GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

DANIEL LASCAR

Les corps différentiellement clos dénombrables

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A6_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 6, 9 p.

LES CORPS DIFFÉRENTIELLEMENT CLOS DÉNOMBRABLES

par Daniel LASCAR (*)
[Université Paris-7]

1. - On sait (voir [Sa] par exemple) que la théorie des corps différentiellement clos (c. d. c. par la suite) est complète, admet l'élimination des quantificateurs, et est ω-stable. La puissante théorie de la stabilité s'applique donc, et on a ainsi pu montrer des théorèmes comme l'existence et l'unicité des clôtures différentielles. Mais on a maintenant, en théorie des modèles, des résultats beaucoup plus impressionnants : ils nous permettent de reconnaître quand les modèles d'une théorie sont classifiables, et lorsqu'ils le sont, ils nous disent comment s'y prendre.

Pour ce qui est des modèles non dénombrables, la question est réglée [Sh] : La théorie des c. d. c. a la "dimentional order property", et il y a beaucoup trop de modèles pour qu'on puisse espérer les classifier. Mais on sait fort peu de choses sur les c. d. c. dénombrables, et on peut encore faire beaucoup de conjectures. Le but de cet article est de commenter la plus extravagante d'entre elles. Mais avant de l'aborder, nous allons succintement présenter toute la machinerie nécessaire, avec son mode d'emploi dans le cas particulier des c. d. c.

Par convention, la caractéristique de tous les corps dont on parlera sera zéro : Les corps différentiels (c. d.) seront représentés par des lettres k , k' , tandis que les majuscules K , K' seront réservées aux c. d. c. ; $k(a)$ sera le corps différentiel engendré par k et a . On utilisera librement les résultats et notations de [P].

2. - Soient k un c. d., et $p \in S_1(k)$. L'ensemble des polynômes différentiels $f \in k\{X\}$ tels que "$f(x) = 0$" $\in p$ est un idéal premier que nous noterons $I(p)$. L'application $p \longmapsto I(p)$ est une application bijective de p dans l'ensemble des idéaux premiers de $k\{X\}$. Le type p , tel que $I(p) = \{0\}$, sera appelé le type générique sur k , et noté $g(k)$. Son rang de Morley est égal à son rang U et est égal à ω .

Si $I(p)$ n'est pas $\{0\}$, on notera $f(p)$ un polynôme irréductible d'ordre minimal qui lui appartient ; $f(p)$ est défini à multiplication par un élément non nul de k près. L'ordre de p est, par définition, l'ordre de $f(p)$, et noté $RD(p)$.

(*) Daniel LASCAR, Ch. Rech. CNRS, Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

On conviendra que $RD(g(k)) = \omega$.

L'application qui à p fait correspondre $RD(p)$ est une notion de rang, c'est-à-dire qu'elle nous permet d'interpréter la déviation : si $p \in S_1(k)$ et $k' \subset k$, alors p ne dévie pas sur k' si, et seulement si, $RD(p) = RD(p \upharpoonright k')$. Si $k' \subset k$ et $a \in k'$, on notera $I(a/k)$, $f(a/k)$, etc. pour $I(t(a/k))$, $f(t(a/k))$ etc. Donc si $\bar{b}$ est une suite finie de k' , a et $\bar{b}$ sont k-indépendants si, et seulement si, l'ordre de $f(a/k)$ est le même que celui de $f(a/k(\bar{b}))$.

Il y a un autre type remarquable sur k , c'est le type constant transcendant, celui dont le polynôme minimal est $X' = 0$. On notera par $c(k)$ ce type.

Fixons encore quelques notations : on dira qu'un type p est stationnaire s'il n'a qu'une seule extension non déviante sur toute extension de son domaine de définition. Cela est équivalent au fait que $f(p)$ est absolument irréductible. Si $k \subset k'$ et $p \in S_1(k)$ est stationnaire, on notera $p(k')$ l'extension non déviante de p sur k' , qui est donc caractérisée par le fait que $f(p(k')) = f(p)$. Si $p \in S_1(K)$ (K c. d. c.), K_p désignera le modèle premier au-dessus (i. e. la clôture différentielle) de $K(a)$ où $t(a/K) = p$; K_p est défini à K-isomorphisme près. Mentionnons ici, un théorème classique, mais important : si K' est premier au-dessus de $K(\bar{a})$ ($\bar{a}$ suite finie), et $b \in K' - K$, alors $\bar{a}$ et b ne sont pas K-indépendants.

