation superficiel \mathcal{K}_{RS}

$$\mathcal{K}_{RS} = [\omega_{01}\omega_{02}]\mathcal{R}, \quad I = -Q - \overset{\circ}{2}u.$$

qui n'est lui-même qu'une partie du tenseur de courbure superficiel \mathcal{K}_s . On pourrait voir, comme en géométrie euclidienne, comment les diverses parties \mathcal{R} se groupent dans les tenseurs \mathcal{K} , mais nous nous contenterons de rappeler quelques formes du tenseur \mathcal{K}_s ,

$$(408) \quad \mathcal{K}_s - \mathcal{R}'_{s_0} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}'_k = -\left\{ \mathcal{R}_L \mathcal{R}_E \right\} = \overset{\circ}{2} \overline{\delta\mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}}.$$

ce qui correspond à

$$[\delta\mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}] = [\omega_{30}\omega_{31}][\mathbf{MN}_1] + [\omega_{30}\omega_{32}][\mathbf{MN} \cdot] + [\omega_{13}\omega_{23}][\mathbf{N}_2\mathbf{N}_1]$$

et est un calcul au moyen des éléments externes; \mathcal{K}_{RR} pouvait aussi se calculer avec les éléments externes aux éléments réduits, puisque

$$\begin{aligned} & [\delta_R \mathbf{M} \cdot d_R \mathbf{W} - d_R \mathbf{M} \cdot \delta_R \mathbf{W}] + [\delta_R \mathbf{H} \cdot d_R \mathbf{H}] \\ &= [\omega_{01}\omega_{20} - \omega_{02}\omega_{10} + \omega_{13}\omega_{31}][\mathbf{N}_2\mathbf{N}_1] \\ &= -Q[\omega_{01}\omega_{02}][\mathbf{N}_0\mathbf{N}_1]. \end{aligned}$$

La formule la plus simple pour \mathcal{K}_s s'obtient en tenant compte de la relation entre \mathbf{B} et $\hat{\mathbf{F}}$, qui donne

$$(409) \quad \begin{aligned} [\delta\mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}] &= -\left(\overset{\circ}{2} [\hat{\mathbf{M}\hat{\mathbf{F}}}] + [\mathbf{N}_0\mathbf{N}_1] \right) [\omega_{01}\omega_{02}], \\ \mathcal{K}_s &= -\overset{\circ}{4} \left(\overset{\circ}{2} \overline{\hat{\mathbf{M}\hat{\mathbf{F}}} + \overline{\mathbf{N}_2\mathbf{N}_1}} \right) \overline{\mathbf{N}_0\mathbf{N}_1} \cdot \overline{\delta\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M}}. \end{aligned}$$

où sont bien en évidence l'élation et la rotation; mais la forme (408) montre que le déplacement attaché au tenseur de courbure se réduit en réalité à *une rotation seulement* autour du cercle $[\delta\mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}]$ ou $[\mathbf{MHT}]$; nous avons déjà signalé l'arbitraire des décompositions du tenseur de courbure en géométrie conforme: c'est relativement au repère employé que sont valables les dénominations élation et rotation que nous avons conservées. Le cercle $[\mathbf{MHT}]$ pourrait s'appeler *cercle de courbure de la surface*; en utilisant

$$[\hat{\mathbf{G}\hat{\mathbf{F}}}] = \hat{\mathbf{G}}^2[\mathbf{N}_2\mathbf{N}_1].$$

on obtient pour ce cercle, dans le cas général, la forme

$$(410) \quad [\delta \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}] = - \frac{[\omega_{01} \omega_{02}]}{\hat{\mathbf{G}}^2} [({}_2 \hat{\mathbf{G}}^2 \mathbf{M} + \hat{\mathbf{G}}) \hat{\mathbf{F}}].$$

90. Malgré les analogies parfois étroites qu'on retrouve dans la géométrie des surfaces quand on l'envisage successivement du point de vue euclidien et du point de vue conforme, un calcul détaillé montre aussi des divergences profondes. Mais la comparaison que nous avons faite a encore un but, c'est de préparer l'étude des variétés dont les éléments générateurs sont, soit les semi-sphères de Laguerre, soit les sphères orientées de Lie, des variétés à un et deux paramètres principalement (1). Les méthodes du calcul géométrique s'appliqueront facilement aux nouveaux problèmes qu'on rencontrera, car la semi-sphère peut être traitée comme un point euclidien d'un espace supérieur, et le point de l'espace euclidien usuel n'en est qu'un cas particulier; de même la sphère orientée est une généralisation de la sphère-point, et la comprend comme cas particulier (2). Au point de vue du calcul géométrique, la sphère orientée peut donc être représentée comme le carré d'un élément qui symbolise une semi-sphère, et rentre dans une famille de tenseurs symétriques du second ordre, produits de deux tels éléments.

