GUY ROBIN

Sur l'ordre maximum d'un élément du groupe des permutations

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. nº 6, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A3_0>

2 décembre 1985

SUR L'ORDRE MAXIMUM D'UN ÉLÉMENT DU GROUPE DES PERMUTATIONS

par Guy ROBIN [1] [2]

1. Introduction.

Soit $g(n) = \max_\sigma$ (ordre de σ) le maximum portant sur l'ensemble des permutations de n éléments. L'évaluation asymptotique de $g(n)$ a été réalisée par LANDAU ([LAN], 1909), SHAH ([SHA], 1939), SZALAY ([SZA], 1980). Ce dernier donnait :

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log\log n - 1}{2 \log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6 \log\log n + o(1)}{8 \log^2 n}\right) .$$

Le but de l'exposé est de donner le meilleur développement asymptotique possible de $\log g(n)$ et de $\omega(g(n))$, compte tenu des connaissances actuelles sur le terme reste dans le théorème des nombres premiers ($\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n).

2. Notations.

$$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p$$

$$\psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x} \log p$$

$$\pi_r(x) = \sum_{p\leqslant x} p^r , \quad r \in \mathbb{R} ; \quad \pi(x) = \pi_0(x)$$

$$\Pi_r(x) = \sum_{p^m\leqslant x} \frac{p^{rm}}{m} , \quad r \in \mathbb{R} ; \quad \Pi(x) = \Pi_0(x)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} \text{ prolongée analytiquement}$$

$$\Theta = \sup\{\Re e\ \rho ; \quad \zeta(\rho) = 0\} .$$

On désigne par $R(x)$ une majoration du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers de telle sorte que

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O(R(x)) \quad x \to \infty$$

$$\Pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O(R(x))$$

$$\psi(x) - x = O(R(x) \log x) .$$

On définit $S(x)$ par

si $\Theta = 1$, $S(x) = R(x)$; si $\Theta < 1$, $S(x) = x^\Theta/\log x$.

---

[1] Guy ROBIN, UER Sciences, Département de Mathématiques, Université de Limoges, 123 rue Albert Thomas, 87100 LIMOGES

[2] Travail en collaboration avec J.-L. NICOLAS et J.-P. MASSIAS.

On sait que, si $\Theta = 1/2$, $R(x) = \Omega_{\pm}(S(x) \log\log\log x)$.

3. Résultats.

Nous démontrons les résultats suivants.

THÉORÈME 1. - On a, pour $n \to \infty$,

(i) $\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O(\log n \; S(\sqrt{n \log n}))$,

et, en particulier si $\Theta < 1$,

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O((n \log n)^{\Theta/2}) .$$

Si $\Theta > 1/2$, on a, pour tout $\xi < \Theta$,

(ii) $\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\xi/2})$,

et s'il existe un zéro de partie réelle Θ ,

(iii) $\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\Theta/2})$.

Enfin, si l'hypothèse de Riemann est vraie,

(iv) $\log g(n) < \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}$ pour n assez grand ,

(v) $\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} - \frac{2-\sqrt{2}}{3}(n \log n)^{1/4} + \Omega_{\pm}(n \log n)^{1/4})$.

THÉORÈME 2. - On a, pour $n \to \infty$,

(i) $\omega(g(n)) = \mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}) + O(S\sqrt{n \log n})$,

et, en particulier si $\Theta < 1$,

$$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}) + O((n \log n)^{\Theta/2}/\log n) .$$

Si $1/2 < \Theta < 1$, on a, pour tout $\xi < \Theta$,

(ii) $\omega(g(n)) = \mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}) + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\xi/2})$,

et s'il existe un zéro de partie réelle Θ ,

(iii) $\omega(g(n)) = \mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}) + \Omega_{\pm}((n \log n)^{\Theta/2}/\log n)$.

Enfin, si l'hypothèse de Riemann est vraie,

(iv) $\omega(g(n)) < \mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)})$ pour n assez grand.

COROLLAIRE. - On a, pour $n \to +\infty$, et $k \in \mathbb{N}$,

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n}\,\Big(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i(\log\log n)}{(\log n)^i} + O\Big(\Big(\frac{\log\log n}{\log n}\Big)^{k+1}\Big)\Big)$$

$$\omega(g(n)) = 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}\,\Big(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i(\log\log n)}{(\log n)^i} + O\Big(\Big(\frac{\log\log n}{\log n}\Big)^{k+1}\Big)\Big)$$

où A_i et B_i sont des polynômes de degré i . On a, en particulier,

$$A_1(x) = \frac{x-1}{2}\ ,\quad A_2(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 6x + 9)\ ,\quad A_3(x) = \frac{1}{16}(x^3 - 11x^2 + 39x - 53),$$

$$B_1(x) = -\frac{1}{2}(x-3)\ ,\quad B_2(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 22x + 55)\ ,\quad B_3(x) = -\frac{1}{16}(5x^3 - 61x^2 + 319x - 711)$$

4. "Optimisation" du problème.

