GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

ANNETTE DECOMPS-GUILLOUX
MARTHE GRANDET-HUGOT

Nouvelles caractérisations des nombres de Pisot et de Salem

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. nº 31, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A12_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 31, 19 p.

25 mars 1985, 7 octobre 1985

NOUVELLES CARACTÉRISATIONS DES NOMBRES DE PISOT ET DE SALEM

par

Annette DECOMPS-GUILLOUX (*) et Marthe GRANDET-HUGOT (**)

1. Introduction. Rappels.

Soit S l'ensemble des nombres de Pisot c'est-à-dire l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1, dont tous les conjugués, (autres que lui-même), ont un module strictement inférieur à 1 , et soit T l'ensemble des nombres de Salem c'est-à-dire l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 , dont tous les conjugués (autres que lui-même) ont un module inférieur ou égal à 1 , l'un au moins étant de module 1 .

Si θ est un élément de S ou T , λ un entier algébrique de $\mathbb{Q}(\theta)$, et si l'on note

$$\begin{matrix} \theta^{(i)} , & i = 2 , \ldots , s \\ \lambda^{(i)} , & i = 2 , \ldots , s \end{matrix} \quad (s = \text{degré de } \mathbb{Q}(\theta))$$

les conjugués respectifs de θ et λ (autres qu'eux-même), le nombre

$$\lambda \theta^n + \sum_{i=2}^{s} \lambda^{(i)} \theta^{(i)n}$$

est un entier rationnel. Ainsi, si l'on désigne par $\|x\|$, pour x réel, la distance de x à l'entier le plus proche, on a, pour $\theta \in S$, à partir d'un certain rang

$$\|\lambda \theta^n\| = |\sum_{i=2}^{s} \lambda^{(i)} \theta^{(i)n}| ,$$

et la suite $(\|\lambda\theta^n\|)$ tend vers zéro comme une progression géométrique. Si λ est un élément quelconque de $\mathbb{Q}(\theta)$, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$, tel que $\ell \lambda$ soit entier algébrique, et la suite $(\|\lambda \theta^n\|)$ a, au maximum, ℓ valeurs d'adhérence, toutes rationnelles (les suites extraites convergent vers ces valeurs d'adhérence comme des progressions géométriques).

Réciproquement, PISOT a montré [2] que, pour un réel $\theta > 1$, l'existence d'un réel λ non nul tel que soit réalisée l'une ou l'autre des conditions

(1.1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda \theta^n\|^2 < + \infty$,

ou

(1.2) θ algébrique et $\lim_{n\to\infty} \|\lambda \theta^n\| = 0$,

---

(*) Annette DECOMPS-GUILLOUX, Laboratoire de Mathématiques fondamentales, Université P. et M. Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

(**) Marthe GRANDET-HUGOT, Département de Mathématiques, Université de Caen, 14032 CAEN CEDEX.

entraînent que θ appartient à S et λ à $\mathbb{Q}(\theta)$. Ces résultats datent de 1938, depuis la question de savoir s'il existe des nombres transcendants tels que la suite $(\|\lambda\, \theta^n\|)$ tende vers zéro est posée. En 1948, PISOT a établi [3] que, pour un réel $\theta > 1$, l'existence d'un réel λ non nul tel que soient réalisées les conditions (1.3) et (1.4) (resp. (1.3) et (1.5)).

(1.3) La suite $(\|\lambda\, \theta^n\|)$ a un nombre fini de valeurs d'adhérence,

(1.4) θ est algébrique,

(1.5) la convergence des suites extraites vers les valeurs d'adhérence est en $o(n^{-(h+1)})$ (h désigne le nombre de valeurs d'adhérence irrationnelles),

entraînent que θ appartient à S et λ à $\mathbb{Q}(\theta)$. Ce résultat appelle la remarque suivante : les conditions (1.3) et (1.4) (resp. (1.3) et (1.5)) ne peuvent être réalisées avec h non nul ; elles entraînent en effet que λ appartient à $\mathbb{Q}(\theta)$ et donc que les valeurs d'adhérence de la suite $(\|\lambda\, \theta^n\|)$ sont toutes rationnelles; or, pour $h = 0$, la condition (1.5) est moins bonne que la condition (1.1). Dans le même article de PISOT [3], on trouve la première caractérisation de l'ensemble $S \cup T$ par l'existence, pour $\theta > 1$, d'un réel $\lambda > 1$ tel que l'on ait

$$(1.6) \qquad \|\lambda\, \theta^n\| \leq \frac{1}{2e\, \theta(\theta + 1)(1 + \log \lambda)}, \quad \forall\, n \geq 0 .$$

PISOT et SALEM ont posé la question de savoir si l'on peut trouver une condition unique rassemblant les conditions (1.1) et (1.6) ([4], 1964).

A propos de cette question, CANTOR a publié en 1977 un article [1] dont nous reprenons ici certaines démonstrations en particulier celle d'un critère de rationalité (théorème 2.1). Puis nous donnons de nouvelles caractérisations de S et de $S \cup T$; elles améliorent les conditions de PISOT (théorèmes 3.2, 4.3, 5.1) ou peuvent être considérées comme des réponses à la question de PISOT et SALEM (théorèmes 3.2, 5.1).

2. Critère algébrique de rationalité.

Etant donné un corps commutatif K, des critères classiques permettent de reconnaitre si une série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n \in K[[X]]$ représente une fraction rationnelle, à partir des propriétés de la suite (c_n).

Rappelons rapidement les plus importantes. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$ représente une fraction rationnelle si, et seulement si, l'une des trois conditions (A), (B) ou (C) suivantes est réalisée.

(A) Il existe des coefficients $q_0, \ldots, q_s$ non tous nuls et un entier n_0 tel que l'on ait

$$\sum_{i=0}^{s} q_i\, c_{n-i} = 0, \quad \forall\, n \geq n_0 .$$

L'introduction des déterminants de Hankel

$$D_m^p = \begin{vmatrix} c_m & \cdots & c_{m+p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m+p} & \cdots & c_{m+2p} \end{vmatrix}$$

permet de déduire de la condition (A) les conditions (B) et (C).

(B) <u>Il existe un entier</u> s <u>et un rang</u> n_0 <u>tel que</u>

$$D_n^s = 0 \ , \quad \forall\, n \geqslant n_0 \qquad \text{(HANKEL)}$$

(C) <u>Il existe un rang</u> n_0 <u>tel que</u>

$$D_0^n = 0 \ , \quad \forall\, n \geqslant n_0 \qquad \text{(KRONECKER).}$$

Si les coefficients c_n sont entiers rationnels, il suffit de montrer que l'on a $|D_m^p| < 1$ pour en déduire $D_m^p = 0$.

Dans le critère de Cantor interviennent des déterminants liés aux déterminants de Hankel par l'intermédiaire d'une suite fixée de nombres complexes.