Semi-sphères et sphères orientées jouent d'autre part un rôle physique important dans la représentation des ondes, et l'on sait que des transformations de contact sont attachées à la géométrie des sphères de Lie. Mais on doit s'attendre aussi, dans ces espaces supérieurs qui contiennent les espaces plus familiers que nous avons parcourus, à des explications géométriques des transformations analytiques effectuées dans ces derniers, des changements de connexion en particulier; c'est ainsi qu'il existe, dans la géométrie des sphères orientées, des variétés à deux dimensions pour lesquelles la connexion induite peut être en même temps une connexion *normale* de M. Cartan. On peut donc espérer que les méthodes précédemment exposées trouveront de nouvelles applications, et aussi une adaptation, dans des recherches intéressantes.

(1) Cette étude est commencée dans des Mémoires récents de W. Blaschke, G. Thomsen, T. Takasu.

(2) En dehors des études avec coordonnées, cf. E. MULLER, *Die Geometrie orientierter Kugeln nach Grassmannschen Methoden*, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, IX

NOTE.

Les changements de connexion euclidienne des surfaces.

Nous n'avons, au Chapitre II, étudié les surfaces qu'avec la connexion induite douée, comme on sait, du parallélisme de M. Levi-Civita. Mais M. Cartan a montré qu'un ds^2 donné était susceptible d'autres connexions euclidiennes, avec des transports *par équipollence* différents.

Partons d'une décomposition du ds^2 d'une surface correspondant à un double faisceau de lignes coordonnées orthogonales

$$(d\mathbf{m})^2 = ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$

et employons des lettres surlignées pour une connexion euclidienne du ds^2 autre que la connexion induite (nous n'utiliserons ici que des vecteurs et déplacements superficiels et omettrons l'indice s précédemment utilisé). On pourra prendre

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2, \quad \bar{d}\mathbf{m} = d\mathbf{m},$$

et il n'y aura changement que pour $\bar{\omega}_{12}$; avec

$$(411) \quad \bar{\omega}_{12} = \bar{\mathbf{f}} \times d\mathbf{m}, \quad \mathbf{g} = \mathcal{J}\bar{\mathbf{f}},$$

toute nouvelle connexion correspond à un champ de vecteurs $\bar{\mathbf{f}}$ (ou $\bar{\mathbf{g}}$) arbitrairement donné sur la surface. Au lieu de

$$\omega'_1 - [\omega_{12}\omega_2] = 0, \quad \omega'_2 - [\omega_{21}\omega_1] = 0, \quad \omega'_{12} = \Omega_{12},$$

on a maintenant

$$\bar{\omega}'_1 - [\bar{\omega}_{12}\bar{\omega}_2] = \bar{\Omega}_1, \quad \bar{\omega}'_2 - [\bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_1] = \bar{\Omega}_2, \quad \bar{\omega}'_{12} = \bar{\Omega}_{12}.$$

En tenant compte de

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1, \quad \omega_2 = \bar{\omega}_2, \quad \omega'_1 = \bar{\omega}'_1, \quad \omega'_2 = \bar{\omega}'_2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= [(\omega_{12} - \bar{\omega}_{12})\omega_2], & \bar{\Omega}_2 &= [(\omega_{21} - \bar{\omega}_{21})\omega_1], & \Omega_{12} &= \Omega_{12} + \bar{\omega}'_{12} - \omega'_{12}, \\ \omega_{12} - \bar{\omega}_{12} &= \frac{\bar{\Omega}_1\omega_1 + \bar{\Omega}_2\omega_2}{[\omega_1\omega_2]}, & \bar{\Omega}_{12} &= \Omega_{12} - \left(\frac{\bar{\Omega}_1\omega_1 + \bar{\Omega}_2\omega_2}{[\omega_1\omega_2]} \right)'. \end{aligned}$$