Enfin supposons que $p \in S_1(k)$ soit stationnaire, alors p admet un plus petit corps de définition : il existe $k_0 \subset k$ tel que p ne dévie pas sur k_0 , $p \upharpoonright k_0$ est stationnaire, et k_0 est inclus dans tout autre corps $k' \subset k_0$ qui possède les mêmes propriétés. En fait, k_0 n'est autre que le c. d. engendré par les coefficients de $f(p)$ supposé normalisé. Par exemple, le plus petit corps de définition de $g(k)$ est $\mathbb{Q}$, et de même pour $c(k)$.

3\. - Soient p et q des 1-types sur K ; on dira que p et q sont orthogonaux si, pour tout a et b , réalisations respectives de p et q , a et b sont K-indépendants. On montre que si p et q sont orthogonaux, il en est de même de leurs extensions non déviantes. On peut alors étendre cette définition à des types p et q stationnaires, définis sur un c. d. k quelconque : p et q seront orthogonaux si, pour tout K c. d. c. contenant k (ou, ce qui revient au même, pour un c. d. c. $K \supset k$), $p(K)$ et $q(K)$ sont orthogonaux.

De ce qui nous avons dit, il est clair que si p , $q \in S_1(K)$ sont orthogonaux, alors p n'est pas réalisé dans K_q . Voici d'autre part une façon de s'apercevoir que deux types sont orthogonaux : pour $f \in k\{X\}$, notons $f[k]$ l'ensemble des éléments de k vérifiant f . Si $K \subset K'$ sont deux c. d. c., $a \in K' - K$, $f \in K\{X\}$ et si on suppose que $f[K] = f[K']$, alors $t(a/K)$ est orthogonal à tout type contenant $f(x) = 0$. Considérons par exemple un point a générique au-dessus de K , et K' le modèle premier au-dessus de $K(a)$. On voit facilement que tous les points de $K' - K$ sont génériques au-dessus de K. La conclusion est que $g(K)$ est orthogonal à tous les autres types.

4. - Passons maintenant à la régularité. La définition de type régulier qui va suivre n'est pas celle qui est habituelle, et je ne suis pas sûr que ce soit exactement la régularité forte.

Définition. - On dit que $p \in S_1(K)$ est régulier si, pour tout $b \in K_p - K$, b satisfaisant $f(p)(b) = 0$, $t(b/K) = p$.

On montre sans peine que si p est régulier ; il en est de même de ses extensions non déviantes, ce qui nous permet, comme pour l'orthogonalité, de définir la régularité pour des types stationnaires : On dit que $p \in S_1(k)$ est régulier si p est stationnaire et si $p(K)$ est régulier pour tout (pour un) c. d. c. $K \supset k$.

On remarque qu'un type $p \in S_1(K)$ est régulier si, et seulement si, il est orthogonal à tout 1-type sur K contenant $f(p)$, et d'ordre inférieur. Comme exemple de types réguliers nous avons déjà le générique et le **type constant.**

Il y a un certain nombre de faits sur les types réguliers qui les rendent importants :

(a) Ils donnent la possibilité de définir une dimension : soient $p \in S_1(k)$, p régulier et $k' \supset k$. Considérons, dans l'ensemble des réalisations de p dans k', un sous-ensemble k-libre maximal. Un tel ensemble existe d'après le lemme de Zorn, et sera appelé une p-base de k'. On montre que si p est régulier, alors deux p-bases de k' ont toujours la même cardinalité, qui sera notée $\mathrm{Dim}(p\ ;\ k')$.