Il est facile ([NIC 1]) de montrer que la valeur du programme suivant est $g(n)$

$$P_n : \begin{cases} \operatorname{Max} \prod p_i^{r_i} \\ \sum p_i^{r_i} \leqslant n \\ p_i \ \text{premier} . \end{cases}$$

Considérons le problème dual :

$$Q_N : \begin{cases} \operatorname{Min} \sum p_i^{r_i} \\ \prod p_i^{r_i} \geqslant N \\ p_i \ \text{premier} . \end{cases}$$

En posant $\ell(n) = \sum p_i^{r_i}$ si $n = \sum p_i^{r_i}$, on a

$$Q_n : \begin{cases} \operatorname{Min} \ \ell(n) \\ n \geqslant N . \end{cases}$$

La valeur de ce programme est obtenue pour $n = N_0$: c'est la valeur de Q_{N_0} , problème facile à résoudre compte tenu de l'unicité de la décomposition de N_0 en facteurs premiers.

Considérons encore le problème "relaché" suivant,

$$Q_\rho : \begin{cases} \operatorname{Min} \ \ell(N) - \rho \log N \\ N \ \text{entier} \end{cases}$$

et soit $G = \{N \ ; \ \exists \ \rho > 0$ tel que N soit solution de $Q_\rho\}$.

On a alors ([NIC 2])

1° $G \subset g(\underset{\sim}{N})$.

2° Il y a équivalence entre :

(i) $M \in g(\underset{\sim}{N})$,

(ii) la contrainte de G_M est saturée,

(iii) $\forall M' > M$, alors $\ell(M') > \ell(M)$.

Nous commençons à étudier la fonction ℓ sur les éléments de G (qui jouent le rôle des nombres hautement composés de Ramanujan), puis nous prolongerons son étude à tous les éléments de $g(\underline{N})$. Nous en déduisons alors le comportement de $g(n)$.

Étude des éléments de G . - Soit $\rho > 2/\log 2$ et $x_1 > 4$, défini par $x_1/\log x_1 = \rho$.

Pour $i \geqslant 2$, soit x_i , défini par $(x_i^i - x_i^{i-1})/\log x_i = \rho$.

La suite $(x_n)_{n\in\underline{N}}$ décroit vers 1 et, si l'on pose $M_{x_i} = \prod_{p\leqslant x_i} p$, le nombre $N = N_\rho = \prod_{x_i \geqslant 2} M_{x_i}$ est solution de Q_ρ .

On a alors les propriétés simples suivantes, lorsque $\rho \longrightarrow \infty$:

(i) $x_i = (\frac{x_1}{i})^{1/i}\ (1 + O(1/\log x_1))$,

(ii) $\log N_\rho = \sum_{i\geqslant 1} \theta(x_i) \sim \theta(x_1) \sim x_1$,

(iii) $\ell(N) \sim \sum_{p\leqslant x_1} p \sim \mathrm{Li}(x_1^2) \sim x_1^2/2 \log x_1$.

En posant $N = g(n)$, on retrouve, si $N \in G$, le résultat de Landau $\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}$.

5. Etude de $\mathrm{Li}(\log^2 N) - \ell(N)$ pour $N = N_\rho \in G$.

Nous démontrons successivement les lemmes suivants.

LEMME 1. - Pour $x_1 \longrightarrow \infty$,

$$\mathrm{Li}(\log^2 N) - \ell(N) = \mathrm{Li}(\theta^2(x_1)) - \pi_1(x_1) + \frac{\sqrt{2}}{3}\, x_1^{3/2}/\log x_1 + O(x_1^{3/2}/\log^2 x_1) .$$

LEMME 2.(en utilisant les formules explicites). - Pour $x \longrightarrow \infty$,

$$\mathrm{Li}(\psi^2(x)) - \Pi_1(x) = - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho + 1)}/\log x + O(\frac{x^{\Theta+1}}{\log^2 x}) .$$

LEMME 3. - Pour $x \longrightarrow \infty$,

$$\mathrm{Li}(\psi^2(x) - \Pi_1(x) = \mathrm{Li}(\theta^2(x)) - \pi_1(x) + \frac{2}{3}\, x^{3/2}/\log x + O(x^{3/2}/\log^2 x) .$$

D'où finalement, si $x_1 \longrightarrow \infty$,

$$\mathrm{Li}(\log^2 N) - \ell(N) = - \sum_\rho \frac{x_1^{\rho+1}}{\rho(\rho + 1)}/\log x_1 + \frac{\sqrt{2} - 2}{3}\, \frac{x_1^{3/2}}{\log x_1} + O(x_1^{\Theta+1}/\log^2 x_1) .$$

Ces relations permettent d'obtenir facilement les résultats du théorème 1 sur les

n tels que $g(n) \in G$.