<u>Notations</u>. - A une série formelle $\sum_{n\in\underset{\sim}{N}} c_n X^n$ telle que c_0 est non nul, on associe deux familles de matrices, notées respectivement $H(P_n)$ et $A(P_n)$, P_n désignant un élément de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des suites strictement croissantes de $n+1$ entiers positifs ou nuls. On note un élément $P_n \in \mathcal{P}_n$ sous la forme

$$P_n = (p_0 \ , p_1 \ , \ldots \ , p_n) \ , \quad 0 \leqslant p_0 < p_1 < \ldots < p_n \ ,$$

et l'on désigne par I_n la suite $I_n = (0 \ , 1 \ , \ldots \ , n)$. La matrice $H(P_n)$ est définie par l'égalité

$$H(P_n) = \begin{pmatrix} c_{p_0} & c_{p_0+1} & \cdots & c_{p_0+n} \\ c_{p_1} & c_{p_1+1} & \cdots & c_{p_1+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p_n} & c_{p_n+1} & \cdots & c_{p_n+n} \end{pmatrix} ;$$

On remarque que l'on a $H(I_n) = D_0^n$.

Pour définir la matrice $A(P_n)$, on considère une suite fixée de nombres complexes (t_n) telle que $t_0 = 1$; on pose pour $(m \ , n) \in \underset{\sim}{N}^2$

$$x_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} t_i \, t_j \, c_{m+n-(i+j)} \ ,$$

la matrice $A(P_n)$ est alors définie par l'égalité

$$A(P_n) = \begin{pmatrix} x_{p_0,0} & x_{p_0,1} & \cdots & x_{p_0,n} \\ x_{p_1,0} & x_{p_1,1} & \cdots & x_{p_1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p_n,0} & x_{p_n,1} & \cdots & x_{p_n,n} \end{pmatrix} .$$

Un calcul élémentaire montre que, si l'on désigne par T_n . la matrice

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_n \\ 0 & 1 & \cdots & t_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} ,$$

on a alors

$$A(I_n) = {}^tT_n \, H(I_n) \, T_n .$$

THÉORÈME 2.1 : Critère algébrique de rationalité de Cantor [2].

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$ une série formelle à coefficients entiers rationnels telle que $c_0 \neq 0$, et soit (t_n) une suite de nombres complexes telle que $t_0 = 1$.

On suppose qu'il existe un entier $r > 0$ tel que, pour tout $P_r \in \mathcal{P}_r$, on ait

(2.1) $$|\det A(P_r)| < 1 ,$$

alors la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$ représente une fraction rationnelle.

Plus précisément, on montre qu'il existe un entier s vérifiant $1 \leqslant s \leqslant r$, et des entiers rationnels q_0 , ... , q_s non tous nuls tels que

$$(R_n) \quad \sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{n-i} = 0 , \quad \forall \; n \geqslant s .$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$ s'écrit alors sous la forme $A(X)/Q(X)$ où les polynômes A et Q appartiennent à $\mathbb{Z}[X]$ et vérifient $\deg A < s$ et $\deg Q \leqslant s$.

Démonstration. - On remarque que $\det H(P_n)$ est entier, mais non $\det A(P_n)$; un des points principaux de la démonstration consiste à montrer, pour une valeur de n, l'inégalité $|\det H(P_n)| < 1$, à partir de la condition (2.1).

Cette condition entraîne

$$D_0^r = \det H(I_r) = \det A(I_r) = 0 .$$

Soit alors s l'entier défini par

$$\begin{cases} D_0^n = 0 & \text{pour} \quad s \leqslant n \leqslant r . \\ D_0^{s-1} \neq 0 ; \end{cases}$$

on a $s \geqslant 1$, car $D_0^0 = c_0 \neq 0$.

L'égalité $D_0^s = 0$ entraîne qu'il existe des entiers $q_0 , \dots , q_s$ non tous nuls tel que l'on ait

$$(R_n) \qquad \textstyle\sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{n-i} = 0 \ , \quad n = s \ , \dots \ , 2s \ .$$

Le but de la démonstration est de montrer que la condition (R_n) est vérifiée pour tout $n \geqslant s$; elle se fait par récurrence sur l'entier n , on est amené à distinguer deux cas $n \leqslant s + r$ et $n > s + r$.

(a) $2s < n \leqslant s + r$.

Soit m un entier vérifiant $s < m \leqslant r$; on suppose (R_n) vérifiée pour $n = s , \dots , s + m - 1$, on se propose de montrer que (R_{s+m}) est vérifiée. Les inégalités $s < m \leqslant r$ entraînent

$$D_0^m = \operatorname{Det} H(I_m) = 0 \ .$$

On note $(V_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ les vecteurs colonnes de la matrice $H(I_m)$; on les remplace successivement pour $j = m , m - 1 , \dots , s$ par les combinaisons linéaires $V'_j = \sum_{i=0}^{s} q_i \, V_{j-i}$; la matrice obtenue a un déterminant nul et s'écrit

$$\begin{pmatrix} c_0 & \dots & c_{s-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ c_{s-1} & \dots & c_{2s-2} & 0 & \dots & 0 \\ c_s & \dots & c_{2s-1} & 0 & \dots & \sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{s+m-i} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ c_m & \dots & c_{s+m-1} & \sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{s+m-i} & \dots & \sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{2m-i} \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$D_0^{s-1} \left(\textstyle\sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{s+m-i}\right)^{s+m-i} = 0 \ ,$$

d'où, comme $D_0^{s-1} \neq 0$,

$$(R_{s+m}) \quad \textstyle\sum_{i=0}^{s} q_i \, c_{s+m-i} = 0 \ .$$

(b) $n > s + r$.

On suppose la relation (R_h) vérifiée pour $h = s , \dots , n - 1$, mais on ne dispose pas de l'hypothèse de départ $D_0^n = 0$ comme dans (a) ; aussi on introduit la matrice K_n définie par

$$K_n = H(0 \ , 1 \ , \dots \ , s - 1 \ , \ n - r \ , \dots \ , n - s) \ ,$$

et l'on se propose de montrer que $\det K_n$ est nul, puis d'en déduire la relation (R_n) . Pour montrer que le déterminant de K_n est nul, on transforme K_n en faisant des combinaisons linéaires entre lignes et colonnes de façon à obtenir la matrice $A(0 , 1 , \dots , s - 1 , n - r , \dots , n - s)$.

On note W_i l'élément de $\mathbb{Z}^{r+1}$ qui s'écrit :

$$W_i = (c_i , \dots , c_{i+r}) .$$

Les vecteurs lignes de K_n sont $W_0 , \dots , W_{s-1} , W_{n-r} , \dots , W_{n-s}$; les vecteurs $W_s , \dots , W_{n-r-1}$ qui ne figurent pas dans les lignes de K_n sont combinaisons linéaires de $W_0 , \dots , W_{s-1}$.