(b) Soit $K \subset K'$. Considérons dans $K' - K$ un point a dont l'ordre sur K est minimum. Il est alors très facile de voir que $t(a/K)$ est régulier ; autrement dit, une extension élémentaire propre de K réalise toujours un type régulier.

(c) Les extensions engendrées par les types réguliers sont minimales : soient $p \in K$; p régulier, et supposons $K \subset K_1 \subset K_p$, $K_1 \neq K$. Alors K_1 est K-isomorphe à K_p.

5. - On montre que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes, si p et q sont des types réguliers sur K :

1° K_p est K-isomorphe à K_q,

2° p est réalisé dans K_q,

3° q est réalisé dans K_p,

4° p et q ne sont pas orthogonaux.

Si les propriétés 1° - 4° sont vérifiées, on dira que p et q sont équivalents. Encore une fois, la relation "être équivalents" passe aux extensions non déviantes ; donc, si $k_1, k_2 \subset K$, $p_1 \in S_1(k_1)$, $p_2 \in S_1(k_2)$, p_1 et p_2 réguliers, on dira que p_1 et p_2 sont équivalents si $p_1(K)$ et $p_2(K)$ le sont. On voit que, dans ce cas, on ne peut augmenter, dans une extension K' de K, une p_1-base sans augmenter une p_2-base, et on comprend donc que $\mathrm{Dim}(p_1 ; K)$ et $\mathrm{Dim}(p_2 ; K)$ doivent être liées. C'est la signification du théorème suivant :

THÉORÈME. - Soient $k_1, k_2 \subset K$, k_1 et k_2 finiment engendrés (en tant que c. d.), $p_1 \in S_1(k_1)$, $p_2 \in S_1(k_2)$ p_1 et p_2 réguliers et équivalents. Si $\mathrm{Dim}(p_1 ; K)$ est finie, il en est de même de $\mathrm{Dim}(p_2 ; K)$. Si $\mathrm{Dim}(p_1 ; K)$ est infinie, alors elle est égale à $\mathrm{Dim}(p_2 ; K)$.

On la réciproque, c'est-à-dire que les dimensions correspondant à des types non équivalents sont à peu près arbitraires : soient $k \subset K$, $p \in S_1(k)$, p régulier, λ un cardinal fini ou infini, et considérons des points a_i, $0 \leq i < \lambda$ indépendants au-dessus de K, et réalisant $p(K)$. Soit K' le modèle premier au-dessus de $K(a_i ; 0 \leq i < \lambda)$. Alors

$$\mathrm{Dim}(p ; K') = \mathrm{Dim}(p ; K) + \lambda ;$$

si $k_1 \subset K$, $q \in S_1(k_1)$ est régulier, alors

$$\mathrm{Dim}(q ; K') = \mathrm{Dim}(q ; K) \quad \text{si } p \text{ est orthogonal à } q,$$

et

$$\mathrm{Dim}(q ; K') = \mathrm{Dim}(q ; K) + \lambda \quad \text{si } p \text{ est équivalent à } q.$$

Un autre lemme technique important est le suivant :

LEMME. - Soient $k \subset K$, $p \in S_1(k)$ régulier, et $\{a_i ; 0 \leq i < \lambda\}$ une p-base de K. Si le point b (qui se trouve dans une extension de K) réalise au-dessus de $k(a_i ; 0 \leq i < \lambda)$ l'extension non déviante de p, alors $t(b/K) = p(K)$.

6. - On a déjà à notre disposition deux types réguliers non équivalents : c'est le générique d'une part et le type constant d'autre part. A un c. d. c. K, on peut déjà associer les deux invariants :

$$I_1(K) = \mathrm{Dim}(c(\underset{\sim}{Q}) ; K) \quad \text{et} \quad I_2(K) = \mathrm{Dim}(g(\underset{\sim}{Q}) ; K).$$

Les dimensions associées au c. d. c. premier (la clôture différentielle de $\underset{\sim}{Q}$) sont toutes deux nulles. Il est alors facile, en utilisant les idées du paragraphe précédent, de construire, pour chacun des cardinaux λ et μ, finis ou infinis, un modèle K avec $I_1(K) = \lambda$ et $I_2(K) = \mu$. ($I_2(K)$ s'appelle degré de transcendance différentiel de K sur $\underset{\sim}{Q}$; $I_1(K)$ est le degré de transcendance de $C(K)$ sur $\underset{\sim}{Q}$.)

