BRUNO POIZAT

C'est beau et chaud

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. n° 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A7_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 7, 11 p.

C'EST BEAU ET CHAUD (*)

par Bruno POIZAT (**)
[Université Pierre et Marie Curie]

Comme son titre l'indique, cet exposé est consacré au problème de classification des corps différentiellement clos : on cherche à les trouver tous.

Et puisque j'ai devant moi un public choisi de logiciens, je vous épargne un laius sur la si importante contribution de la théorie des modèles aux mathématiques de notre temps qu'à été l'invention des corps différentiellement clos ; j'annonce directement la couleur en vous donnant la liste des choses acquises sur ce sujet :

1° La théorie T des corps différentiellement clos de caractéristique nulle est complète et élimine les quanteurs (d'autres disent "quantificateurs") ; il y a par conséquent une version différentielle du "Théorème des zéros".

2° T est totalement transcendante, de rang de Morley égal à oméga ; en conséquence, tout corps différentiel K de caractéristique nulle admet une clôture différentielle, uniquement déterminée à K-isomorphisme près.

3° T n'a pas la propriété de recouvrement fini, de Keisler.

4° Elle élimine les imaginaires de Shelah ; une fois qu'on l'a remarqué, on comprend mieux la théorie de Galois mise au point par KOLCHIN pour les équations différentielles dont la solution générale se laisse paramétrer par des constantes.

5° Si K est un corps de constante, sa clôture différentielle n'est pas minimale, c'est-à-dire admet des K-plongements non surjectifs dans elle-même.

6° T a la "dope" (dimensional order property), de Shelah ; en conséquence, pour tout cardinal lambda non dénombrable, elle a deux-puissance-lambda modèles non isomorphes de ce cardinal.

Et j'ajoute deux choses qui font problème :

7° Des problèmes sur les rangs des types : peut-on caractériser algébriquement le RU ? a-t'on toujours RU = RM ? est-il exact que l'équation différentielle générale d'ordre n corresponde à un type de RU = 1 ?

(*) Contrepèterie belge.

(**) Texte d'une conférence donnée à l'Université de Gand, le 24 novembre 1982.

Bruno POIZAT, Mathématiques, UER 47, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

8° Combien T a-t'elle de modèles dénombrables ? Tout ce qu'on sait, c'est que ce nombre est compris entre oméga et deux-puissance-oméga. Le problème se résume à peu de choses près à ceci : Combien peut-on trouver de types réguliers (l'expression est de SHELAH, pas de MAC ORLAN), deux-à-deux orthogonaux, et dont la suite de Morley au-dessus de leur ensemble de définition n'est pas atomique ?

A. Description des types.

Tous les corps seront par convention commutatifs et de caractéristique nulle ; un corps différentiel K est un corps muni d'une dérivation, c'est-à-dire d'une application additive de K dans K d telle que $d(xy) = xdy + ydx$; on note a' pour da, a'' pour $d(da)$, etc. Les constantes de K sont les éléments de K de dérivé nul ; ils forment un sous-corps de K.

L'anneau $K[X]_d$ des polynômes différentiels en une variable X et à coefficients dans K est l'anneau des polynômes à coefficients dans K en une infinité dénombrable de variables, qu'on note $X, X', \ldots, X^{(n)}, \ldots$, muni de la dérivation prolongeant celle de K, et telle que la dérivée de $X^{(n)}$ soit $X^{(n+1)}$; par conséquent,

$$P' = \sum X^{(n+1)} \partial P/\partial X^{(n)} + P^* ,$$

où P^* est le polynôme obtenu en dérivant les coefficients de P. L'ordre d'un polynôme différentiel qui n'est pas dans K (on n'ose dire "polynôme non constant" !) est l'indice de la plus haute dérivée de l'inconnue qui y apparaît : un polynôme d'ordre zéro est polynôme en X seulement, un polynôme du premier ordre est en X, X', un polynôme du second ordre en X, X', X'', etc. ; on convient que 0 est d'ordre ω, et qu'un élément non nul de K est d'ordre -1.