On transforme la matrice K_n en remplacant W_i , successivement pour $i = n - s , \dots , n - r , \dots , 0$, par

$$W'_i = \sum_{\ell=0}^{i} t_\ell W_{i-\ell} .$$

La matrice K'_n obtenue a comme vecteurs lignes

$$W'_i = (\sum_{\ell=0}^{i} t_\ell c_{i-\ell} , \sum_{\ell=0}^{i} t_\ell c_{i+1-\ell} , \dots , \sum_{\ell=0}^{i} t_\ell c_{i+r-\ell}) .$$

Soient $V'_0 , \dots , V'_r$ les vecteurs colonnes de la matrice K'_n , on les remplace successivement, pour $j = r , r - 1 , \dots , 0$, par

$$V'_j = \sum_{k=0}^{j} t_k V'_{j-k} ,$$

on obtient alors la matrice $A(0 , 1 , \dots , s - 1 , n - r , \dots , n - s)$. On a donc l'inégalité $|\det K_n| < 1$ qui entraîne $\det K_n = 0$.

La démonstration se termine alors comme dans (a) ; on remplace successivement les vecteurs colonnes V_j de K_n , pour $j = r , r + 1 , \dots , s$, par

$$V'_j = \sum_{\ell=0}^{j} q_\ell V_{j-\ell} ;$$

on obtient une matrice dont le déterminant vaut

$$(\sum_{\ell=0}^{s} q_\ell c_{n-\ell})^{r-s+1} D_0^{s-1} = 0 ,$$

d'où

$$(R_n) \qquad \sum_{\ell=0}^{s} q_\ell c_{n-\ell} = 0 .$$

Remarque. - Si la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$ représente une fraction rationnelle A/Q où le polynôme Q est de degré s , alors on voit immédiatement qu'il existe une relation linéaire entre les colonnes de $H(P_s)$, et l'on a donc $\det H(P_s) = 0$.

3. Application du critère algébrique de rationalité aux nombres de Pisot et de Salem.

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on écrira pour $\theta > 1$ et $\lambda \neq 0$, la décomposition modulo 1 de $\lambda \theta^n$ sous la forme $\lambda \theta^n = a_n + \epsilon_n$, avec $a_n \in \mathbb{Z}$ et $\epsilon_n \in [- \frac{1}{2} , \frac{1}{2}[$ de telle sorte que $|\epsilon_n| = \|\lambda \theta^n\|$.

En ce qui concerne les différentes caractérisations, seules les conditions suffisantes sont démontrées, les conditions nécessaires étant triviales ; d'autre part, les conditions envisagées entraînent que le réel λ qui intervient appartient à $\mathbb{Q}(\theta)$, nous ne le rappelerons pas dans les divers énoncés ; ceci correspond aux théorèmes 3.1, 3.2, 4.3, 5.1 et aux corollaires 3.1 et 3.2.

THÉORÈME 3.1 (CANTOR). - Un réel θ supérieur à 1 appartient à l'ensemble $S \cup T$ si, et seulement si, il existe des réels λ, μ et σ vérifiant respectivement

$$\lambda > 1/2 \ , \quad 0 < \sigma \leqslant 1 \ , \quad 0 < \mu \leqslant 1 \ ,$$

tels que l'on ait, pour $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$,

$$(3.1) \qquad (1 + \theta)^2 \sum_{i=m}^{m+n-1} (\varepsilon_{i+1} - \theta\, \varepsilon_i)^2 < \mu\, n^{\sigma} \ ,$$

en supposant en outre réalisée l'inégalité

$$(3.2) \qquad \mu^{1/\sigma} \leqslant \frac{\sigma}{e[\log(a_0^2 + \frac{1}{(\theta + 1)^3}) + 2\sigma]} \ .$$

La démonstration utilise le lemme suivant.

LEMME 3.1 (CANTOR). - Soient μ et σ deux réels vérifiant $0 < \mu \leqslant 1$ et $0 < \sigma \leqslant 1$; on considère la fonction $g = x \longmapsto \mu^x x^{\sigma x}$. Il existe un entier k vérifiant

$$\frac{1}{e\mu^{1/\sigma}} \leqslant k < 1 + \frac{1}{e\mu^{1/\sigma}} \ ,$$

tel que l'on ait l'inégalité

$$(3.3) \qquad \log g(k) < \sigma \left(e\, \mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\, \mu^{1/\sigma}}\right) \ .$$

Démonstration du lemme 3.1. - On a, pour $x > 0$,

$$\log g(x) = x(\log \mu + \sigma \log x) \ ,$$

et donc

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log \mu + \sigma \log x + \sigma \ .$$

La fonction g admet un minimum en $x_0 = 1/e\mu^{1/\sigma}$, et l'on a $\log g(x_0) = \frac{-\sigma}{e\mu^{1/\sigma}}$.

Soit k l'entier défini par $x_0 \leqslant k < x_0 + 1$; on a nécessairement $k \geqslant 1$; le cas $k = 1$ correspond à $e\mu^{1/\sigma} \geqslant 1$, et l'inégalité (3.3) est triviale. La fonction g étant croissante pour $x > x_0$, on a $\log g(k) < \log g(x_0 + 1)$. De l'inégalité

$$\frac{g(x_0 + 1)}{g(x_0)} = \mu\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^{\sigma x_0} (x_0 + 1)^{\sigma} \ ,$$

on déduit, compte tenu de l'inégalité $\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^{x_0} < e$,

$$\frac{g(x_0 + 1)}{g(x_0)} < \mu(x_0 + 1)^{\sigma} e^{\sigma} = (1 + e\mu^{1/\sigma})^{\sigma}$$

d'où

$$\log g(k) < \log g(x_0) + \log\left(\frac{g(x_0 + 1)}{g(x_0)}\right)$$

soit finalement

(3.3)
$$\log g(k) < \sigma[e\,\mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\,\mu^{1/\sigma}}] .$$

Démonstration du théorème 3.1. - On se propose d'appliquer le critère de rationalité à la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ en considérant la suite (t_n) définie par

$$t_0 = 1 , \quad t_1 = -\theta , \quad t_i = 0 , \quad i \geqslant 2 .$$

Pour tout entier $r \geqslant 1$ et toute suite $P_r \in \mathcal{P}_r$, la matrice $A(P_r)$ s'écrit

$$A(P_r) = (x_{p_i,j}) , \quad i = 0 , \dots , r ; \quad j = 0 , \dots , r$$

avec

$$x_{m,n} = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} t_h\, t_k\, a_{m+n-(h+k)} .$$

On pose $\sigma_n = \theta\, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$, on obtient alors

$$x_{0,0} = a_0$$
$$x_{0,n} = x_{n,0} = \delta_n \quad (n \geqslant 1)$$

et

$$x_{m,n} = x_{n,m} = \delta_{m+n} - \theta\, \delta_{m+m-1} \quad (m \geqslant 1 , \quad n \geqslant 1) .$$

On a, dans ce dernier cas,

$$x^2_{m+n} = \delta^2_{m+n} - 2\,\theta\, \delta_{m+n}\, \delta_{m+n-1} + \theta^2\, \delta_{m+n-1} \leqslant \delta^2_{m+n} + \theta(\delta^2_{m+n} + \delta^2_{m+n-1}) + \theta^2\, \delta^2_{m+n-1} ,$$

soit

(3.4)
$$x^2_{m,n} \leqslant (1 + \theta)(\delta^2_{m+n} + \theta\, \delta^2_{m+n-1}) \quad (m \geqslant 1 , \quad n \geqslant 1) .$$

