JEAN-LOUP MAUCLAIRE

Sur la théorie de Novoselov

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 14, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A9_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
3e année, 1985/86, n° 14, 10 p.

3 mars 1986

SUR LA THÉORIE DE NOVOSELOV

par Jean-Loup MAUCLAIRE (*)

L'objet de ce bref exposé est de présenter les concepts de base de la théorie due à E. V. NOVOSELOV, et ce qui lui est propre, en exposant de la façon la plus simple possible, avec quelques commentaires, et certains résultats typiques obtenus dans les années 1960-1965, par cet auteur.

1. Les entiers polyadiques.

L'idée de départ de l'auteur est de définir sur $\mathbb{Z}$ une topologie en posant que les idéaux principaux de $\mathbb{Z}$ forment une base de voisinages de 0. On note S cet anneau topologique, qui est métrisable, précompact, non complet. On le complète, et $\mathfrak{S}$, l'anneau obtenu, est compact, métrisable, ordonné, etc., et S est dense dans $\mathfrak{S}$. En fait, on peut voir cela de la façon suivante, $(m!)\,\mathbb{Z}$, $1 \leqslant m < +\infty$, est une suite décroissante de voisinages de 0 dans $\mathbb{Z}$, et par conséquent, $\mathbb{Z}/m!\,\mathbb{Z}$ est un système projectif d'anneaux finis dont la limite projective G existe, est compacte, et comme S est dense dedans, on a $G = \mathfrak{S}$.

On écrit alors que, si v_p est la valuation p-adique, p décrivant l'ensemble des nombres premiers

$$\mathbb{Z}/m!\,\mathbb{Z} \simeq \prod_{p|m!} \mathbb{Z}/p^{v_p(m!)}\,\mathbb{Z} ,$$

et, par "passage à la limite",

$$\mathfrak{S} = G \simeq \prod_p \lim_{m\to+\infty} \text{proj}\ \mathbb{Z}/p^{v_p(m!)}\,\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p ,$$

où $\mathbb{Z}_p$ est complété p-adique de $\mathbb{Z}$.

Les caractères sur G sont identifiés à

$$\bigcup_m \{\frac{h}{m!} ,\quad 0 \leqslant h < m!\} = \mathbb{Q} \cap [0 , 1[.$$

L'isomorphisme $G \simeq \prod_p \mathbb{Z}_p$ permet d'effectuer sans difficulté l'étude algébrique de l'anneau $\mathfrak{S}$, dont l'un des charmes est l'existence de diviseurs de 0, ce qui amène à rappeler que la construction de $\mathbb{Z}_p$ a été effectuée essentiellement pour éliminer les éléments de torsion qui peuvent se présenter lorsque l'on reste sur $\mathbb{Z}/p^k\,\mathbb{Z}$, $k \geqslant 2$.

(*) Jean-Loup MAUCLAIRE, 11 rue des Eglantines, 91130 RIS ORANGIS.

Par construction, tout élément x de $\mathfrak{S}$ s'écrit,

$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(x)\ m!\ ,\quad 0 \leqslant a_m(x) < m\ ,$$

de façon unique. On peut donc envoyer l'espace topologique $\mathfrak{S}$ dans $[0\ ,\ 1[$ par $x \longmapsto \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(x)/(m+1)!$, ce qui permet de métriser, ordonner, etc.

2. Mesure sur G et ensembles bi-mesurables.

Sur G , il y a une seule mesure invariante par translation et normalisée, qui s'identifie à $dm = \bigotimes_p dm_p$, dm_p étant les mesures de Haar sur $\underset{\sim}{Z}_p$, normalisées. En effet, si $N \in \underset{\sim}{N}^*$, alors,

$$N\mathfrak{S} \simeq \prod_{p^\alpha \| N} (p^\alpha\ \underset{\sim}{Z}_p)\ .$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}(0 + N\mathfrak{S}) &= \operatorname{mes}(N\mathfrak{S}) \\ + \operatorname{mes}(1 + N\mathfrak{S}) &= \operatorname{mes}(N\mathfrak{S}) \quad \text{(par invariance)} \\ \vdots\qquad &\qquad \vdots \\ \underline{+ \operatorname{mes}(N - 1 + N\mathfrak{S})} &= \underline{\operatorname{mes}(N\mathfrak{S})} \quad \text{(par invariance)} \end{aligned}$$

d'où,
$$\operatorname{mes}(\mathfrak{S}) = N \operatorname{mes}(N\mathfrak{S})$$

i. e.,
$$\operatorname{mes}(N\mathfrak{S}) = \frac{1}{N} \operatorname{mes}(\mathfrak{S})\ .$$