Si a est un élément d'un corps différentiel extension de K, les éléments de $K[X]_d$ qui sont annullés par a forment un idéal $I_{a/K}$ qui est différentiel (i. e. clos pour la dérivation des polynômes) et premier ; comme $I_{a/K}$ est ce qui détermine, à K-isomorphe près, le corps différentiel $K(a)_d$ engendré par K et a, on l'appelle type de a sur K ; tout idéal différentiel premier est un type.

Un idéal différentiel premier p de $K[X]_d$ est déterminé par la donnée de son polynôme minimal P, qui est irréductible ; et réciproquement, à tout polynôme P irréductible, est associé un idéal différentiel premier $I(P, K)$ dont P est le polynôme minimal. L'ordre du polynôme minimal de p est appelé rang de dimension de p ; p ne contient pas de polynôme d'ordre strictement inférieur à $RD(p)$, et plus précisément c'est le seul idéal différentiel premier contenant son polynôme minimal P et qui ne contienne pas de polynômes d'ordre inférieur ; si $p = I_{a/K}$, $RD(p)$ est aussi le degré de transcendance du corps (ordinaire) $K(a)_d$ au-dessus de K ; cela marche, même si a est "différentiellement transcendant" sur K, i. e. si $p = 0$, car par convention $RD(0) = \omega$.

On trouvera le détail et les preuves de ce que j'avance ici dans [P1], et aussi dans d'autres excellents ouvrages consacrés à ces questions.

Que deviennent les types lorsqu'on étend K en un corps différentiel L ? Un type q sur L est dit fils, ou encore extension du type p sur K si $p = q \cap K[X]_d$; si P_1 est un facteur irréductible dans $L[X]_d$ du polynôme minimal P de p, on vérifie que $I(P_1 , L)$ est bien un fils de $I(P , K)$; par conséquent tout type a des fils, et même des fils de même RD ; ceux-là sont appelés fils non déviants de p ; si K est algébriquement clos, un polynôme irréductible sur K le reste sur toute extension L de K, et p n'a qu'un seul fils non déviant (on dit d'un tel type qu'il est stationnaire) ; et dans tous les cas, p ne peut avoir qu'un nombre fini de fils non déviants, correspondant aux facteurs irréductibles de P. Les autres fils de p, ceux dont le RD est strictement inférieur à celui de leur père, en sont naturellement les fils déviants.

Un corps différentiel K est dit différentiellement clos si tout système $P(X) = 0 \wedge Q(X) \neq 0$, où P et Q sont dans $K[X]_d$, Q étant d'ordre strictement inférieur à celui de P, a une solution dans K ; il n'est pas plus général de mettre plusieurs inéquations $Q_s(X) \neq 0 \wedge \ldots \wedge Q_s(x) \neq 0$: remplacer les Q_i par leur produit. On voit que les corps différentiellement clos sont les modèles d'une théorie T, obtenue en quantifiant universellement les coefficients de P et de Q dans la formule

$$(\exists\, x) \quad P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0 :$$

il faut un axiome par ordres et par degrés totaux possibles pour P et Q. Un corps différentiellement clos est algébriquement clos en particulier.

Et une fois qu'on a décrit les idéaux différentiels premiers comme nous l'avons fait, il est facile de voir que tout corps différentiel se plonge dans un corps différentiellement clos, et que la théorie T de ces corps est complète, avec élimination des quanteurs : c'est la modèle-complétion de la théorie des corps différentiels (de caractéristique nulle).

Et comme il y a élimination des quanteurs, les types au sens de T sont bien ce que nous avons appelé "types" jusqu'à présent, c'est-à-dire les idéaux : l'espace $S_1(K)$ est donc l'ensemble des idéaux premiers de $K[X]_d$, muni de la "topologie constructible" différentielle, obtenue en décrétant que les ensembles de la forme $\langle P = 0 \rangle = \{p \; ; \; P \in p\}$ sont à la fois ouverts et fermés (et pas seulement fermés comme pour la "topologie de Zariski" différentielle). Si on veut parler de types en plusieurs variables, il faut faire exactement la même chose en considérant cette fois des polynômes différentiels ayant le nombre de variables correspondant : mais, comme il est général en théorie des modèles, la description des types en une variable est suffisante pour ce que nous faisons ici.