Si on ne se restreint pas aux modèles dénombrables, $I_1(K)$ et $I_2(K)$ ne peuvent caractériser à eux seuls le c. d. c. K, ne serait-ce que parce qu'il y a des types réguliers orthogonaux au type constant et au générique ; en fait, les résultats de SHELAH [Sh] auxquels nous avons fait allusion au début montrent que la situation est bien plus catastrophique. Mais pour les modèles dénombrables, on peut encore avancer la conjecture suivante.

CONJECTURE I. - Si K et K' sont dénombrables, $I_1(K) = I_1(K')$ et $I_2(K) = I_2(K')$, alors K est isomorphe à K' .

7. - On convient, qu'à partir de maintenant, tout les corps dont nous parlerons seront dénombrables. On va donner un moyen d'attaquer la conjecture I en montrant son équivalence avec la suivante.

CONJECTURE II.(POIZAT). - Soient $k \subset K$, k finiment engendré, et $p \in S_1(k)$ régulier. Si p est orthogonal à $c(k)$ et à $g(k)$, alors $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K) = \aleph_0$. (Il suffit de vérifier que $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K) = \aleph_0$ lorsque K est la clôture différentielle de k).

Montrons d'abord que la conjecture I implique la conjecture II : Soient donc $p \in S_1(k)$, k finiment engendré, $k \subset K$, et supposons que p est orthogonal à $c(k)$ et à $g(k)$. On a vu au paragraphe 5 que l'on peut trouver $K' \supset K$ avec $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K') = \mathrm{Dim}(p\ ;\ K)$, $I_1(K') = \aleph_0 = I_2(K')$. Il découle alors de la conjecture I que K' est saturé et que $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K') = \aleph_0$ (parce que k est finiment engendré).

Pour la réciproque, on utilisera le lemme suivant :

LEMME. - Soient $p \in S_1(k)$, K la clôture différentielle de k , p régulier, et posons $q = p(K)$. Si $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K) = \aleph_0$, alors K_q est aussi un modèle premier au-dessus de k (donc est k-isomorphe à K).

Preuve. - Soient B une p-base de K , $b \in B$ et $K_1 \subset K$, K_1 premier au-dessus de $k(B - \{b\})$. Il est clair que K_1 est encore atomique au-dessus de k , donc est k-isomorphe à K . D'autre part, puisque B est infini, $t(b/k(B - \{b\})$ n'est pas isolé et n'est donc pas réalisé dans K_1 . Cela montre que $B - \{b\}$ est une p-base de K_1 . Or $t(b/k(B - \{b\})$ est une extension non déviante de p . Il résulte donc de ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 5 que $t(b/K_1) = p(K_1)$. L'isomorphisme qui envoie K sur K_1 envoie donc $q = p(K)$ sur $t(b/K_1) = p(K_1)$ et si $K_2 \subset K$, K_2 premier au-dessus de $K_1(b)$, K_2 est k-isomorphe à K_p . Or K_2 est atomique au-dessus de k , et est donc aussi k-isomorphe à K , ce qui termine la démonstration du lemme.

Pour montrer la conjecture I, à partir de la conjecture II, on va montrer que si B_1 et B_2 sont respectivement des $c(\mathbb{Q})$- et $g(\mathbb{Q})$-bases du c. d. c. K , alors K est premier au-dessus de $\mathbb{Q}(B_1 \cup B_2)$. Soit $K' \subset K$, contenant $\mathbb{Q}(B_1 \cup B_2)$, atomique au-dessus de ce corps, et maximal pour ces propriétés. Un tel modèle existe par le lemme de Zorn, et on va montrer que $K' = K$: supposons le contraire ; il existe alors $a \in K' - K$ dont le type sur K' est régulier ; ce type est orthogonal à $c(K')$, sinon $c(K')$ serait réalisé dans K , et B_1 ne serait pas une $c(\underset{\sim}{Q})$-base. De même, $t(a/K')$ est orthogonal à $g(K')$. On peut trouver $k \subset K'$, finiment engendré tel que $t(a/K')$ soit la seule extension non déviante de $q = t(a/k)$, qui est donc régulier, et en utilisant la conjecture II, $\mathrm{Dim}(q\ ;\ K') = \aleph_0$.