Mais on a,

$$\int_{\prod_{p^\alpha \| N} p^\alpha \underset{\sim}{Z}_p} 1 \bigotimes_p dm_p = \prod_{p^\alpha \| N} \int_{p^\alpha \underset{\sim}{Z}_p} dm_p = \prod_{p^\alpha \| N} \frac{1}{p^\alpha} = \frac{1}{N}\ .$$

Par conséquent, les mesures coïncident, et l'on ne distinguera plus $\mathfrak{S}$ mesuré, de $\prod_p \underset{\sim}{Z}_p$ mesuré par $dm = \bigotimes_p dm_p$; du moins, nous ferons ainsi, car NOVOSELOV ne recourt pas aux faits que nous mentionnons. Voici sa procédure.

Si μ^* est la mesure extérieure associée à dm , on dit que $A \subset \mathfrak{S}$ est mesurable si, $\forall\ B \subset \mathfrak{S}$, on a

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*((\mathfrak{S} \setminus A) \cap B)\ .$$

Ceci l'amène à définir une mesure $\bar{\mu}$ sur R^* , la famille des ensembles mesurables, posant $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$. $\bar{\mu}$ est complété sur R^* , régulière ; bref, c'est une belle mesure. En particulier, tout ensemble $\bar{\mu}$-mesurable A vérifie $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, où μ_* est la mesure intérieure. En effet, si A est $\bar{\mu}$-mesurable, alors, $\forall\ B \subset \mathfrak{S}$, on a

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*((\mathfrak{S} \setminus A) \cap B)\ .$$

On prend $B = \mathfrak{S}$. On a,

$$\mu^*(\mathfrak{S}) = \mu^*(A) + \mu^*(\mathfrak{S} \setminus A) .$$

Or, $\mu^*(\mathfrak{S}) = 1$. Par conséquent,

$$1 = \mu^*(A) + \mu^*(\mathfrak{S} \setminus A) .$$

On a donc,

$$\text{(T)} \qquad 1 = \inf_{\substack{A \subset \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \text{ ouvert}}} m(\mathcal{O}) + \inf_{\substack{\mathfrak{S} \setminus A \subset \Omega \\ \Omega \text{ ouvert}}} m(\Omega) .$$

Soit $\varepsilon > 0$; on va montrer qu'il existe K et $\mathcal{O}$, $K \subset A \subset \mathcal{O}$, tel que K est compact, $\mathcal{O}$ est ouvert, $m(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$. En effet, $\mathfrak{S} \setminus A \subset \Omega$ équivaut à $\mathfrak{S} \setminus \Omega \subset A$. Or, on a,

$$m(\mathfrak{S} \setminus \Omega) = 1 - m(\Omega) ,$$

et la relation (T) nous donne immédiatement que l'on peut trouver Ω , $\mathcal{O}$ tels que, $m(\mathcal{O} \setminus (\mathfrak{S} \setminus \Omega)) < \varepsilon$, comme $\mathfrak{S} \setminus \Omega$ est fermé car Ω est ouvert, $\mathfrak{S} \setminus \Omega$ est compact.

Ceci nous montre immédiatement que A est mesurable pour la mesure de Radon ν définie sur la tribu complétée, pour dm , de la tribu borélienne, et même que A est un élément de cette tribu. En effet, A vérifie le critère de Lusin, $\forall \varepsilon > 0$, il existe K compact, $\mathcal{O}$ ouvert tel que $K \subset A \subset \mathcal{O}$ et $\nu(\mathcal{O} - K) < \varepsilon$. La restriction de $\bar{\mu}$ à la tribu borélienne est bien dm , et l'on en reste à notre façon de voir : la mesure utilisée sera toujours notée dm . On passe à la notion d'ensemble bi-mesurable.