Au lieu de la matrice $A(P_r)$, on considère la matrice $B(P_r)$ obtenue à partir de $A(P_r)$ en multipliant la première colonne par $\sqrt{1+\theta}$ et en divisant la première ligne par $\sqrt{1+\theta}$ de telle sorte que l'on ait $\det B(P_r) = \det A(P_r)$ et $B(P_r) = (y_{ij})$ $i = 0 , \dots , r$, $j = 0 , \dots , r$ avec

$$y_{0,0} = x_{p_0,0} ,$$

$$y_{0,j} = (x_{p_0,j})/(\sqrt{1+\theta}) , \quad j = 1 , \dots , r ,$$

$$y_{i,0} = \sqrt{1+\theta}\; x_{p_i,0} , \quad i = 1 , \dots , r ,$$

$$y_{ij} = x_{p_i,j} , \quad i = 1 , \dots , r ; \quad j = 1 , \dots , r .$$

Dans le but d'appliquer la majoration d'Hadamard au déterminant de $B(P_r)$, on se propose de majorer $\sum_{j=0}^{r} y^2_{ij}$, $i = 0 , \dots , r$. On doit distinguer plusieurs cas.

Pour $i \geqslant 1$: On a les inégalités successives

$$\sum_{j=0}^{r} y^2_{ij} = (1+\theta)\, x^2_{p_i,0} + \sum_{j=1}^{r} x^2_{p_i,j} \leqslant (1+\theta)[\delta^2_{p_i} + \sum_{j=1}^{r} (\delta^2_{p_i+j} + \theta\, \delta^2_{p_i+j-1}] ,$$

soit

(3.5) $$\sum_{j=0}^{r} y_{ij}^2 \leqslant (1 + \upsilon)^2 \sum_{j=0}^{r} \delta_{p_i+j}^2 \leqslant \mu(r = 1)^\sigma .$$

<u>Pour</u> $i = 0$ <u>et</u> $p_0 = 0$:

$$\sum_{j=0}^{r} y_{0,j}^2 = x_{0,0}^2 + \frac{1}{1+\upsilon} \sum_{j=1}^{r} x_{0,j}^2 = a_0^2 + \frac{1}{1+\upsilon} \sum_{j=1}^{r} \delta_j^2$$

(3.6) $$\sum_{j=0}^{r} y_{0,j}^2 \leqslant a_0^2 + \mu\frac{(r+1)^\sigma}{(1+\upsilon)^2} .$$

<u>Pour</u> $i = 0$ <u>et</u> $p_0 \neq 0$:

$$\sum_{j=0}^{r} y_{0,j}^2 = x_{p_0,0}^2 + \frac{1}{1+\upsilon} \sum_{j=1}^{r} x_{p_0,j}^2 \leqslant \delta_{p_0}^2 + \frac{1}{1+\upsilon} \sum_{j=1}^{r}(1+\upsilon)[\delta_{p_0+j}^2 + \upsilon\, \delta_{p_0+j-1}^2] ,$$

soit

(3.7) $$\sum_{j=0}^{r} y_{0,j}^2 \leqslant (1+\upsilon) \sum_{j=0}^{r} \delta_{p_0+j}^2 < \frac{\mu(r+1)^\sigma}{1+\upsilon} .$$

On obtient alors :

pour $p_0 = 0$ (en utilisant les inégalités (3.5) et (3.6),

(3.8) $$|\det A(P_r)|^2 \leqslant (a_0^2 + \frac{\mu(r+1)^\sigma}{(1+\upsilon)^3})(\mu(r+1)^\sigma)^r ,$$

pour $p_0 \neq 0$,

(3.9) $$|\det A(P_r)|^2 \leqslant \frac{1}{1+\upsilon} (\mu(r+1)^\sigma)^{r+1} .$$

On peut alors déterminer r, grâce au lemme 3.1, de telle sorte que l'on ait $|\det A(P_r)| < 1$.

On pose pour cela, $u = 1 + \frac{1}{\sigma} \log(a_0^2 + \frac{1}{(1+\upsilon)^3})$ la condition (3.2) s'écrit alors $e\mu^{1/\sigma} \leqslant 1/(1+u)$; on remarque que l'on a $u > 0$, $e\mu^{1/\sigma} < 1$, et

$$u + e\mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\mu^{1/\sigma}} < u + \frac{1}{1+u} - (1+u) ,$$

soit

(3.10) $$u + e\mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\,\mu^{1/\sigma}} < 0 .$$

D'après le lemme 3.1, l'entier k, défini par

$$\frac{1}{e\mu^{1/k}} \leqslant k < 1 + \frac{1}{e\mu^{1/k}} ,$$

est tel que l'on ait

$$\log(\mu^k k^{\sigma k}) < \sigma(e\,\mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\mu^{1/\sigma}}) ,$$

et vérifie $k > 1$ (le cas $k = 1$ correspondrait à $e\mu^{1/\sigma} \geqslant 1$, inégalité incompatible avec $e\mu^{1/\sigma} \leqslant 1/(1+u)$ pour $u > 0$).

On pose $r = k - 1$, on a alors

$$\log[\mu^r (r+1)^{\sigma r}] < \sigma [e\mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\mu^{1/\sigma}}] - \log \mu - \sigma \log (r+1) ,$$

et l'inégalité $\log(r+1) \geqslant -1 - 1/\sigma \log \mu$ entraîne

$$\log [\mu^r (r+1)^{\sigma r}] < \sigma [e\, \mu^{1/\sigma} - \frac{1}{e\, \mu^{1/\sigma}} + 1] ,$$

et donc, d'après l'inégalité (3.10),

$$\log [a_0^2 + \frac{1}{(\theta+1)^3}] + \log [\mu^r (r+1)^{\sigma r}] < 0 . \tag{3.11}$$

Compte tenu de l'inégalité (3.8), si $p_0 = 0$, ou (3.9) si $p_0 \neq 0$ (on remarque en outre dans ce cas que $\log \mu(r+1)^\sigma$ est négatif), on déduit

$$|\det A(P_r)| < 1 \quad (\forall\, P_r \in \mathcal{P}_r) .$$

La démonstration se termine alors de façon classique grâce au théorème de Fatou.

La formulation de l'ensemble des conditions (3.1) et (3.2) ne rend pas aisée l'application du théorème 3.1, les corollaires suivants donnent des conditions plus facilement vérifiables.