On a dit que k était finiment engendré : il existe donc une suite finie $\bar{c}$ telle que $k = \underset{\sim}{Q}(\bar{c})$, et des sous-ensembles finis $B_1' \subset B_1$ et $B_2' \subset B_2$ tels que $t(\bar{c}/\underset{\sim}{Q}(B_1 \cup B_2))$ ne bifurque pas au-dessus de $\underset{\sim}{Q}(B_1' \cup B_2')$. Posons $k_1 = k(B_1' \cup B_2')$ k_1 est encore finiment engendré, et les ensembles $C_1 = B_1 - B_1'$ et $C_2 = B_2 - B_2'$ sont tous deux libres au-dessus de k_1 ; de plus, les points de C_1 réalisent $c(k_1)$ et ceux de C_2 réalisent $g(k_1)$.

Posons maintenant $q_1 = q(k_1)$. On a toujours que q_1 est orthogonal à $c(k_1)$ et $g(k_1)$, donc $\mathrm{Dim}(q_1\ ;\ K') = \aleph_0$. Par-dessus le marché, à cause de l'othogonalité, une q_1-base de K' reste libre au-dessus de $k_1(C_1 \cup C_2)$, et est même une q_2-base de K' si $q_2 = q(k_2)$ avec $k_2 = k_1(C_1 \cup C_2) = k(B_1 \cup B_2)$. Mais K' a été choisi premier au-dessus de $\underset{\sim}{Q}(B_1 \cup B_2)$, et k_2 est finiment engendré au-dessus de ce corps : il en résulte que K' est premier au-dessus de k_2 , et on peut enfin appliquer le lemme. Remarquons que $t(a/K') = q(K')$, donc si $K_1 \prec K$ est premier au-dessus de $K'(a)$, K_1 et K' sont k_2-isomorphes, ils sont donc aussi $\underset{\sim}{Q}(B_1 \cup B_2)$-isomorphes, et K_1 est atomique au-dessus de $\underset{\sim}{Q}(B_1 \cup B_2)$, contredisant la maximalité de K' .

$\underset{\sim}{8}$. - Même sans y croire complètement, on peut essayer de montrer la conjecture II dans des cas spéciaux, par exemple en supposant une forme très particulière à l'équation $f(p)$. C'est ce qui est fait dans les exposés de F. GRAMAIN dans ce volume. On va ici procéder dans l'autre sens, et montrer qu'il nous suffit en fait de nous occuper des types réguliers dont le rang U est égal à 1 . Eclaircissons d'abord la situation :

LEMME. - *Si* $p \in S_1(K)$ *et* $RU(p) = 1$, *alors* p *est régulier*.

Preuve. - Soient f le polynôme minimal de p , a réalisant p , K_p le modèle premier sur $K(a)$, et $b \in f[K_p] \dot{-} K$. On sait que a et b ne sont pas indépendants, donc $RU(a/K(b)) = 0$, et a est algébrique sur $K(b)$: il en découle que si g est le polynôme minimal de b sur K , l'ordre de g est au moins égal à celui de f . Or $f \in I(b/K)$, et (voir [P]), f et g sont égaux à multiplication par un élément de K près, et $t(b/K) = p$.

Je ne sais pas si la réciproque de ce lemme est vraie. Mais en fait, il suffit de montrer que tout type régulier est équivalent à un type dont le rang U est égal à 1 . C'est ce qu'on va faire dans le lemme suivant, à quelques complications près, nécessaires à la preuve, mais non génantes pour les applications.