Et comme la condition $\langle P = 0 \rangle$, où P est irréductible, isole le type $I(P , K)$

des types de même RD , on voit que RD est un majorant du rang de Morley RM , si bien que la théorie T est totalement transcendante ; on voit aussi que RD est une notion de rang au sens de LASCAR, si bien que ce que nous avons appelé fils déviant correspond bien à la notion générale de déviation définie dans le cadre des théories stables. Et de l'existence et unicité du modèle premier pour une théorie totalement transcendante, on en déduit qu'à tout corps différentiel K est associée une <u>clôture différentielle</u> K , qui est une extension différentiellement close de K , et qui est uniquement déterminée à K-isomorphie près par la condition suivante : tout plongement de K dans un corps différentiellement clos L se prolonge en un plongement de K dans L .

B. Premières applications.

Une théorie qui n'a pas la propriété de recouvrement fini, de Keisler, c'est une théorie T qui satisfait un renforcement du théorème de compacité : à toute formule $f(x , \bar{y})$ est associé un entier n , tel que, pour toute suite $\bar{a}_i$ de paramètres extraits d'un modèle M de T , l'ensemble ... , $f(x , \bar{a}_i)$, ... est consistant dès que ses parties à n éléments le sont ; cette propriété est étudiée intensivement dans [P3], où on montre qu'elle est caractérisée par un critère modèle-théorique agréable.

Une <u>paire</u> de modèles de T est la structure formée d'un modèle M de T et d'une de ses extensions élémentaires N , dans le langage de T augmenté d'un prédicat unaire désignant M ; et la paire est <u>belle</u> si M est $|T|^+$-saturé, et si, pour tout $\bar{a}$ de N , tout type, au sens de T , sur $M \cup \{\bar{a}\}$ est réalisé dans N . Eh bien, T n'a pas la p. r. f. si, et seulement si, elle est stable, et si tout modèle assez saturé de la théorie des belles paires est une belle paire.

Dans le cas des corps différentiellement clos, on considère un polynôme différentiel $P(x , y_1 , \dots , y_s)$ d'ordre n en x , et un polynôme différentiel $Q(x , y_1 , \dots , y_s , z_1 , \dots , z_t)$ d'ordre en x strictement inférieur à celui de P , ainsi que l'axiome qui déclare que "Pour tous $y_1 , \dots , y_s$, si P est bien d'ordre n en x , il existe x qui annulle P , et qui n'annulle aucun des $Q(x , y_1 , \dots , y_s , z_1 , \dots , z_t)$, sauf ceux qui sont identiquement nuls, où $z_1 , \dots , z_t$ parcourent M ". Il est clair qu'une belle paire satisfait tous ces axiomes, et qu'un modèle ω_1-saturé de ces axiomes est une belle paire.

Un autre petit amuse-gueule, qui repose comme le précédent sur la simplicité de la description des types : Comme vient de le remarquer Angus MACINTYRE, tout corps différentiellement clos resplandant est saturé.

Rappelons qu'un modèle M est dit <u>resplandant</u> si tout énoncé $f(a_1,\dots,a_n , R_1,\dots,R_m)$ comprenant, en plus des symboles du langage de M , des éléments $a_1 , \dots , a_n$ de M , et de nouveaux prédicats $R_1 , \dots , R_m$, qui est consistant avec la théorie de M , est réalisable sur M .

On sait qu'un modèle M d'une théorie T totalement transcendante est saturé s'il a la propriété suivante : Etant donné un ensemble fini $\bar{a}$ dans M , et un type sur $\bar{a}$, que l'on peut supposer stationnaire, p a dans M une "suite de Morley" de même cardinal que M . Traduit en termes de corps différentiels, cela donne la chose suivante : Etant donnés $a_1 , \dots , a_n$, et un polynôme $P(x , a_1 , \dots , a_n)$ d'ordre N en x , il existe une bijection f de M sur une de ses parties A , telle que tout a de A annulle P , et n'annulle aucun polynôme d'ordre inférieur à N à coefficients dans $\{a_1 , \dots , a_n\} \cup A - \{a\}$; comment imposer cela par la satisfaction d'un énoncé ? Pour A et f , pas de problème, et pour les polynômes, on introduit un fragment fini de l'arithmétique, avec un prédicat de satisfaction des équations, suffisant pour imposer aux polynômes d'ordre standard et de degré total standard d'être des vrais polynômes, et à la satisfaction des équations correspondantes d'être la vraie satisfaction.