<u>Définition</u>. - Soit M contenu dans $\underset{\sim}{N}$, $\bar{M}$ son adhérence dans G . M est bi-mesurable si $m(\bar{M}) = 1 - m(\overline{\underset{\sim}{N} - M})$.

Comme cette notion a des applications, on va l'éclaircir.

THÉORÈME 1. - M <u>est bi-mesurable si, et seulement si, la fonction caractéristique de</u> $\bar{M}$ <u>est presque-partout égale à une fonction continue</u>.

<u>Preuve</u>. - On pose $M' = \underset{\sim}{N} - M$. On a,

$$\underset{\sim}{N} \subset M \cup (\underset{\sim}{N} - M) \subset \bar{M} \cup \bar{M}' .$$

Par conséquent,

$$G = \bar{\underset{\sim}{N}} \subset \bar{M} \cup \bar{M}' \subset G .$$

Donc,

$$\bar{M} \cup \bar{M}' = G .$$

Par conséquent,

$$m(\bar{M}) + m(\bar{M}') - m(\bar{M} \cap \bar{M}') = 1 .$$

Mais, par bi-mesurabilité, $m(\overline{M}) + m(\overline{M}') = 1$. D'où

$$m(\overline{M} \cap \overline{M}') = 0 .$$

On pose $I_{\overline{M}} = I_1$, $I_{\overline{M}'} = I_2$, fonctions caractéristiques à valeurs 0 et 1 . On a

$$I_1 + I_2 = 1 \text{ dm-p.p.}$$

$$I_1 + (1 - I_1) = 1 .$$

Par conséquent,

$$1 - I_1 = I_2 \text{ dm-p.p.}$$

Or

$$\begin{cases} 1 - I_1 & \text{est semi-continue inférieurement,} \\ I_2 & \text{est semi-continue supérieurement.} \end{cases}$$

Par conséquent, aux points d'égalité, $1 - I_1$ et I_2 sont continues.

De ceci, on déduit que,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N, n \in M} 1 = m(\overline{M}) .$$

En effet, si J est la fonction caractéristique de M , on a

$$\begin{cases} I_1 \geqslant J. & \text{car } M \subset \overline{M} \\ I_2 \geqslant 1 - J & \text{car } \underset{\sim}{N} - M \subset \overline{\underset{\sim}{N} - M} . \end{cases}$$

D'où l'on déduit

$$I_{\overline{M}} \geqslant J \geqslant 1 - I_{\overline{G-M}} .$$

Un résultat classique d'uniforme distribution nous donne que

$$m(\overline{M}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} I_{\overline{M}}(n) \geqslant \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} J(n)$$

$$m(\overline{M}) = m(1 - I_{\overline{G-M}}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} (1 - I_{\overline{G-M}})(n) \leqslant \liminf_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} J(n) .$$

D'où

$$m(\overline{M}) \leqslant \liminf_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} J(n) \leqslant \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} J(n) \leqslant m(\overline{M}) ,$$

ce qui achève la démonstration.

Nota Bene. - NOVOSELOV démontre que cette densité existe, mais fait intervenir des concepts qui sont liés à la structure particulière de $\mathfrak{G}$, alors qu'en fait, c'est une application directe d'un résultat d'uniforme distribution et d'intégration au sens de Riemann.

3. La méthode probabiliste d'étude des fonctions arithmétiques.

Plutôt que de décrire tout, j'extrais un résultat qui est représentatif, en le détaillant bien. Soit $r \geqslant 1$.

On rappelle qu'une suite $f(n)$ est B^r-limite-périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon(n)$ périodique telle que

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\in x} |f(n) - f_\varepsilon(n)|^r \leqslant \varepsilon .$$

On va se restreindre au cas $r = 1$, ce qui ne change rien aux idées (quoique dans [A], il y ait des choses curieuses concernant les inégalités en norme r ; pour $0 < r < 1$, la démonstration de la proposition 8, p. 222, doit comporter une faute de traduction car l'inégalité triangulaire est "à l'envers" pour $0 < r < 1$.)