Précisons les théorèmes d'oscillation lorsque $\Theta > 1/2$. Comme

$$\mathrm{Li}(\log^2 N) - \ell(N) = (\mathrm{Li}(\psi^2(x_1)) - \Pi_1(x_1))(1 + \theta(1)) ,$$

il suffit d'étudier,

$$\mathrm{Li}(\psi^2(x)) - \Pi_1(x) = \mathrm{Li}(x^2) - x\,\frac{\psi(x) - x}{\log x} - \Pi_1(x) + O(R^2(x)\log x) .$$

Lorsque $\Theta < 1$, le théorème de Landau, via la transformée de Mellin, est suffisant. Pour $\Theta = 1$, il faut procéder comme dans ([ROB 1]) et étudier la fonction,

$$x \longmapsto \mathrm{Li}(x^2) - \Pi_1(x) - x\,\frac{\psi(x) - x}{\log x} + x^{\xi+1} \quad \xi < 1 .$$

Soit maintenant n quelconque de $\underset{\sim}{N}$, et N le nombre de G immédiatement inférieur à $g(n)$ de paramètre ρ , et soit x_1 tel que $x_1/\log x_1 = \rho$.

On montre alors que

$$\begin{cases} n = \ell(N) + O(x_1) \\ \log g(n) = \log N + O(\log x_1) \end{cases}$$

ce qui permet de démontrer le théorème 1 dans sa généralité.

6. Démonstration du théorème 2.

Si l'hypothèse de Riemann **est vraie,** alors

$$\pi(x) < \mathrm{Li}(\theta(x)) \quad \text{pour } x \text{ assez grand ([ROB]),}$$

d'où l'on déduit que

$$\omega(n) \leqslant \mathrm{Li}(\log n) \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

et par suite ;

$$\omega(g(n)) \leqslant \mathrm{Li}(\log g(n)) \leqslant \mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Si $\Theta > 1/2$, le théorème 2 est facile à établir pour les n tels que $g(n) \in G$; pour n quelconque, on utilisera les deux lemmes suivants.

LEMME 4. - *Soit* $n \geqslant 1$, $N \in G$ *immédiatement inférieur à* $g(n)$, ρ *tel que* N *soit solution de* Q_ρ , *et* x_1 *défini par* $x_1/\log x_1 = \rho$. *Pour* $M \in \underset{\sim}{N}$, *on définit le bénéfice de* M *par rapport à* ρ *par* $\text{bén}_\rho(M) = \ell(M) - \ell(N) - \rho \log M/N$.

Alors,

$$\text{bén}_\rho\, g(n) = O(x_1/\log x_1) .$$

LEMME 5. - *Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme précédent,*

$$\omega(g(n)) = \omega(N) + O(\sqrt{x_1}/\log x_1) .$$

Dans la démonstration, on utilise le théorème d'Hoheisel et l'inégalité de Brun-Titschmarsh.

Les résultats sur l'oscillation utilisent le lemme suivant.

LEMME 6. - <u>Si</u> $A(x) = \Pi(x) - \mathrm{Li}^{-1}(\Pi_1(x)^{1/2})$, <u>alors</u>

$$A(x) = O(S(x)) ,$$

$$A(x) = \Omega_{\pm}(S(x)) \text{ s'il existe un zéro de } \zeta \text{ de partie réelle } \Theta .$$

BIBLIOGRAPHIE

[LAN] LANDAU (Edmund). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bände 1 und 2. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909. [2te Auflage. - New York, Chelsea publishing Company, 1953.]

[NIC 1] NICOLAS (Jean-Louis). - Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "Highly composite numbers", Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.

[NIC 2] NICOLAS (Jean-Louis). - Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe S_n des permutations, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 315-332.

[ROB 1] ROBIN (G.). - Sur la différence $\mathrm{Li}(\theta(x)) - \pi(x)$, Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. 6, 1984, p. 257-268.

[SHA] SHAH (S. M.). - An inequality for the arithmetical function $g(x)$, J. of Indian math. Soc., t. 3, 1939, p. 316-318.

[SZA] SZALAY (M.). - On the maximal order in S_n and S_n^* , Acta Arithm., Warszawa, t. 37, 1980, p. 321-331.