COROLLAIRE 3.1. - <u>Un réel</u> θ <u>supérieur à</u> 1 <u>appartient à l'ensemble</u> $S \cup T$ <u>si, et seulement si, il existe des réels</u> λ , σ <u>et</u> A <u>vérifiant</u> $\lambda > 1$ <u>et</u> $0 < \sigma \leq 1$, <u>tels que l'on ait, pour tout</u> $m \geq 0$ <u>et</u> $n \geq 1$,

$$\sum_{j=m}^{m+n-1} \|\lambda\, \theta^j\|^2 < A\, n^\sigma , \tag{3.12}$$

<u>en supposant en outre réalisée la condition</u>

$$A < (\frac{\sigma}{2e})^\sigma \frac{1}{(\theta+1)^4 (2 + (\log \lambda)^{\sigma/2})^2} . \tag{3.13}$$

<u>Démonstration</u>. - Il s'agit d'appliquer le théorème 3.1 avec $\mu = (1+\theta)^4 A$. Les conditions (3.12) et (3.13) entraînent $|\varepsilon_0| < 1/4$ et donc $a_0 < \lambda + 1/4$; on en déduit

$$a_0^2 + \frac{1}{(\theta+1)^3} < (\lambda + \frac{1}{2})^2$$

et, cinpte tenu de l'inégalité $\lambda \geq 1$ qui implique $\lambda + 1/2 < e\,\lambda$ on obtient

$$\log(a_0^2 + \frac{1}{(1+\theta)^3} + 2\,\sigma < 2 \log \lambda + 4 .$$

Grâce aux inégalités

$$(\log \lambda + 2)^{\sigma/2} \leq (\log \lambda)^{\sigma/2} + 2^{\sigma/2} \leq (\log \lambda)^{\sigma/2} + 2 ,$$

on voit alors que l'ensemble des conditions (3.12) et (3.13) entraînent l'ensemble des conditions (3.1) et (3.2)

COROLLAIRE 3.2. - <u>Un réel</u> θ <u>supérieur à</u> 1 <u>appartient à l'ensemble</u> $S \cup T$ <u>si, et seulement si, il existe un réel</u> λ <u>supérieur à</u> 1 <u>tel que l'on ait, pour tout</u> $n \geq 0$,

$$\|\lambda\, \theta^n\| < \frac{1}{e(\theta+1)^2 (2 + \sqrt{\log \lambda})} . \tag{3.14}$$

<u>Démonstration</u>. - En reprenant les calculs précédents, avec $\sigma = 1$ et compte tenu

de l'inégalité $\sqrt{2e} < e$, on voit que la condition (3.14) entraîne

$$(1 + \theta) \sum_{i=m}^{m+n-1} (\varepsilon_{i+1} - \theta\, \varepsilon_i)^2 < \frac{n}{\sqrt{2e}\,(1 + \theta)^2 \sqrt{2 + \log \lambda}} ,$$

on peut donc appliquer le théorème 3.1 avec $\sigma = 1$ et $\mu = \frac{1}{\sqrt{2e}(1 + \theta)^2 \sqrt{2 + \log \lambda}}$.

Remarques.

(1) La condition annoncée par CANTOR

(3.15) $$\|\lambda\, \theta^n\| \leqslant \frac{1}{2e\, \theta(\theta + 1)(2 + \sqrt{\log \lambda})} , \quad \forall\, n \geqslant 0 .$$

est plus forte que la condition (3.14), elle a l'avantage d'être facilement comparable à la condition (1.6) de PISOT, mais représente de l'intérêt par rapport à celle-ci que pour $\lambda > 13$.

(2) Des majorations plus fines permettent de remplacer dans le facteur $2 + \sqrt{\log \lambda}$, 2 par 1 , 2 , ou 1 si λ est entier ; on peut encore, pour λ assez grand, compte tenu de l'inégalité des accroissements finis, $\log(\lambda + 1/2) < \log \lambda + 1/2$, remplacer $2 + \sqrt{\log \lambda}$ par $1 + \sqrt{\log \lambda} + 1/2\lambda$.

(3) Comme pour la condition (1.6) de PISOT, on peut supposer réaliser pour $n \geqslant n_0$ l'une ou l'autre des conditions suivantes

(3.16) $$\|\lambda\, \theta^n\| \leqslant \frac{1}{2e\, \theta(\theta + 1)(2 + \sqrt{n_0 \log \theta} + \sqrt{\log \lambda})}$$

ou

(3.17) $$\|\lambda\, \theta^n\| \leqslant \frac{1}{e(\theta + 1)^2\, (2 + \sqrt{n_0 \log \theta} + \sqrt{\log \lambda})} .$$

C'est dans la présence du terme $\sqrt{n_0 \log \theta}$, au lieu de $n_0 \log \theta$ dans la formule de Pisot, que réside l'intérêt de ces expressions.

Comme les corollaires précédents, le théorème 3.2 se déduit du théorème 2.1 ; il caractérise S puisque la condition entraîne que la suite (ε_n) tend vers zéro.

THÉORÈME 3.2. - <u>Un réel θ supérieur à 1 appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe deux réels λ et α vérifiant $\lambda \geqslant 1$ et $0 < \alpha < 1/2$, tels que l'on ait</u>

(3.18) $$\begin{cases} \|\lambda\| \leqslant \varepsilon \\ \|\lambda\, \theta^n\| \leqslant \varepsilon\, n^{-\alpha} \quad \text{pour } n \geqslant 1 , \end{cases}$$

avec

(3.19) $$\varepsilon = \frac{(1 - 2\alpha)^{1-\alpha}}{2e(\theta + 1)^2\, (2 + (\log \lambda)^{1/2-\alpha})} .$$

Démonstration. - Les conditions (3.18) entraînent pour $n \geqslant 1$

$$\sum_{j=m}^{m+n-1} \varepsilon_j^2 \leqslant \varepsilon^2 \sum_{j=m}^{m+n-1} j^{-2\alpha} \leqslant \varepsilon^2 \sum_{m-1}^{m+n-1} \frac{dt}{t^{2\alpha}} = \frac{\varepsilon^2}{1 - 2\alpha}[(m + n - 1)^{1-2\alpha} - (m - 1)^{1-2\alpha}] ,$$

et, compte tenu de l'inégalité

$$(m + n - 1)^{1-2\alpha} < (m - 1)^{1-2\alpha} + n^{1-2\alpha} ,$$

(3.20) $$\sum_{j=m}^{m+n-1} \epsilon_j^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{1 - 2\alpha} n^{1-2\alpha} .$$

Par ailleurs, si $m = 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_j^2 \leqslant \epsilon_0^2 + \epsilon^2 \sum_{j=1}^{n-1} j^{-2\alpha} \leqslant \epsilon_0^2 + \frac{\epsilon^2(n -1)^{1-2\alpha}}{1 - 2\alpha} ,$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_j^2 < \frac{2\epsilon^2 n^{1-2\alpha}}{1 - 2\alpha} .$$

On peut alors appliquer le corollaire 3.1 avec $A = (2\epsilon^2)/(1 - 2\alpha)$ et $\sigma = 1 - 2\alpha$ car la condition (3.13) s'écrit alors

$$\epsilon < \left(\frac{1 - 2\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - 2\alpha}{2e}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \frac{1}{(\theta + 1)^2 (2 + (\log \lambda)^{\frac{1}{2}-\alpha})} ,$$

et on la déduit de la condition (3.19) compte tenu de l'inégalité stricte.

$$2^{1-\alpha} e^{\frac{1}{2}-\alpha} < 2e .$$

Remarques.

(1) Si $\alpha = 0$, cette condition est proche de la condition (3.14) qui caractérise $S \cup T$.