Il semble d'ailleurs que ce résultat ait une portée générale pour une théorie T totalement transcendante normalement constituée : la seule chose qu'on a utilisée, c'est le caractère récursif d'une liste de formules à omettre pour qu'on ait la suite de Morley d'un type p donné ; et il serait assez étonnant qu'une notion de récursivité intervînt dans un contexte non arithmétique où il n'est question que de théories totalement transcendantes ; on ne doit cependant pas être trop péremptoire, car on imagine fort bien un récursiviste suffisament pervers pour construire une structure totalement transcendante, dénombrable, récursivement saturée et non saturée.

Quand à l'élimination des imaginaires, je n'entre pas dans les détails, et je renvoie à [P4] ; disons seulement que la construction T^{eq} de Shelah, qui consiste à ajouter aux modèles de T des éléments imaginaires, de manière à pourvoir chaque formule à paramètres dans ce modèle, ainsi que chaque type sur ce modèle, d'un ensemble de définition minimum est inutile dans le cas des corps différentiellement clos : les imaginaires sont tous déjà là, et il est inutile de les ajouter. Il est d'ailleurs évident qu'un type en une seule variable a un plus petit corps différentiel de définition : c'est celui qui est engendré par les coefficients de son polynôme minimal, une fois celui-ci normalisé.

C. Rangs des types ; types réguliers ; orthogonalité.

Le RD nous donne une idée du nombre de degrés de liberté dont on dispose pour réaliser un type, puisqu'il nous a permis de voir que notre théorie T est superstable ; mais pour avoir une idée plus précise de la situation, il nous faut examiner aussi les rangs qui interviennent naturellement en théorie des modèles, à commencer par le plus petit d'entre eux, le rang U de Lascar, qui est défini de la manière suivante : $RU(p) \geq n + 1$ si p a un fils déviant q tel que $RU(q) \geq n$; ce rang U mesure combien de fois un type peut dévier avant d'être réalisé ; comme une déviation se traduit par un abaissement de l'ordre du polynôme minimal, il est clair que $RU(p) \leqslant RD(p)$.

Pour des types qui contiennent une équation linéaire, de la forme

$$X^{(n)} + a_{n-1} X^{(n-1)} + \dots + a_0 X = b ,$$

il y a égalité entre RU et RD ; on sait, en effet, que si K est un corps différentiellement clos contenant les coefficients de cette équation, K contient alors une solution particulière β de l'équation, ainsi qu'un "système fondamental" $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ de solutions de l'équation homogène associée, et que toute solution de l'équation se met sous la forme $x = \beta + c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$; on voit que ajouter x à K revient à lui ajouter n constantes, et que dire que le RD du type de x sur K vaut N , c'est dire qu'il y a N de ces constantes qui sont algébriquement indépendantes sur K ; et ces constantes qui sont algébriquement indépendantes sur K , si on les ajoute l'une après l'autre au corps de base, on fait dévier N fois le type de x . Cela permet au passage de voir que le type différentiellement transcendant, qui a des fils, donc le polynôme minimal est de la forme $X^{(n)} = a$, est de $RU = RD$.

La solution générale d'une équation linéaire se laisse donc entièrement paramétrer par des paramètres constants ; on pourrait penser que cela se produit pour toute équation différentielle, car cela est conforme à l'intuition que nous donne l'analyse à savoir que la solution générale d'une équation d'ordre n dépend de n paramètres constants indépendants ; nous avons l'impression que si un type est d'ordre n , nous pourrons abaisser n fois l'ordre de son équation minimale, et que chacun de ces abaissements ou "quadrature", produira une nouvelle constante, qui doit nécessairement s'ajouter au corps de base.