LEMME. - <u>Soient</u> $k \subset K$, $p \in S_1(k)$, p <u>régulier non générique</u>, $q = p(K)$, <u>et supposons que</u> $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K) = \aleph_0$. <u>Alors il existe</u> $r \in S_1(K)$, r <u>équivalent à</u> p <u>avec</u> $RU(n) = 1$.

<u>Preuve</u>. - Supposons $RU(p) = n > 1$. On sait que p a des extensions de rang exactement $n - 1$. Soient donc $k_1 \supset k$ et $p_1 \in S_1(k_1)$, p_1 extension de p avec $RU(p_1) = n - 1$. On va faire des constructions dans une grande extension de K que nous ne mentionnerons plus.

Soit $(a_i\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant \omega)$ une suite de Morley de p_1 . Alors $U(a_0/k) = n$, mais pour m assez grand, $U(a_{m+1}/k(a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_m)) = n - 1$. Si m est le plus petit entier pour lequel cette **égalité est** vraie, $\{a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_{m-1}\}$ est un ensemble k-libre de réalisations de p , et puisque $\mathrm{Dim}(p\ ;\ K) = \aleph_0$, on peut en trouver une copie dans K . Autrement dit, quitte à déplacer k_1 par un k-isomorphisme, on peut supposer que $a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_{m-1}$ sont dans K .

La situation est donc la suivante : pour tout i , $0 \leqslant i \leqslant m + 1$, $t(a_i/k_1) = p_1$, le type de a_m au-dessus de $k(a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_{m-1}) = k_2$ est l'extension non déviante de p , et son rang est donc n , et

$$U(a_{m+1}/k_1(a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_m) = U(a_{m+1}/k_1) = U(a_{m+1}/k_2(a_m))$$

$$= U(a_{m+1}/k(a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_m) = n - 1\ .$$

Si donc k_0 est le plus petit corps de définition de $t(a_{m+1}/k_1(a_0, a_1, \ldots, a_m))$, $k_0 \subset k_1$, $k_0 \subset k_2(a_m) = k(a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_m)$; k_0 est finiment engendré, on posera donc $k_0 = \underline{Q}(\bar{c})$, où $\bar{c}$ est une suite finie. D'après les propriétés d'additivité du rang U , on a

$$U((a_m\ ,\ \bar{c})/k_2) = U(a_m/k_2) + U(\bar{c}/k_2(a_m)) = n = U(\bar{c}/k_2) + U(a_m/k_2(\bar{c}))\ .$$

Or $k_0 \subset k_2(c) \subset k_1(a_0\ ,\ \ldots\ ,\ a_{m-1})$, et donc $U(a_m/k_2(\bar{c}) = n - 1$. Il en résulte que $U(\bar{c}/k_2) = 1$, et si c est n'importe quel point de $k_0 \dot{-} k_2$, $U(c/k_2) = 1$. Mais on remarque que c et a_m ne sont pas k_2-indépendants, et on voit alors très facilement qu'il existe une extension non déviante de $t(c/k_2)$ sur K , disons n , non orthogonal à **l'extension non déviante** de $t(a_m/k_2)$ sur K , qui n'est autre que q .

<u>9</u>. - Voyons maintenant comment on peut espérer montrer la conjecture II pour les types dont l'quation minimale est à coefficients constants, et de rang U égal à 1 . Supposons donc avoir un contre-exemple avec un type $p \in S_1(k)$, où k est un sous-corps des constantes de K , finiment engendré, avec $RU(p) = 1$. Soit $f \in k\{X\}$ le polynôme minimal de p , et soit $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n$ une p-base (finie) de K . On sait que $f[K]$ est infini et que, pour tout $b \in f[K]$, $t(b/k(a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_n))$ est algébrique. Il existe donc un polynôme $P_b \in k(X_0, \ldots, X_n)$ tel que $P_b(b\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n) = 0$. Il y a, à priori, deux possibilités :

1° pour chaque entier m , $\{b\ ;\ d°(P_b) \leqslant m\}$ est fini

2° le contraire.