Soit n_k une suite d'entiers de $\underset{\sim}{N}^*$ tendant vers 0 dans G, ce que l'on note $n_k \Longrightarrow 0$. On pose

$$R_k(x) = \min\{m \in \underset{\sim}{N} \; ; \; (m - x) \in n_k \times G\} .$$

THÉORÈME DE NOVOSELOV. - f est B^1-limite-périodique (B^1-l.p.) si, et seulement si, $f(R_k(n))$ est convergente vers f dans B^1-l.p. l'espace des suites limite-périodiques B^1 muni de la semi-norme habituelle.

Plutôt que de suivre la méthode de NOVOSELOV, j'en présente une qui permet de montrer le lien entre fonctions intégrables, suites B-l.p., etc., l'idée est essentiellement la suivante.

Soit N_k une suite telle que

$$N_k \in \underset{\sim}{N}^* , \quad N_k | N_{k+1} , \quad \lim_{k\to+\infty} v_p(N_k) = +\infty \text{ pour tout } p .$$

Supposons que $f(n) \in B^1$. Alors, en dénotant par M la moyenne arithmétique, on voit que

$$f_k(n) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{m\leqslant N} f(n + N_k m)$$

existe, et vérifie

$$\lim_{k\to+\infty} M(|f - f_k|) = 0 ;$$

en outre, f_k est N_k-périodique.

En effet, si g_ε est périodique telle que $M(|f - g_\varepsilon|) < \varepsilon$, on a, dès que la période de g_ε divise N_k, $M(|f_k - g_\varepsilon|) \leqslant \varepsilon$, comme le montre un calcul direct, d'où $M(|f_k - f|) \leqslant 2\varepsilon$.

On définit une fonction $g(n)$ par $g(n) = f_k(n)$ si $N_k < n \leqslant N_{k+1}$. Alors, $g(n) \sim f(n)$ dans B^1. En effet soit f_r fixé ; pour N donné, on pose

$$k(N) = \max\{k \; ; \; N_{k+1} \leqslant N\} .$$

Alors, on voit que

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|g(n) - f_r(n)|$$

(1) $$= \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N_{r+1}}|g(n) - f_r(n)|$$

(2) $$+ \frac{1}{N}\sum_{r+1<k\leqslant k(N)}\ \sum_{N_k<n\leqslant N_{k+1}}|g(n) - f_r(n)|$$

(3) $$+ \frac{1}{N}\sum_{N_{k(N)+1}}^{N}|g(n) - f_r(n)| \ .$$

Il est clair que (1) est $N \longrightarrow + \infty$. (2) s'écrit

$$\frac{1}{N}\sum_{r+1<k\leqslant k(N)}\ \sum_{N_k<n\leqslant N_{k+1}}|f_k(n) - f_r(n)|$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{r+1}^{k(N)}\frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}\times\sum_{n=0}^{N_k-1}|f_k(n) - f_r(n)|$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{r+1}^{k(N)}(N_{k+1} - N_k)\times M(|f_k - f_r|) \ .$$

Comme $\lim_{k\to+\infty} M(|f_k - f_r|) = M(|f - f_r|)$, on en déduit que la limite de (2) quand $N \longrightarrow + \infty$ est majorée par $M(|f - f_r|)$.

En ce qui concerne (3), on a

$$\frac{1}{N}\sum_{N_{k(N)+1}}|g(n) - f_r(n)|$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{N_{k(N)+1}}^{N}|f_{k(N)}(n) - f_r(n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\times\left[\frac{N}{N_{k(N)}}\right]\times\sum_{n=0}^{N_{k(N)}-1}|f_{k(N)}(n) - f_r(n)|$$

$\leqslant M(|f_{k(N)} - f_r|)$, dont la limite, $N \longrightarrow + \infty$, est $M(|f - f_r|)$.

D'où l'on déduit

$$M(|g - f_r(n)|) \leqslant 2M(|f - f_r|) \ ,$$

ce qui nous dit que $g \sim f$ dans B^1-l.p. .