C'est une impression tout-à-fait erronée ; il est montré dans [P1] que le type d'équation minimale $XX'' - X' = 0$, qu'on peut écrire aussi $X'' = X'/X$, est de $RU = 1$, bien qu'il soit du deuxième ordre ; la raison en est que lorsqu'on intègre $X'' = X'/X$, on obtient $X' = \log(X) + c$, et que le logarithme ne correspond à rien d'exprimable dans notre langage, qu'on ne peut y voir apparaître cette équation du premier ordre ni la constante d'intégration qui y figure ; et on prouve ce fait assez simplement, en montrant que si le type en question avait un fils de rang 1 , les coefficients de son polynôme minimal devraient satisfaire des équations différentielles (pour la dérivée partielle) qui n'ont pas de solutions fractions rationnelles. Et il est conjecturé dans ce même article que l'équation "générale" d'ordre n est associée à un type de $RU = 1$; cela semble très raisonnable car il y a peu de chances qu'un système différentiel puisse avoir des solutions qui soient des fractions rationnelles, et pourtant rien, ou presque, n'a été fait depuis dans cette direction ; à propos des corps différentiels, on est souvent amené à faire des conjectures, dont on est persuadé qu'elles ne peuvent être fausses que pour des équations très particulières, et que pourtant on n'arrive à montrer que dans des cas encore plus particuliers.

La solution d'une équation linéaire équivaut à un uple de constantes ; à l'opposé de cette situation, nous avons la notion d'orthogonalité ; deux éléments a et b sont dits indépendants au-dessus de K si le type de a sur $K(b)_d$ est fils non déviant du type de a sur K ; c'est une relation symétrique entre a et b , car cela signifie que le degré de transcendance de $K(a , b)_d$ sur K est la somme de celui de $K(a)_d$ et de celui de $K(b)_d$. Et deux types p et q sur K sont dits orthogonaux si, pour toute réalisation a de p et toute réalisation b de q , a et b sont indépendants sur K : une réalisation de q ne peut faire dévier p ; si p (ou q !) est stationnaire, cela veut dire que la donnée de p comme type de a , et de q comme type de b , détermine entièrement le type de (a , b) sur K (rappelons que si K est différentiellement clos, où même seulement algébriquement clos, tout type sur K est stationnaire). Cette notion "passe à l'héritage" : si p' est fils non déviant de p , et q' fils non déviant de q , alors p' et q' sont orthogonaux si, et seulement si, p et q le sont ; c'est un fait général pour les théories totalement transcendantes, qui a été montré par LASCAR d'une façon tout-à-fait peu satisfaisante pour l'esprit, car elle ne se généralise pas au cas des théories stables.

Par exemple, si p est différentiellement transcendant et q ne l'est pas, ils sont orthogonaux : le degré de transcendance de $K(a , b)_d/K$ devant être infini, l'équation minimale de a sur $K(b)_d$ ne peut être de degré fini ; on voit aussi que si $RD(p) = 1$ (auquel cas $RU(p) = 1$, car tout type non algébrique peut dévier au moins une fois, en se réalisant), et si $RU(q) = 1$, $RD(q) > 1$, alors p et q sont orthogonaux : en effet, q ne peut dévier qu'en devenant algébrique (d'ordre 0), et dans ce cas le degré de transcendance de $K(a , b)_d/K$ est l'ordre de p .

Considérons maintenant un corps différentiellement clos M ; nous éliminons de la discussion les types réalisés, qui sont aussi les types d'ordre 0 , qui ne peuvent rien faire dévier ; si p et q sont deux types sur M orthogonaux, on peut trouver une extension élémentaire de M qui réalise p et omet q ; en effet, si M(p) désigne la clôture différentielle de $M(a)_d$, où a est une réalisation de p , on sait que tout élément de M(p) a un type sur $M(a)_d$ qui dévie sur M . Et comme l'orthogonalité se conserve par héritage, on peut répéter l'opération, et faire un modèle qui contienne une suite de Morley (i. e. une suite de réalisations indépendantes de p) de longueur λ de p tout en omettant q .