(2) On peut encore supposer que l'on a, pour $n \geqslant n_0$, $|\epsilon_n| \leqslant \epsilon n^{-\alpha}$ avec

$$\epsilon = \frac{(1 - 2\alpha)^{1-\alpha} n_0^{\alpha}}{2e(\theta + 1)^2 (2 + (\log \lambda)^{\frac{1}{2}-\alpha} + (n_0 \log \theta^{\frac{1}{2}-\alpha})} ,$$

cette condition entraîne donc $\epsilon = o\,(n_0^{-\frac{1}{2}})$ resultat analogue à celui trouvé pour $\alpha = 0$ (3.17)

(3) La condition (3.18) est assez différente des conditions usuelles caractérisant S : il s'agit d'une majoration en fonction de x , et qui est réalisée pour tout n , aussi elle semble mieux que la condition (3.1) de CANTOR répondre à la question de PISOT et SALEM.

4. Critère analytique de rationalité. Application à la caractérisation de S par la condition $\|\lambda \theta^n\| = o(1/\sqrt{n})$

Le but de ce paragraphe est de caractériser S par la condition $\|\lambda \theta^n\| = o(1/\sqrt{n})$, caractérisation qui est une conséquence du théorème 4.1. Celui-ci est un critère de rationalité, qui se déduit du théorème 2.1, mais est basé sur les propriétés de la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ dans $\mathbb{C}$; c'est en ce sens que l'on peut parler de critère analytique. Dans l'article de CANTOR [1] figure un critère dont les conditions sont un peu différentes de celles du théorème 4.1 ; le but de CANTOR est d'avoir un critère qu'il appliquera aux suites (ϵ_n) ayant k valeurs d'adhérence (dont seule la valeur d'adhérence 0 est rationnelle). Ainsi, CANTOR considère des suites (a_n) prenant k valeurs distinctes modulo 1 mais dans sa démonstration, CANTOR fait une erreur en appliquant le théorème de Dirichlet (page 51). Ne pouvant utiliser le résultat de Cantor et comme seul le cas des suites (ε_n) tendant vers zéro nous intéresse, nous avons établi un critère dont la démonstration s'inspire de la méthode de Cantor, sans utiliser le théorème de Dirichlet, et qui concerne des suites d'entiers rationnels.

THÉORÈME 4.1. - Critère analytique de rationalité. Soit (a_n) une suite d'entiers rationnels ; on considère la fonction f définie au voisinage de l'origine par l'égalité $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On suppose que la fonction f n'est pas constante, et qu'elle peut s'exprimer comme le quotient de deux fonctions s et t analytiques au voisinage de l'origine.

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n , \quad t(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n ,$$

où les suites (s_n) et (t_n) vérifient les conditions suivantes

(i) $s_o \neq 0$, $t_o = 1$

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} |t_n| < +\infty$,

(iii) il existe deux réels α et β vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta \geqslant 1$ tels que l'on ait

$$\sum_{m=n}^{2n-1} |s_m|^2 = o(n^{-\alpha}) \tag{4.1}$$

$$\sum_{m=n}^{2n-1} |t_m|^2 = o(n^{-\beta}) \tag{4.2}$$

alors la fonction f est une fraction rationnelle. La démonstration utilise deux lemmes.

LEMME 4.1. - Soit (y_n) une suite de réels positifs tels que l'on ait

$$\sum_{i=m}^{2m-1} y_i = O(1) \tag{4.3}$$

on pose

$$\delta_n = \sup_{m \geqslant n} \sum_{i=m}^{2m-1} y_i .$$

Soit $(i_1 , \dots , i_s)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels, on a alors

$$\sum_{h=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} y_{i_h+m} \leqslant 4 \sum_{j=1}^{s} \delta_j . \tag{4.4}$$

Démonstration. - Dans la démonstration interviennent des sommes $\sum_{m=n}^{2n-1}$, aussi il est utile d'introduire, pour certains entiers, la plus grande puissance de 2 qui leur est inférieure ; soit r l'ensemble

$$r = \{n \in \mathbb{N} ; \ n = 2^p , \ p \in \mathbb{N}\} ;$$

l'entier h étant fixé $(h \in \{1 , 2 , \dots , s\})$, on note respectivement j_h , ℓ_h et g les éléments de r tels que

$$j_h \leqslant s | i_h < 2j_h , \quad \ell_h \leqslant h < 2\ell_h , \quad g \leqslant s < 2g .$$

On a alors $0 < \sum_{m=1}^{s} y_{i_h+m} \leqslant \delta_{i_h} + \delta_{2i_h} + \dots + \delta_{j_h i_h}$ et la suite (δ_n) étant décroissante, en tenant compte de $i_h \geqslant h \geqslant \ell_h$

$$0 \leqslant \sum_{m=1}^{s} y_{i_h+m} \leqslant \delta_h + \delta_{2h} + \dots + \delta_{j_h h} \leqslant \delta_{\ell_h} + \delta_{2\ell_h} + \dots + \delta_g$$

et

$$\sum_{h=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} y_{i_h+m} \leqslant \delta_1 + \dots + \delta_g + 2(\delta_2 + \dots + \delta_g) + 4(\delta_4 + \dots + \delta_g) + \dots + g\,\delta_g$$
$$\leqslant \delta_1 + 3\delta_2 + 7\delta_4 + \dots + (2g - 1)\,\delta_g \, .$$

On utilise alors les inégalités $7\delta_4 < 8\delta_4 \leqslant 4(\delta_3 + \delta_4)$ et, plus généralement, $(2^{q+1} - 1)\,\delta_{2^q} \leqslant 2^{q+1}\,\delta_{2^q} \leqslant 4(\delta_{2^{q-1}+1} + \dots + \delta_{2^q})$, on obtient

$$\sum_{h=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} y_{i_h+m} \leqslant 4 \sum_{j=1}^{g} \delta_j \leqslant 4 \sum_{j=1}^{s} \delta_j \, .$$

Remarque. - CANTOR imposait la condition $\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=m}^{2m-1} y_i = 0$ à la place de la condition (4.3).

LEMME 4.2. - Soit $X = (x_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} |x_{ij}|^2 \leqslant n \, , \tag{4.5}$$

on a alors $|\det X| < 1$.

Démonstration. - En utilisant l'inégalité d'Hadamard et l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique, on obtient

$$|\det X|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|^2 \leqslant \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|^2\Big)^n < 1 \, .$$

Démonstration du théorème 4.1, (*). - On cherche à appliquer le cirtère de rationalité à la série entière $\sum a_n z^n$, et donc à montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que l'on ait $|\det A(P_r)| < 1$, $\forall P_r \in \mathcal{P}_r$, en utilisant l'inégalité (4.5).

On est donc conduit à majorer les expressions $\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |x_{p_{m,n}}|^2$ avec

$$x_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} t_i \, t_j \, a_{m+n-(i+j)} \, .$$

(*) La démonstration faite ici suppose $\alpha < 1$ et $\beta < 1$; dans le cas où $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$ les formules (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10) sont modifiées. Les formules (4.10) deviennent en particulier

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |x_{p_{m,n}}|^2 = \begin{cases} o(r^{1-\beta} \log^2 r) & \text{si } \alpha = 1,\ \beta < 1 \\ o(r^{1-\alpha} \log r) & \text{si } \alpha < 1,\ \beta = 1 \\ o(\log^3 r) & \text{si } \alpha = 1 = \beta \, . \end{cases}$$

On peut également supprimer la condition (ii).