On remarque que la suite f_k , $k \in \underset{\sim}{N}$, détermine g ; la construction précédente est claire à ce sujet. En fait, c'est le point important. Signalons que, comme f_k est une suite de fonctions périodiques, elle définit une suite de fonctions continues sur G et l'uniforme distribution de $\underset{\sim}{N}$ donne que

$$\int_G |f_k - f_\ell| \, dm = M(|f_k - f_\ell|) ,$$

et par conséquent, il existe une sous-suite de f_k qui converge dans $\mathcal{L}^1$ et dm-presque-partout vers une fonction F intégrable. Réciproquement, si F est intégrable, alors

$$f_k(t) = \int_G F(t + N_k u) \, du$$

est une suite de fonctions continues, de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$, et à partir de cette suite, on va pouvoir refaire la construction de g précédente. En fait, c'est la structure projective de groupe profini de G qui est derrière tout cela, et dans ce cas, on peut éviter le recours à la dualité. Mais il faut bien voir que l'on a une bijection entre B^1-l.p. et $\mathcal{L}^1(G , dm)$, aux éléments de moyenne nulle près, et que, si $F \in \mathcal{L}^1$ et $f \in B^1$ sont associées, alors : $\int_G F \, dm = M(f)$; de là, le passage "théorie de la mesure sur G " $\longleftrightarrow$ "distribution de valeurs de fonctions de B^1-l.p. " est immédiat, et ce n'est qu'un cas particulier qui est présenté ici : la théorie des fonctions presque-périodiques relève de l'analyse harmonique sur les groupes compacts d'une façon générale.

Venons-en au résultat de NOVOSELOV. On conserve nos f_r , et l'on connait f . Soit n_k une suite telle que $n_k \Longrightarrow 0$. On va montrer qu'il existe un indice k tel que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n) - f(R_k(n))| < \varepsilon ,$$

où $\varepsilon > 0$ est donné.

Prenons notre ε , et sortons un r tel que $M(|f - f_r|) \leqslant \varepsilon/3$. Sélectionnons k de façon à ce que $N_r | n_k$, et que $1/n_k \sum_{n \leqslant n_k} |f(n) - f_r(n)| \leqslant 2\varepsilon/3$ (ce qui est <u>possible</u>, car $n_k \Longrightarrow 0$ et $n_k \longrightarrow +\infty$ $(k \longrightarrow +\infty)$). Alors, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n) - f(R_k(n))|$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |(f(n) - f_r(n)) + (f_r(n) - f(R_k(n)))|$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n) - f_r(n)| + \frac{1}{N} \times \sum_{n \leqslant (E(N/n_k)+1)n_k} |f(R_k(n)) - f_r(n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n) - f_r(n)| + \frac{1}{N} \times (E(N/n_k) + 1) \times \sum_{n \leqslant n_k} |f(n) - f_r(n)| \ldots$$

D'où,

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} |f(n) - f(R_k(n))| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

En remarquant que $f(R_k(n))$ est périodique, et est donc la restriction à $\underset{\sim}{N}$ d'une fonction continue sur $\mathfrak{S}$, que la suite $f(R_k)$ vérifie le critère de Cauchy pour la norme $\mathfrak{L}^1$, on voit que l'on peut extraire de $\{f(R_k(n))\}_k$ une sous-suite $f(R_{k'})$ qui converge dm-presque-partout, et dans $\mathfrak{L}^1$, vers une fonction $F(x)$ de $\mathfrak{L}^1$. Bien évidemment, comme $\lim_{k'\to+\infty} M(|f - f(R_{k'})|) = 0$, on a

$$M(f) = \lim_{k\to+\infty} M(f(R_{k'})) = \lim_{k\to+\infty} \int f(R_{k'})\, dm = \int F\, dm .$$

La méthode utilisée précédemment pour montrer que $M(|f - f(R_k)|) \longrightarrow 0$, $k \to +\infty$, écrite avec des intégrales au lieu de moyennes arithmétiques, donne que

$$\left(\int |F(R_k(x)) - F(x)|\, dm(x)\right) \longrightarrow 0 , \quad k \longrightarrow +\infty .$$

L'argument sur lequel repose la "méthode probabiliste" de NOVOSELOV vient maintenant.