Il semble donc qu'à partir de types orthogonaux on puisse fabriquer différents modèles en jouant sur la longueur d'une suite maximale de réalisations de p indépendantes : si on part d'un modèle, cette "dimension" associée à p sera indépendante de la "dimension" associée à q ; mais pour qu'on ait bien une notion correcte de dimension, il convient que dans une extension de M toutes les suites de Morley maximales de p aient même longueur : cela se produit précisement pour les types réguliers, dont la définition technique est la suivante : ce sont les types dont l'extension non déviante est orthogonale à toute extension déviante ; mais, rassurezvous, nous n'avons pas besoin ici de choses si compliquées, car, d'après LASCAR [L], comme il y a élimination des imaginaires, tout type régulier d'ordre fini est équivalent à un type de RU = 1 , i. e. à un type qui ne dévie qu'en devenant algébrique. Si bien que si N est une extension élémentaire de M , les dimensions associées aux types réguliers sont les suivantes :

- le "degré de transcendance différentiel", qui est la longueur d'une base de transcendance différentielle de N/M , c'est-à-dire une suite maximale de réalisations indépendantes du type de rang ω ; cet invariant de l'extension est bien connu des algébristes.

- pour chaque type p sur M de RU = 1 , le degré de transcendance, au sens ordinaire, du corps (et pas du corps différentiel si RD > 1 !) engendré par M et et les réalisations de p dans N .

On comprend mieux l'importance des types réguliers quand on sait que dans une théorie totalement transcendante, tout type se décompose en types réguliers ; dans notre cas, cela signifie qu'une extension de corps différentiellement clos se décompose en une tour où chacune est la clôture différentielle du c. d. engendré sur le précédent pas un élément de RU 1 ou ω .

Si donc on part d'un corps M différentiellement clos, et qu'on se donne une famille de types réguliers deux-à-deux orthogonaux (chacun est alors orthogonal à l'ensemble des autres : ce n'est pas une faute de raisonnement, mais une conséquence du passage à l'héritage), on fabrique des extensions différentiellement closes de M non isomorphes à M fixé en choisissant de manière arbitraire ces dimensions ; mais pour faire des corps non isomorphes dans l'absolu, il faut partir du corps Q des nombres rationnels c'est-à-dire d'un corps K non différentiellement clos : si p est un type régulier dont le polynôme minimal est à coefficients dans K , sa dimension dans une extension différentiellement close de K n'èst pas tout-à-fait arbitraire, elle l'est seulement à partir d'un seuil, qui est sa dimension dans la clôture différentielle de K . Si donc la dimension de p dans la clôture différentielle de K est un nombre fini n_0 , toutes les dimensions sont possibles à partir de n_0 , et nous dirons que p est un <u>brave type</u>. Sinon, p est un <u>sale type</u>, sa dimension dans le modèle premier est dénombrable, et seulement les dimensions infinies sont possibles ; on conçoit qu'un sale type ne peut guère servir à faire des modèles dénombrables ; et on remarquera que cette notion est assez intrinsèque : si p est un sale type, son héritier sur une extension de type fini de K l'est aussi, car un ensemble fini de paramètres ne peut faire dévier qu'un nombre fini d'éléments d'une suite de Morley.

Comme exemple de braves types, nous avons le différentiellement transcendant, et le type de constante non algébrique (équation minimale : X' = 0) qui nous donnent deux dimensions qu'on peut choisir arbitrairement à partir de $n_0 = 0$.

D. Les choses sérieuses.

En 1973, de manière semble-t'il indépendante, KOLCHIN, ROSENLICHT et SHELAH ont mis en évidence l'existence de sales types ; le premier a montré, par une méthode élémentaire en calculant sur des polynômes, que des solutions distinctes de l'équation $x' = x^3 - x^2$ ne vérifient aucune relation de dépendance algébrique à coefficients constants ; et SHELAH a montré, en prenant un modèle formé de fonctions analytiques dans un certain domaine du plan complexe, qu'il en était de même pour les solutions de l'équation $x'(1 + x) - x = 0$, qui s'écrit encore $x' - x'/x = 0$: sa preuve souffre de certains défauts, comme celui de prendre la valeur d'une fonction en un point où on n'est pas sûr qu'elle soit définie, mais on peut la rendre irréprochable, comme a fait GRAMAIN dans [G].