En introduisant le nouveau champ de vecteurs \mathbf{d} (ou \mathbf{e}), tel que

$$(412) \quad \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{e} = \mathcal{I}\mathbf{d}.$$

on voit que les formules obtenues pour la nouvelle connexion correspondent à

$$(413) \quad \begin{cases} (\overline{d\mathbf{m}})'_{\mathbf{a}} = \bar{\Omega}_1 \mathbf{a}_1 + \bar{\Omega}_2 \mathbf{a}_2 = [\omega_1 \omega_2] \mathbf{d} = \Delta S \cdot \mathbf{d}, \\ \bar{\Omega}_{12} = -\bar{\mathbf{K}}[\omega_1 \omega_2], \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \text{rot } \mathbf{d}. \end{cases}$$

A partir de la connexion induite, le champ \mathbf{d} définit complètement la nouvelle connexion et le nouveau tenseur de courbure, qui comprend en général une courbure de translation, ou torsion, et une courbure de rotation. On peut appeler *vecteur de torsion*

$$\mathbf{d} = \frac{(\overline{d\mathbf{m}})'}{\Delta S},$$

et l'on distinguera les cas particuliers suivants :

(a) \mathbf{d} est un gradient; le changement de connexion a introduit une torsion sans changer la courbure de rotation; si l'on pose

$$\mathbf{d} = \nabla \bar{\varphi}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \nabla \bar{\varphi}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}.$$

le champ $\bar{\mathbf{f}}$ est le champ de fronts correspondant à une décomposition du ds^2 déduite de la première par une rotation d'un angle $\bar{\varphi}$ du repère initial.

$$(b) \quad \mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{o}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{o}.$$

le champ \mathbf{d} est le champ de fronts correspondant aux faisceaux coordonnés considérés et au réseau angulaire attaché. On retrouve d'autre part la connexion sans courbure (de rotation), où le parallélisme est une notion absolue, indiquée par M. Cartan (1).

Il est important de remarquer que les connexions arbitraires que nous venons de considérer sont, même la dernière, *attachées à un réseau angulaire* et n'auront d'intérêt que si ce réseau a un rôle géométrique (ou physique) particulier. On pourra, dans chaque connexion, définir des faisceaux de directrices ou de lignes de front par les équations

$$\bar{\mathbf{f}} \times d\mathbf{m} = \bar{\omega}_{12} = \mathbf{o}, \quad \bar{\omega}_{12} = \mathbf{o},$$

des géodésiques par l'équation

$$[d\mathbf{m}, \bar{d}^2 \mathbf{m}] = \mathbf{o} \quad \text{ou} \quad \bar{\omega}_{12} + d\varphi = \mathbf{o}.$$

Les directrices sont naturellement indéterminées pour la connexion (b), et pour

(1) On pourra consulter sur ce sujet différents Mémoires de M. E. Cartan, avec un exemple tiré de la géométrie de la sphère; en particulier *Les récentes généralisations de la notion d'espace* (Bull. des Sc. math., t. XLVIII, 1924).

cette connexion, l'équation des géodésiques se réduit à

$$d\varphi = 0 \quad (\varphi = \text{const}),$$

donc les géodésiques sont les lignes du réseau angulaire considéré; dans le cas général, des géodésiques d'une nouvelle connexion ne pourront être géodésiques de la connexion induite que si l'on a simultanément le long de ces courbes

$$\bar{\omega}_{10} + d\bar{\varphi} = 0, \quad \omega_{10} + d\varphi = 0;$$

donc

$$\omega_{12} - \bar{\omega}_{12} - \mathbf{d} \times d\mathbf{m} = 0.$$

Ces géodésiques seraient donc trajectoires orthogonales des lignes du champ \mathbf{d} . On retombe d'autre part, dans les cas (a) ou (b), sur des problèmes d'incidence de réseaux, ou de réseaux à géodésiques, étudiés au Chapitre II; ainsi en considérant la connexion

$$(c) \quad \mathbf{d} = -\nabla\bar{\varphi}, \quad [d\mathbf{f}] - [f\bar{f}] = 0.$$

on est ramené à des problèmes de réseaux directement associés, etc. Enfin, un changement de connexion euclidienne ne conserve jamais le réseau (non angulaire) des géodésiques de la connexion induite.