THÉORÈME. - n_k <u>étant telle que</u> $n_k \Longrightarrow 0$, $n_{k+1}/n_k \longrightarrow 1$ $(k \longrightarrow +\infty)$, <u>soit</u> $F(x)$ <u>une application</u> $G \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ <u>telle que</u>,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_G |F(x) - F(R_k(x))|\, dm(x) = 0 .$$

<u>Alors</u>, $\overline{M}(|F(n) - F(R_k(n))|)$ <u>existe et tend vers</u> 0 <u>quand</u> k <u>tend vers</u> $+\infty$.

<u>Preuve</u>. - Soit $N > 0$; on définit n_ℓ par $n_\ell \leqslant N < n_{\ell+1}$; on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} |F(n) - F(R_k(n))|$$

$$\leqslant \frac{1}{n_\ell} \times \sum_{n\leqslant n_{\ell+1}} |F(n) - F(R_k(n))|$$

$$\leqslant \frac{n_{\ell+1}}{n_\ell} \times \left(\frac{1}{n_{\ell+1}} \sum_{n\leqslant n_{\ell+1}} |F(n) - F(R_k(n))|\right)$$

$$\leqslant \frac{n_{\ell+1}}{n_\ell} \times \left(\frac{1}{n_{\ell+1}} \sum_{n\leqslant n_{\ell+1}} |F(R_{\ell+1}(n)) - F(R_k(n))|\right)$$

$$\leqslant \frac{n_{\ell+1}}{n_\ell} \times \int_G |F(R_{\ell+1}(x)) - F(R_k(x))|\, dm(x)$$

$$\leqslant \left(\int_G |F - F(R_k)|\, dm\right)(1 + o(1)) , \quad N \longrightarrow +\infty ,$$

d'où le résultat annoncé.

Nota-Bene. - Comme suite n_k , on peut prendre $n_k = (k - s(n) + n + 2)\, n!$, où $s(n) \leq k < n + 2$, et $s(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Le théorème permet de transcrire certaines propriétés de F considérée comme une fonction de $\mathfrak{L}^1$ en termes de propriétés de F considérée comme suite B-l.p. , grâce à l'intermédiaire des $F(R_k(.))$ qui sont continues sur G car périodiques sur $\underset{\sim}{N}$. Bien entendu, ces résultats sont indépendants de n_k . On est cependant loin de la théorie des suites limite-périodiques : en effet, on doit connaître F sur $\underset{\sim}{N}$, et à aucun moment NOVOSELOV ne paraît tenir compte de ce que B-l.p. étant complet, on a une bijection entre $L^1(G\ ,\ dm)$ et $\underset{\sim}{B}^1$-l.p. , où $L^1(G\ ,\ dm) = \mathfrak{L}^1(G\ ,\ dm)/\mathfrak{L}^0$, où $\mathfrak{L}^0 = \{f(x)\ ;\ f \text{ négligeable}\}$, et $\underset{\sim}{B}^1$-l.p. ; B^1-l.p.$/M_0$, où $M_0 = \{g(n)\ ;\ M(|g|) = 0\}$, ce qui donnerait une possibilité d'éviter de devoir connaître F sur $\underset{\sim}{N}$. Il tourne la difficulté en remarquant que, si $f \in B^1$, alors, il existe une suite f_k de fonctions périodiques telles que $M(|f_k - f|) \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow +\infty$. Mais (f_k) est de Cauchy dans B^1 , donc dans $\mathfrak{L}^1$, et par conséquent, on peut en extraire une sous-suite f'_k telle que f'_k tende dm-presque-partout et dans $\mathfrak{L}^1$ vers une fonction F . En posant $F(n) = f(n)$, on ne change rien. Par conséquent, à f on a associé F , et c'est terminé ... sauf que la méthode ne permet en aucun cas de compléter une suite de Cauchy, dans B^1-l.p. , de fonctions périodiques, et c'est là, la différence avec la théorie des suites limite-périodiques.