Cela montre bien que si K est un corps de constantes, le type d'équation minimale $x' = x^3 - x^2$ ou $x'(1 + x) - x = 0$ est un sale type, car dans tout corps différentiellement clos, le système formé d'une de ces équations et d'une inéquation de la forme $(x - a_0) \dots (x - a_n) \neq 0$ a une solution. Par conséquent, dans la clôture différentielle de K, il y a une infinité dénombrable $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de solutions indépendantes de ces équations ; cela prouve que cette clôture différentielle n'est pas minimale : en effet, le type de a_0 sur $K(a_1, \dots, a_n, \dots)_d$ n'est pas isolé, si bien que a_0 ne peut se trouver dans la clôture différentielle de ce dernier.

La méthode de ROSENLICHT est beaucoup moins artisanale, puisqu'elle permet de montrer que tout type dont l'équation minimale est de la forme $x' = f(x)$, où $f(x)$ est une fraction rationnelle en x à coefficients constants, et qui est orthogonal aux constantes, est un sale type. Son résultat technique est le suivant ; L'équation s'écrit $1 = x' \partial v/\partial x + x' g(x)$, où $\partial v/\partial x$ est une dérivée exacte (la dérivée d'une fraction rationnelle) et où $g(x)$ est une somme de dérivée logarithmique ; si a et b sont des solutions transcendantes de cette équation au-dessus de K, qui sont algébriquement liées au-dessus de K, et si $K(a , b)_d$ ne contient pas de constantes transcendantes sur K (hypothèse qui est toujours vraie si le type en question est orthogonal aux constantes), alors $v(a) = v(b) + Cte$; et dans le cas d'orthogonalité aux constantes, on a en fait $v(a) = v(b)$: cela montre qu'une liaison algébrique à coefficients constants entre solutions de cette équation ne peut être que très particulière, d'où la saleté du type en question.

La preuve de ROSENLICHT fonctionne ainsi : il linéarise le problème, en passant dans le module des K-différentielles de Kähler du corps $K(a , b)_d$; une liaison algébrique entre éléments du corps se traduit par une liaison linéaire entre leurs différentielles ; il fait apparaître une certaine quantité bien choisie dont il montre que c'est une constante (l'analogue d'une constante d'intégration !) ; comme cette constante ne peut, par hypothèse, qu'être algébrique sur K, sa différentielle est nulle, et il conclut ; on trouvera dans l'exposé de GRAMAIN une preuve de tout cela, simplifiée par BRESTOVSKI.

Venons-en maintenant à la "dope", qui est le dernier sujet de conversation des théoriciens des modèles : je ne vous explique pas ce que c'est dans un cadre général, mais je vous montre seulement comment, dans le cas des corps différentiels, qui ont une "dope" particulièrement simple, elle permet de construire beaucoup de modèles non dénombrables. Tout cela est une invention de SHELAH qui, dans une conclusion inspirée de son article de 1973, proclame l'orthogonalité d'une vaste famille d'équations (cela est probablement exact, mais on ne voit pas comment le démontrer avec une méthode de fonctions analytiques, comme dans l'article) et en déduit, comme une chose allant de soi, que pour tout λ non dénombrable il y a 2^λ corps différentiellement clos de cardinal deux-à-deux non isomorphes !

Pour une démonstration à l'usage des simples mortels, nous pouvons procéder ainsi : comme il est montré dans [G], la méthode de ROSENLICHT permet de voir l'orthogonalité des types associés respectivement aux équations

$$E(c_1)\ x' = c_1\ x/1 + x \quad \text{et} \quad E(c_2)\ x' = c_2\ x/1 + x\ ,$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes distinctes non nulles (car dans le résultat technique, on n'a pas besoin que a et b soient solutions d'exactement la même équation) ; considérons donc une relation binaire R , définie sur un ensemble de cardinal λ , et un corps de constantes algébriquement clos, de cardinal λ , dont nous notons une base de transcendance .... , c_i , ... , $i < \lambda$; à partir de ce corps C nous fabriquons un corps différentiellement clos K_R , où les équations $E(c_i)$, $E(c_i + 1)$, ainsi que $E(c_i + 2c_j)$, si le couple $(i\ ,\ j)$ est dans R , ont ω_1 solutions dans K , tandis que toutes les autres équations $E(c)$, où c parcourt le corps C qui est aussi celui des constantes de K_R , n'ont que ω solutions : cela est possible grâce aux orthogonalités.