Les considérations précédentes montrent l'importance de la théorie des réseaux angulaires que nous avons développée, et font voir aussi que, sous une forme ou l'autre, les mêmes éléments géométriques (comitants, invariants) reparaissent naturellement dans les problèmes que pose la théorie euclidienne des surfaces (la dernière formule (413) ramène ainsi l'invariant K du ds^2). Elles montrent aussi que la connexion induite, avec parallélisme de Levi Civita, en dehors de son rôle privilégié par sa détermination *unique*, permet de traiter facilement les problèmes que font intervenir d'autres connexions (1).

D'une manière générale, si l'on veut rendre nulle la nouvelle courbure \bar{K} , il suffit de faire la connexion

$$(d) \quad \mathbf{d} = \mathbf{f} + \nabla\bar{\varphi}.$$

ce qui ramène au cas (b). Un autre cas intéressant correspond à la connexion

$$(e) \quad \mathbf{d} = -\mathcal{J} \nabla \log L, \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_0 = \mathbf{f} + \mathcal{J} \nabla \log L, \\ \bar{K} = K - \Delta \log L = L^2 Q.$$

(1) Les mêmes remarques s'appliquent en géométrie conforme, pour les changements de particularisation comme pour ceux de connexion; en effectuant par exemple sur une surface la particularisation de contact, où ω_{30} disparaît, on voit reparaître ω_{00} pour représenter la sphère \mathbf{B} précédemment attachée à ω_{30} . Il semble donc qu'en général la connexion induite, avec particularisation canonique, sera suffisante pour l'étude des problèmes de la géométrie conforme des surfaces.

qu'on peut considérer comme intermédiaire entre les connexions induites euclidienne et conforme d'une surface, et qui, pour les surfaces $Q = 0$ déjà signalées, rentre dans le cas (d); ainsi, pour le tore, le vecteur de torsion \mathbf{d} est alors porté par les parallèles de la surface.

Vu et approuvé :

Paris, le 6 avril 1927.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 6 avril 1927.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. LAPIE.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	1
BIBLIOGRAPHIE.....	7
CHAPITRE I. — <i>Notions de calcul geometrique.</i>	
I (§§ 1-2). Les éléments de l'espace projectif E_{n+1} ; les groupes fondamentaux G_p et G_{np}	8
II (§§ 3-4). Quelques opérations de l'algèbre tensorielle.....	10
III (§ 5). Les transformations linéaires.....	14
IV (§§ 6-8). L'espace métrique et la polarité fondamentale.....	17
V (§ 9). L'espace affín et la métrique vectorielle; l'espace euclidien.....	20
VI (§§ 10-14). Differentiation et dérivation des formes géométriques.....	22
VII (§§ 15-18). La géométrie vectorielle du plan euclidien.....	29
CHAPITRE II. — <i>Géométrie différentielle euclidienne des courbes et surfaces.</i>	
I (§§ 19-24). Le déplacement général du repère mobile.....	38
II (§ 25). Formules relatives au déplacement à un paramètre.....	46
III (§§ 26-33). Déplacement à deux paramètres. Connexion induite d'une surface..	48
IV (§ 34). Contact, applicabilité et isomorphisme des surfaces.....	63
V (§§ 35-42). Les courbes tracées sur les surfaces. Exposé de quelques problèmes..	65
VI (§§ 43-58). Déplacement parallèle et réseaux angulaires.....	77
CHAPITRE III. — <i>Géométrie différentielle conforme des courbes et surfaces.</i>	
I (§§ 59-61). L'espace conforme et le déplacement du repère mobile.....	106
II (§§ 62-65). Déplacement à un paramètre. Courbes de l'espace conforme.....	114
III (§§ 66-70). Déplacement à deux paramètres. Les surfaces conformes et leur connexion induite..	122
IV (§§ 71-77). Noyaux dérivés en géométrie conforme canonique. Éléments géométriques et courbes remarquables.....	134
V (§§ 78-86). Courbes tracées sur les surfaces. Réseaux angulaires et complexes harmoniques... ..	150
VI (§§ 87-90). Contact et applicabilité des surfaces conformes. Tenseurs de courbure.	172
NOTE. — <i>Les changements de connexion euclidienne des surfaces.....</i>	179

