GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

CHANTAL BERLINE

Déviation des types dans les corps algébriquement clos

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. nº 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A3_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 3, 10 p.

DÉVIATION DES TYPES DANS LES CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

par Chantal BERLINE (*)
[Université Paris-7]

Cet exposé est destiné à clarifier, pour le lecteur, diverses notions liées à la stabilité des types sur des ensembles de paramètres dans le cas de la théorie des corps algébriquement clos. Dans ce cadre, la notion algébrique essentielle est celle de dimension de Krull d'un idéal, directement reliée à la déviation des types.

Des compléments sont donnés dans deux appendices : le premier est consacré à la définition et à une caractérisation de la "bonne définition" d'un type d'une théorie stable quelconque, le second à l'existence du plus petit corps de définition d'un idéal d'un anneau de polynôme sur un corps.

Déviation des types dans les corps algébriquement clos. - Dans tout ce qui suit, Ω est un gros corps algébriquement clos de caractéristique p ou 0, où "gros" signifie comme d'habitude : contenant tout ensemble A de paramètres que l'on considérera et $|A|^+$-saturé. Comme tout type sur un ensemble de paramètres A a une extension unique (et donc non déviante) au sous-corps de Ω engendré par A, il suffit de regarder ce qui se passe pour les types sur les sous-corps k de Ω. De même, du point de vue de la déviation des types, le corps k de caractéristique p ne se distingue pas de sa clôture définissable $k^{p^{-\infty}}$; nous nous contenterons donc la plupart du temps de regarder ce qui se passe pour les types sur des corps k parfaits et indiquerons les modifications faciles permettant de passer au cas général.

Ceci dit, à tout type $p \in S_n(k)$, où k est un corps quelconque, est associé canoniquement (et bijectivement grâce à l'élimination des quantificateurs modulo $T=T(\Omega)$) l'idéal premier $I(p)$ de $k[\bar{X}]$, où $\bar{X} = X_1, \ldots, X_n$, défini par

$$I(p) = \{P \in k[\bar{X}] \ ; \ P(\bar{a}) = 0\}$$

où $\bar{a}$ est une réalisation quelconque de p dans Ω. Et réciproquement, tout idéal premier I de $k[\bar{X}]$ est un $I(p)$ pour un p $S_n(k)$. Notons qu'un idéal $J \supseteq I(p)$ de $K[\bar{X}]$, $K \supseteq k$, est associé à une extension de p seulement si $J \cap k[\bar{X}] = I(p)$.

Par définition, la dimension de Krull d'un idéal premier I de $k[\bar{X}]$ est le degré de transcendance du corps des fractions de $k[\bar{X}]/I$.

Si $I = I(p)$, $p \in S_n(k)$, la dimension de Krull de I est donc le degré de transcendance de $k(\bar{a})$ sur k, où $\bar{a}$ est une réalisation quelconque de p.

(*) Chantal BERLINE, Att. Rech. CNRS, Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

Notations. - $S(k) = \bigcup_n S_n(k)$ et $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ la longueur de $\bar{X}$ étant déterminée par le contexte.

PROPOSITION 1. - *Soit* $p \in S(k)$, *où* k *est un corps quelconque. Alors* :

$$RM(p) = RU(p) = \dim \text{Krull } I(p) ,$$

où RM *désigne le rang de Morley et* RU *le rang* U .

Démonstration. - Une démonstration de l'égalité de RM et RU pour les types d'une théorie $\aleph_1$-catégorique est donnée dans [1]. Il suffit donc de montrer $RU(p) = R(p)$, où $R(p) = \dim$ Krull $(I(p))$. Si $p \in S_1(k)$, et a réalise p dans Ω , il est clair que, $R(p) = U(p) = 0$ si a est algébrique sur k , et $R(p) = U(p) = 1$ sinon. Utilisant la formule

$$RU(\bar{a} {}^\frown \bar{b}/k) = RU(\bar{a}/k) + RU(\bar{b}/k \cup \bar{a}) \qquad [2]$$

et remarquant que le rang RU d'un type sur $k \cup \bar{a}$ et celui de son extension à $k(\bar{a})$ sont les mêmes, il suffit alors de faire une récurrence facile sur le nombre de variables de p .

