JEAN-PAUL ALLOUCHE

Suites de Rudin-Shapiro généralisées

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 24, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A14_0>

SUITES DE RUDIN-SHAPIRO GÉNÉRALISÉES

par Jean-Paul ALLOUCHE (*)

Nous nous proposons ici de résumer un article avec P. LIARDET [2] (voir aussi [1]), où l'on construit des suites vérifiant la même inégalité que la suite de Rudin-Shapiro classique.

Rappelons que, si (a_n) est une suite à valeurs ± 1, on a

$$\sqrt{N} \leqslant \sup_\theta \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{2i\pi n\theta} \right| \leqslant N$$

(l'inégalité de droite est triviale, celle de gauche s'obtient en minorant la norme L^∞ par la norme L^2).

Par ailleurs, pour presque toute (au sens de la mesure de Lebesgue) suite (a_n) à valeurs ± 1, on a

$$\sup_\theta \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, e^{2i\pi n\theta} \right| \leqslant C \sqrt{N \log N} \ .$$

RUDIN [7] et SHAPIRO [8] ont construit indépendamment une suite (u_n) à valeurs ± 1 vérifiant

$$(*) \qquad \sup_\theta \left| \sum_{n=0}^{N-1} u_n \, e^{2i\pi n\theta} \right| \leqslant C \sqrt{N} \ ,$$

autrement dit, le "bon" ordre de grandeur à l'infini du sup est $\sqrt{N}$.

Deux points méritent d'être soulignés, d'une part cette suite (u_n) a une expression simple : $u_n = (-1)^{v_n}$, où v_n est le nombre de 11 dans le développement binaire de n [4], d'autre part cette suite est déterministe (au sens de [6]), et même engendrée par automate fini [5].

Nous montrons dans [2] que d'autres suites vérifient l'inégalité (*), par exemple $u_n = (-1)^{w_n}$, où w_n est le nombre de $1 * \ldots * 1$ dans le développement binaire de n .

De telles suites sont aussi engendrées par automates, et nous proposons de les appeler suites de Rudin-Shapiro généralisées. Notons pour conclure que l'inégalité (*) reste valable si l'on remplace $e^{2i\pi n\theta}$ par $f(n)$ où f est une fonction 2-multiplicative de module 1 (voir aussi [3]), mais que les questions suivantes sont ouvertes :

(*) Jean-Paul ALLOUCHE, UER Mathématiques et Informatique, UA 226, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

- Caractériser les suites (u_n) vérifiant (*), ou au moins celles d'entre elles d'entropie nulle, ou automatiques.

- Si l'inégalité (*) a lieu pour une certaine suite (u_n), peut-on remplacer $e^{2i\pi n\theta}$ par $f(n)$ (f 2-multiplicative de module 1) dans cette inégalité ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLOUCHE (Jean-Paul). - Les suites de Rudin-Shapiro généralisées, des suites déterministes de "dimension" maximale. Congrès "Des fractales en mathématique et en physique", CIRM-Luminy 1986.

[2] ALLOUCHE (Jean-Paul) et LIARDET (P.). - (En préparation).

[3] ALLOUCHE (Jean-Paul) et MENDÈS-FRANCE (Michel). - On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence, Mathematika, London, t. 32, 1985, p. 33-38.

[4] BRILLHART (John) et CARLITZ (L.). - Note on the Shapiro polynomials, Proc. Amer. math. Soc., t. 25, 1970, p. 114-118.

[5] CHRISTOL (Gilles), KAMAE (T.), MENDÈS-FRANCE (Michel) et RAUZY (G.). - Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. math. France, t. 108, 1980, p. 401-419.

[6] RAUZY (G.). - Nombres normaux et processus déterministes, Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 211-225.

[7] RUDIN (Walter). - Some theorems on Fourier coefficients, Proc. Amer. math. Soc., t. 10, 1959, p. 855-859.

[8] SHAPIRO (Harold S.). - Extremal problems for polynomials and power series, Thesis, MIT, 1951