On va montrer que si le deuxième cas se présente, p n'est pas orthogonal aux constantes (autrement dit, ce cas est impossible). En effet, considérons un entier m qui nous fournit un nombre infini de points dans $f[K]$. A chaque polynôme $P \in k(X_0, X_1, \dots, X_m)$, de degré m , on associe la suite $\bar{c}(P)$ de ses coefficients dont on a décidé l'ordre une fois pour toutes ; $\bar{c}(P)$ est donc une suite d'élément de k , de longueur fixée (dépendant seulement de n et m). Soient $b(i)$, $i \in \omega$, des éléments distincts de $f[K]$, tels que $P_{b(i)}$ est un polynôme de degré m , et posons $\bar{c}(i) = \bar{c}(P_{b(i)})$. Faisons un ultra-produit non trivial $K' = K^{\omega}/_u$. Soient $b' \in K'$ l'élément correspondant à la suite $(b(i)\ ;\ i \in \omega)$, $\bar{c}'$ la suite correspondant à $(\bar{c}(i)\ ;\ i \in \omega)$, et P' le polynôme tel que $c(P') = \bar{c}$; P' est donc un polynôme à coefficients constants, et on a $K' \models P'(b', a_1, a_2, \dots, a_n)$. Or $t(b'/K) = p(K)$, et b' et $\bar{c}'$ ne sont pas K-indépendants, ce qui montre que p n'est pas orthogonal à $c(K)$.

10. - Terminons par un théorème. On dira qu'une structure M est faiblement homogène si, pour toutes suites finies $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de M ayant même type fort au-dessus du vide, il y a un automorphisme de M envoyant l'une dans l'autre. Ici, avoir même type fort veut dire satisfaire aux mêmes équations différentielles à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Q}}$, la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME. - <u>S'il y a moins de</u> $2^{\aleph_0}$ c. d. c. <u>dénombrables</u>, <u>alors ils sont tous faiblement homogènes</u>.

On ne donnera qu'une idée de la preuve : soit $p \in S_1(k)$, p régulier ; On dit que p est borné, pour tout $K \supseteq k$ et tout α , $\tilde{\mathbb{Q}}$-automorphisme de K , si q est le type obtenu à partir de $p(K)$ par action de α , alors q et $p(K)$ sont équivalents. On distingue plusieurs cas :

1° On ne peut pas trouver de corps $k \subseteq K$, k finiment engendré et $p \in S_1(k)$ régulier et non borné avec $\mathrm{Dim}(p , K)$ fini. Dans ce cas, on peut appliquer les résultats de [B. L.] et tous les c. d. c. dénombrables sont faiblement homogènes.

2° Dans l'autre cas, et s'il existe k , K et $p \in S_1(k)$ comme ci-dessus, avec en plus la condition que k ne contient aucun élément générique. Dans ce cas, on peut adapter les résultats de [B], et trouver $2^{\aleph_0}$ c. d. c. dénombrables.

3° Si le corps k en question contient nécessairement des génériques, il faut alors appliquer les idées de [Sf] pour construire $2^{\aleph_0}$ c. d. c. dénombrables. La remarque importante est que si a et b sont génériques et indépendants, alors a , b et $a + b$ sont deux à deux indépendants sans être libres.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BOUSCAREN (E.). - Countable models of multidimentional ω-stable theories, J. of symb. Logic (à paraître).

[B-L] BOUSCAREN (E.).and LASCAR (D.). - Countable models of non multidimentional ω-stable theories, J. of symb. Logic (à paraître).

[P] POIZAT (B.). - Rangs des types dans les corps différentiels, Groupe d'étude de Théories stables, 1re année, 1977/78, n° 1, 13 p.

[Sa] SACKS (G. E.). - Saturated model theory. - Reading, Benjamin, 1972 (Mathematics Lecture Note Series).

[Sf] SAFFE (J.). - A superstable theory with the dimentional order property has many models (à paraître).

[Sh] SHELAH (S.). - Differentially closed fields, Israel J. of Math., t. 16, 1973, p. 314-328.