En fait, il ressort de tout cela, que "$f(R_k(n))$ approche f dans B^1-l.p." est ici le résultat théorique essentiel, ce qui se ramène à avoir trouvé une autre approximation de f dans B^1-l.p. que celles envisagées usuellement, ceci afin de pouvoir définir le F associé dans $\mathfrak{L}^1$. Bien évidemment, les suites presque-périodiques générales vont échapper à la méthode d'étude, et NOVOSELOV le dit lui-même ([A], p. 226, les trois dernières lignes.)

L'article de NOVOSELOV [A] présente un certain nombre d'exemples d'application de ce type de théorème, et on renvoie le lecteur au texte même (en lui conseillant la prudence, vu le nombre de fautes de traduction des signes mathématiques) pour renseignements complémentaires sur les possibilités de cette méthode.

Nota Bene 1. - Signalons que les arguments théoriques utilisés sont en général puisés à des sources qu'il semble préférable de rappeler.

- Les propriétés topologiques et algébriques des "entiers poly-adiques" sont connus depuis 1935 au moins, et il ne semble pas qu'il y ait eu une avance nouvelle ici. On renvoie à un article de D. VAN DANTZIG [3] où les "poly-adiques" de l'un sont les " ν!-adiques" de l'autre.

- La théorie de la mesure sur $\mathfrak{G}$ n'est pas nouvelle, et on renvoie à la thèse de TATE [4], en 1950, sur ce sujet, qui est l'aboutissement de tout un courant de pensée.

- La "bimesurabilité" est tout simplement la "mesurabilité" de BUCK [1] (et le théorème donné ici est du type de celui donné dans [2]), de 1946.

- Sans vouloir remonter aux travaux de BOCHNER, JESSEN, WINTNER, signalons que l'idée d'établir une correspondance entre propriétés d'une fonction f-presque-**périodique** sur $\underset{\sim}{R}$ au sens de BESICOVITCH et propriétés de la classe de fonctions associées à f sur le compactifié de Bohr de $\underset{\sim}{R}$, figure dans [7], et il semble que le "théorème de correspondance" de FØlner en 1954 (voir [7]) couvre largement le sujet.

- Ajoutons que la complétion de μ en $\bar{\mu}$ est classique depuis LUSIN, et figure dans tout bon traité de théorie de la mesure (voir, par exemple, [5], p. 68-69.)

Nota-Bene 2. - L'auteur de cette analyse s'est efforcé de simplifier l'exposé, ce qui l'a amené à introduire à cet effet des résultats qui lui sont propres, en particulier, le fait que $\bar{\mu} = \nu$, la caractérisation de la bimesurabilité comme intégrabilité au sens de Riemann, la construction qui relie f, f_k, g dans § 3, et l'analyse du résultat de NOVOSELOV, ainsi que celle de la complétion effective de B^1-l.p., pour laquelle il avoue avoir bien lu MARCINKIEVICZ (voir [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[A] NOVOSELOV (E. V.). - A new method in probabilistic number theory, Amer. math. Soc. Translations, Series 2, vol. 52, 1966, p. 217-275. [Consulter la bibliographie qui y figure.]

[1] BUCK (R. Creighton). - The measure theoretic approach to density, Amer. J. of Math., t. 68, 1946, p. 560-580.

[2] MAUCLAIRE (J.-L.). - Suites-limites-périodiques et théorie des nombres. VI, Proc. Japan Acad., Series A, t. 57, 1981, p. 223-225.

[3] VAN DANTZIG (M. D.). - Nombres universels ou $\nu!$-adiques avec une introduction sur l'algèbre topologique, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 53, 1936, p. 275-307. [Voir aussi les références citées dans l'article.]

[4] TATE (J.). - On Fourier analysis in number field and Hecke's zeta functions, Dissertation, Princeton University, 1950.

[5] MALLIAVIN (Paul). - Intégration et probabilités. Analyse de Fourier et analyse spectrale. - Paris, Masson, 1982 (Maîtrise de Mathématiques pures).

[6] MARCINKIEVICZ (Joseph). - Une remarque sur les espaces de Besicovitch, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 208, 1939, p. 157-159.

[7] FØLNER (E.). - On the dual spaces of the Besicovitch almost periodic spaces, Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., t. 29, 1954, n° 1, 27 p. [Voir plus précisément, Correspondance theorem § 6, p. 20.]