Et il est clair qu'à partir de K_R on retrouve les c_i , puis R ; il y a donc au moins autant de corps différentiellement clos de cardinal λ que de relations binaires, considérées à isomorphie près, soit 2^λ .

Pour ce qui est du cas dénombrable, vous pourriez sans problème faire beaucoup de modèles si vous disposez d'un stock suffisant de types deux-à-deux orthogonaux, à condition que ce soient des braves types. A l'inverse, vous pouvez conjecturer que les seuls braves types sont ceux que vous connaissez déjà ; il est expliqué dans [L] comment cette conjecture équivaut à la suivante : Deux corps différentiellement clos dénombrables sont isomorphes dès qu'ils ont même degré de transcendance différentielle, et que leurs corps de constantes ont même degré de transcendance ; LASCAR attribue cette conjecture à POIZAT, ce qui laisse penser qu'il n'y croit pas, et qu'il se réjouit à l'évocation de l'air idiot qu'aura bientôt POIZAT pour avoir risqué une hypothèse aussi hardie.

C'est dans cette optique qu'il faut apprécier le très beau travail de BRESTOVSKI [B], qui considère une famille d'équations dans le genre de $X'' = X'/X$; il remarque d'abord que toute ces équations du second ordre définissent un type de RU 1 ; et ensuite que ce sont de sales types, qu'une liaison algébrique à coefficients constants entre leurs réalisations ne peut être que très particulière ; la méthode est celle de ROSENLICHT (trouver une quantité constante, et utiliser le fait que sa différentielle est nulle), mais il doit travailler dans la deuxième puissance extérieure du module des différentielles, qui, comme l'équation est du deuxième ordre, est de dimension 2 et non plus 1 comme dans le cas de ROSENLICHT ; et BRESTOVSKI doit maîtriser une situation bien plus complexe que celle de ROSENLICHT. Naturellement, on est encore loin de la solution générale de la conjecture, dans un sens ou dans l'autre ; on ne sait même pas si elle est vraie pour toutes les équations du premier ordre à coefficients constants, et les seuls cas traités d'équations d'ordre supérieur au premier sont ceux de BRESTOVSKI ; par ailleurs, toutes les démonstrations utilisent de manière plus ou moins subtile un même phénomène : un mélange de différentielles exactes et de différentielles logarithmiques. Le travail de BRESTOVSKI laisse malgré tout penser que la conjecture n'est pas inabordable <u>au moins pour les équations à coefficients constants</u> ; mais même dans ce cas, ce n'est pas un problème très simple, et il n'est pas certain qu'il sera résolu par un théoricien des modèles.

RÉFÉRENCES

[B] BRESTOVSKI (M.). - Déviation et indépendance algébrique de solutions génériques d'équations différentielles du second ordre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 294, 1982, série 1, p. 609-612, et Thèse 3e cycle, 1982, Université Paris-6.

[G] GRAMAIN (F.). - Non-minimalité de la clôture différentielle, I : la preuve de Shelah ; II : la preuve de Rosenlicht, Théories stables, 3e année, 1980-1982, n° 4 et 5, 9 p. et 7 p.

[L] LASCAR (D.). - Les corps différentiellement clos dénombrables, Théories stables, 3e année, 1980-1982, n° 6, 9 p.

[P1] POIZAT (B.). - Rangs des types dans les corps différentiellement clos, Théories stables, 1re année, 1978/79, n° 6, 13 p.

[P2] POIZAT (B.). - Les équations différentielles vues par un logicien, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles (Vaillant), 1979/80, 5 p. (Publications mathématiques de l'Université P. et M. Curie, 30).

[P3] POIZAT (B.). - Paires de structures stables, J. of symb. Logic (à paraître).

[P4] POIZAT (B.). - Une théorie de Galois imaginaire, J. of symb. Logic (à paraître).