Plusieurs étapes sont nécessaires ; on pose

$$u_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} t_i \; s_{m+n-i}$$

$$v_{m,n} = - \sum_{i=0}^{n-1} s_i \; t_{m+n-i} \quad (n \geq 1) \quad \text{et} \quad v_{m,0} = 0 \; ,$$

et, après avoir démontré l'égalité

(4.6) $$x_{m,n} = u_{m,n} + v_{m,n} \; , \quad \forall \, (m \, , \, n) \in \underline{N}^2 \; ,$$

on établira des évaluations distinctes pour

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |u_{p_{m,n}}|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |v_{p_{m,n}}|^2 \; .$$

On a, pour tout $n \geq 0$, $s_n = \sum_{i=0}^{n} t_i \; a_{n-i}$, on en déduit

$$x_{m,n} = \sum_{j=0}^{n} t_j \; s_{m+n-j} - \sum_{j=0}^{n} t_j \; \sum_{i=m+1}^{m+n-j} t_i \; a_{m+n-(i+j)} \; ,$$

soit

$$x_{m,n} = u_{m,n} - \sum_{i=m+1}^{m+n} t_i \sum_{j=0}^{m+n-i} t_j \; a_{m+n-(i+j)} = u_{m,n} - \sum_{i=m+1}^{m+n} s_{m+n-i} \; t_i$$

d'où

(4.6) $$x_{m,n} = u_{m,n} + v_{m,n} \; .$$

Afin de donner une évaluation de $\sum_{i=0}^{r} |s_i|$, on écrit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |s_i| \leq n^{1/2} \, [\sum_{i=n}^{2n-1} |s_i|^2]^{1/2}$$

d'où, en utilisant la condition (4.1) ;

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |s_i| < n^{1/2}((n^{-\alpha}))^{1/2} = o(n^{(1-\alpha)/2}) \; .$$

Soit r un entier ; on lui associe l'entier ℓ tel que 2^{ℓ} est le plus grand élément de Γ inférieur ou égal à r ; on a alors

$$\sum_{i=0}^{r} |s_i| \leq |s_0| + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=2}^{2^{j+1}-1} |s_i| = O \; (2^{\ell(1-\alpha)/2})$$

d'où

(4.7) $$\sum_{i=0}^{r} |s_i| = O \; (r^{(1-\alpha)/2}) \; .$$

On définit le polynôme $\Pi_{m,r}$ par

$$\Pi_{m,r}(z) = \sum_{k=0}^{r} t_k \; z^k \sum_{j=m}^{m+r} s_j \; z^j$$

alors, si n est un entier au plus égal à r , $u_{p_m,n}$ est le coefficient de z^{p_m+n} dans $\Pi_{p_m,r}$, et l'égalité de Parseval entraîne

$$\sum_{n=0}^{r} |u_{p_{m,n}}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{k=0}^{r} t_k \; e^{ik\theta} \sum_{j=p_m}^{p_m+r} s_j \; e^{ij\theta}|^2 \, d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \, (\sum_{k=0}^{r} |t_k|)^2 \int_0^{2\pi} | \sum_{j=p_m}^{p_m+r} s_j \; e^{ij\theta}|^2 \, d\theta ;$$

en posant $T = \sum_{n=0}^{+\infty} |t_n|$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{p} |u_{p_m,n}|^2 \leq T^2 \sum_{j=p_m}^{p_m+r} |s_j|^2 ,$$

d'où l'on d duit

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |u_{p_m,n}|^2 \leq T^2 \sum_{m=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} |s_{p_m+j}|^2 .$$

On pose alors

$$\delta_i = \sup_{j\geq i} \sum_{h=j}^{2j-1} |s_h|^2$$

et la condition (4.1) entraîne $\sum_{i=0}^{r} \delta_i = o\,(r^{1-\alpha})$; en appliquant le lemme 4.1 à la suite $(|s_h|^2)$, on obtient

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |u_{p_m,n}|^2 \leq 4T^2 \sum_{i=0}^{r} \delta_i = o(r^{1-\alpha}) . \tag{4.8}$$

De même, en appliquant l'égalité de Parseval au polynôme φ_{mnr}

$$\varphi_{m,r} = \sum_{k=0}^{r} s_k\, z^k \sum_{j=m}^{m+r} t_j\, z^j ,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{r} |v_{p_m,n}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{k=0}^{r} s_k\, e^{ik\theta} \sum_{j=p_m}^{p_m+r} t_j\, e^{ij\theta}|^2\, d\theta$$

$$\leq \sum_{k=0}^{r} |s_k|^2 \sum_{j=p_m}^{p_m+r} |t_j|^2 ,$$

d'où grâce à l'égalité (4.7),

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |v_{p_m,n}|^2 \leq \sum_{m=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} |t_{p_m+j}|^2 \times o(r^{1-\alpha}) .$$

On pose ici

$$\delta_i = \sup_{j\geq i} \sum_{h=j}^{2j-1} |t_h|^2 \leq \sup_{j\geq i} (\sum_{h=j}^{2j-1} |t_h|)^2 .$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{r} \delta_i = o(r^{1-\beta}) ,$$

et finalement, grâce au lemme 4.1,

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |v_{p_m,n}|^2 = o(r^{2-\alpha-\beta}) . \tag{4.9}$$

L'égalité (4.6) entraînant

$$|x_{m,n}|^2 \leq 2(|u_{m,n}|^2 + |v_{m,n}|^2) \tag{4.10}$$

on aura

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |x_{p_m,n}|^2 = o(r^{2-\alpha-\beta}) ;$$

pour r assez grand, cette quantité est inférieure à $r+1$ qui est l'ordre de la matrice A_r , et l'on a donc $|\det A(P_r)| < 1$, $\forall\, P_r \in \mathcal{P}_r$; la fonction f est une fraction rationnelle.

On déduit de ce critère le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. - Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_h$ des nombres réels vérifiant $|\theta_i| > 1$ pour $i = 1, 2, \dots, h$. On suppose qu'il existe des polynômes à coefficients réels $L_1, \dots, L_h$ et une suite (a_n) d'entiers rationnels tels que

$$\sum_{i=1}^{h} L_i(n)\, \theta_i^n = a_n + o(n^{-1/2}) \,, \tag{4.11}$$

alors la fonction f, définie au voisinage de l'origine par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \,,$$

est une fraction rationnelle, et les nombres $\theta_1, \dots, \theta_h$ sont entiers algébriques.

Démonstration. - On pose h, pour $n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}$, $a_n = \sum_{i=1}^{h} L_i(n)\, \theta_i^n + \mu_n$ d'où $\mu_n = O(n^{-1/2})$. On a alors $f(z) = \nu(z)/V(z) + \mu(z)$ avec

$$\frac{\nu(z)}{V(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^{h} L_i(n)\, \theta_i^n\right] z^n$$

et $\mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$.