COROLLAIRE 2. - *Soient* k , K *deux corps,* $k \subset K$, $p \in S(k)$, $q \in S(K)$. *Il y a équivalence entre* :

(i) q *est extension non déviante de* p ,

(ii) $I(q) \supset I(p)$ *et* $\dim$ Krull $(I(q)) = \dim$ Krull $I(p)$.

Démonstration. - Dans une théorie ω-stable, les extensions non déviantes d'un type sont exactement ses extensions de même rang. La seule chose à montrer est donc : (ii) implique " q est extension de p , i. e. $I(q) \cap k[\bar{X}] = I(p)$ ". Ce sera fait plus tard (Prop. 5(a)). Nous admettons provisoirement ce résultat, et utilisons le corollaire 2 pour donner une démonstration directe de l'existence de la définition globale des extensions non déviantes d'un type dans la théorie des corps algébriquement clos.

Notations. - Soit I un idéal premier de $k[\bar{X}]$ et $K \supset k$. Nous noterons $E_{I,K}$ l'ensemble des idéaux premiers de $K[\bar{X}]$ qui contiennent I (et donc $I \otimes K$, l'idéal qu'il engendre dans $K[\bar{X}]$) et ont même dimension de Krull que lui. $E_{I,K}$ est donc, d'après ce qui précède, l'ensemble des idéaux de $K[\bar{X}]$ associés aux extensions non déviantes sur K du type de $S(k)$ associé à I . En particulier, $E_{I,K}$ est fini (T est ω-stable) et non vide. $E_{I,K}$ est aussi l'ensemble des idéaux premiers de $K[\bar{X}]$ minimaux parmi ceux qui contiennent I (un sens est donné par 5(b) et l'autre est conséquence de la proposition 7 et de son analogue pour k non parfait, et de l'unicité de l'ensemble des radicaux des idéaux qui interviennent dans la décomposition primaire d'un idéal).

COROLLAIRE 3 (Théorème de bonne définissabilité pour T ; cf. Appendice II). - *$p \in S(k)$ étant donné, on peut associer à toute formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ sans paramètre, du langage des corps, une formule $d_p\,\varphi(\bar{y})$ à paramètres dans k et telle que :*

Pour tout $\bar{y} \in \Omega$, $\Omega \models d_p\,\varphi(\bar{y})$ si, et seulement si, toute extension non déviante de p à Ω satisfait $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$.

LEMME 4 (Cas simple d'un théorème de Herman). - *Soient K un corps quelconque, I un idéal fixé de $K[\bar{X}]$, et $P(\bar{X}, \bar{Y})$ un polynôme de $K[\bar{X}, \bar{Y}]$. Alors il y a une formule ψ telle que :*

$$\forall\, \bar{y} \in K\,,\quad P(\bar{X}, \bar{y}) \in I \ \text{ si, et seulement si, } \ K \models \psi(\bar{y})\,.$$

Démonstration. - On peut supposer, sans restreindre le problème, que $\bar{y}$ est la suite des coefficients des monômes en $\bar{X}$, supposés écrits dans un certain ordre. Soient $f_1, \dots, f_s$ des générateurs de I et ψ_n la formule en $\bar{y}$ et à paramètres les coefficients des f_i, définie par

$$\psi_n(\bar{y}) = \{\bar{y}\ ;\ \text{il existe des polynômes } g_1, \dots, g_s \text{ de degré } \leqslant n \text{ tels que } P(\bar{X}, \bar{y}) = \textstyle\sum g_i f_i\}\,.$$

Les ψ_n définissent des sous-K-espaces vectoriels de K^r où r est la longueur de $\bar{y}$, donc à partir d'un certain n_0 la suite des $\psi_n(K)$ est stationnaire, et $\psi = \psi_{n_0}$ convient.