Les hypothèses du théorèmes 4.1 sont vérifiées avec $s(z) = \nu(z) + \mu(z)\, V(z)$; $t(z) = V(z)$. On a alors $\sum_{m=n} |s_m|^2 = O(1)$.

On prend donc $\alpha = 0$, comme t est un polynôme, β peut être choisi quelconque, les conditions d'application du théorème 4.1 imposent $\beta = 1$. Le théorème 4.3 est un cas particulier où $h = 1$.

THÉORÈME 4.3. - Un réel θ supérieur à 1 appartient à S si, et seulement si, il existe un réel λ non nul tel que l'on ait

$$\|\lambda\, \theta^n\| = o(n^{-1/2}) \,. \tag{4.12}$$

5. Caractérisation de S par une condition asymptotique sur $\|\lambda\, \theta^n\|$. Détermination d'une constante effective.

L'intérêt du théorème 5.1 tient dans le fait que la condition asymptotique se traduit par une inégalité faisant intervenir une constante effective ; il se déduit du critère algébrique, le critère analytique ne s'appliquant pas dans ce cas.

THÉORÈME 5.1. - Soit θ un réel supérieur à 1 ; θ appartient à S si, et seulement si, il existe deux réels λ et a vérifiant respectivement $\lambda > 0$ et $a < 1/(2(1+\theta)^2)$ tels que l'on ait

$$\|\lambda\, \theta^u\| < \frac{a}{\sqrt{n}} \quad \text{pour} \quad n \geq n_0 \,. \tag{5.1}$$

Démonstration. - En remplaçant λ par $\lambda\, \theta^{n_0}$, et n par $n - n_0$, on peut supposer que l'inégalité (5.1) a lieu pour $n \geq 0$, soit

$$|\epsilon_n| < \frac{a}{\sqrt{nm_0}} \qquad \text{pour} \quad n \geq 0 \,.$$

On pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{\lambda}{1 - \theta z} + \varepsilon(z) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n .$$

On conserve les notations du théorème 4.1. Soit $s(z) = \lambda + (1 - \theta z)\,\varepsilon(z)$; $t(z) = 1 - \theta z$ et

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n \quad \text{où} \quad \begin{cases} s_0 = \lambda + \varepsilon_0 \\ s_n = \varepsilon_n - \theta\, \varepsilon_{n-1} \end{cases}$$

$$t(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n \quad \text{où} \quad \begin{cases} t_0 = 1 \quad t_1 = -\theta \\ t_n = 0 \quad \text{pour} \quad n > 2 . \end{cases}$$

Les coefficients $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$ s'expriment alors sous la forme

$$u_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} t_i\, s_{m+n-i} = s_{m+n} - \theta\, s_{m+n-1}$$

$$v_{m,n} = - \sum_{i=0}^{n-1} s_i\, t_{m+n-i} .$$

On en déduit les égalités

$$v_{m,n} = 0 \quad (m \geqslant 1) , \quad v_{0,n} = - s_{n-1}\,\theta \quad (n \geqslant 1) , \quad v_{0,0} = 0 ,$$

et, en supposant $n_0 > 2$, les majorations

$$|s_n| < \frac{a(1 + \theta)}{\sqrt{n + n_0 - 1}} , \quad \forall\, n \geqslant 0$$

$$|u_{m,n}| \leqslant \frac{a(1 + \theta)^2}{\sqrt{m + n + n_0 - 2}} , \quad \forall\, (m , n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$|v_{0,n}| < \frac{a\,\theta(1 + \theta)}{\sqrt{n + n_0 - 2}} , \quad \forall\, n \geqslant 0 .$$

On obtient alors, en majorant

$$\sum_{n=0}^{r} \sum_{m=0}^{r} |v_{p_{m,n}}|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{r} \sum_{m=0}^{r} |u_{p_{m,n}}|^2 ,$$

les inégalités

$$\sum_{n=0}^{r} \sum_{m=0}^{r} |v_{p_{m,n}}|^2 = \sum_{n=0}^{r} v_{0,n}^2 \leqslant a^2\, \theta^2 (1 + \theta)^2 \sum_{n=0}^{r} \frac{1}{n + n_0 - 2} ,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{r} \sum_{m=0}^{r} v_{p_{m,n}}^2 = O(\log r)$$

et

$$\sum_{n=0}^{r} u_{p_{m,n}}^2 \leqslant (1 + \theta)^2 \sum_{m=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} s_{p_m+j}^2 .$$

Compte tenu de la majoration

$$\sum_{h=j}^{2j-1} s_h^2 \leqslant \frac{a^2 j (1 + \theta)^2}{j + n_0 - 1} < a^2 (1 + \theta)^2 ,$$

on peut appliquer le lemme 4.1 à la suite (s_h^2) ; on a donc

$$\sum_{i=0}^{r} \delta_i \leqslant (r + 1)\, a^2(1 + \theta)^2$$

soit finalement

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} u^2_{p_{m,n}} \leqslant 4\, a^2(1 + \theta)^4(r + 1)\ .$$

Le déterminant de la matrice $A(P_r)$ vérifie donc

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x^2_{p_{m,n}} \leqslant 4\, a^2\, r(1 + \theta)^4 + O(\log r)$$

et, si la constante a satisfait à $a < 1/(2(1 + \theta)^2)$, on a, à partir d'un certain rang, $|\det A(P_r)| < 1$.

Ainsi, la condition $\sum_{n=a}^{+\infty} \|\lambda\, \theta^n\|^2 < +\infty$, qui n'avait pas été améliorée depuis 1938, peut être remplacée par l'une ou l'autre des conditions

(3.12) $$\|\lambda\, \theta^n\| = o(1/\sqrt{n})$$

ou

(5.1) $$\|\lambda\, \theta^n\| < \frac{a}{\sqrt{n}} \quad (n \geq n_0)$$

avec $a < 1/(2(1 + \theta)^2)$.

Cette dernière condition doit être rapprochée de l'ensemble des conditions

(3.18) $$\begin{cases} \|\lambda\| \leqslant \epsilon \\ \|\lambda\, \theta^n\| \leqslant \epsilon\, n^{-\alpha} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

avec

(3.19) $$\epsilon = \frac{(1 - 2\alpha)^{1-\alpha}}{2e(\theta + 1)^2\ (2 + (\log \lambda)^{1-\alpha}}$$

qui caractérisent S si $0 < \alpha < 1/2$, et $S \cup T$ si $\alpha = 0$.

En effet la condition (5.1) constitue également une réponse à la question de PISOT et SALEM, puisqu'elle exprime une condition asymptotique faisant intervenir une constante effective.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CANTOR (David G.). - On power series with only finitely many coefficients mod 1 : Solution of a problem of Pisot and Salem, Acta Arithm., Warszawa, t. 34, 1977, p. 43-55.

[2] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa, 2e série, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[3] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 153-160.

[4] PISOT (Charles) and SALEM (Raphael). - Distribute on modulo 1 of the powers of real numbers larger than 1 , Comp. Math., Groningen, t. 16, 1964, p. 164-168.