Démonstration du corollaire 3. - Utilisant l'élimination des quantificateurs dans T, et remarquant que les conjonctions ne font pas de problèmes, on peut supposer φ de la forme :

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigvee \varepsilon_i(P_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0)\,,$$

où i varie sur un ensemble fini, et ε_i est "$\neg$" ou " ". Il est clair que $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ est dans toute extension non déviante si, et seulement si, on a :

$$\bigwedge_{J \in E_{I,K}} \bigvee_i \varepsilon_i[P_i(\bar{x}, \bar{y}) \in J] \qquad \text{(Cor. 2)}\ ;$$

(I et donc) les J étant fixés, et $E_{I,K}$ fini, ceci est en fait une formule du premier ordre en $\bar{y}$. Comme elle est invariante par tout k-automorphisme de Ω, elle est équivalente à une formule φ à paramètres dans k.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 5. - *Soit I un idéal premier de $k[\bar{X}]$ et $K \supset k$, alors :*

(a) *Pour tout idéal J de $E_{I,K}$, on a $I = J \cap k[\bar{X}]$,*

(b) *Tout idéal de $E_{I,K}$ est minimal parmi les idéaux premiers de $K[\bar{X}]$ qui contiennent I.*

Avant de démontrer la proposition 5, il convient d'énoncer quelques propriétés plus élémentaires de la dimension de Krull. Nous laissons leur démonstration en exercice.

FAITS 6. - Soient I et I' deux idéaux premiers de $k[\bar{X}]$. Alors :

(i) $I \subseteq I'$ implique dim Krull $(I) \geq$ dim Krull (I'),

(ii) $I \subsetneq I'$ implique dim Krull $(I) >$ dim Krull (I'),

(iii) Si K est une extension de k et si $I \otimes K$ est premier, alors dim Krull $(I \otimes K) =$ dim Krull (I).

(iv) Si K est une extension de k et I un idéal premier de $K[\bar{X}]$, alors dim Krull $(J \cap k[\bar{X}]) \geq$ dim Krull (J).

Démonstration de la proposition 5. - Soit J un idéal de $E_{I,K}$, alors :

$$\text{dim Krull } (J \cap k[\bar{X}]) \geq \text{dim Krull } (J) = \text{dim Krull } (I) \quad \text{(par 6 (iv))}$$

$$\text{dim Krull } (J \cap k[\bar{X}]) \leq \text{dim Krull } (I) \quad \text{(par 6 (i))}$$

donc :

$$J \cap k[\bar{X}] = I \quad \text{(par 6 (ii))}$$

ce qui démontre (a). Supposons maintenant que J' est un idéal premier de $K[\bar{X}]$ tel que $I \subseteq J' \subseteq J$. On a, par 6 (i) et (iv) :

$$\text{dim Krull } (I) \geq \text{dim Krull } (J' \cap k[\bar{X}]) \geq \text{dim Krull } (J') \geq \text{dim Krull } (J) .$$

Donc les quatre dimensions sont égales, en particulier :

$$\text{dim Krull } J' = \text{dim Krull } J$$

donc :

$$J' = J \quad \text{(par 6 (ii))}$$

PROPOSITION 7. - Soit I un idéal premier de $k[\bar{X}]$ et $K \supset k$. Si k est parfait, on a :

$$I \otimes K = \bigcap_{J \in E_{I,K}} J .$$

Démonstration. - Notons provisoirement I_K l'intersection en question, et occupons-nous d'abord de I_Ω. I_Ω est clairement invariant par tout k-automorphisme de Ω, donc il a un système de générateurs dont les coefficients sont invariants par tout k-automorphisme de Ω [cf. Appendice II], et donc dans la clôture définissable $k^{p^{-\infty}}$ de k, c'est-à-dire dans k si k est parfait. Comme $I_\Omega \cap k[\bar{X}] = I$ (Prop. 5 (a)). Ceci montre bien que

$$I_\Omega = I \otimes \Omega .$$

Toujours par 5 (a), chaque J de $E_{I,K}$ est l'intersection avec $K[\bar{X}]$ des idéaux de $\Omega[\bar{X}]$ qui le contiennent et ont même dimension. Il en résulte que

$$I_K = K[\bar{X}] \cap I_\Omega = K[\bar{X}] \cap (I \otimes \Omega) = I \otimes K \text{ .}$$

COROLLAIRE 8. - Soit $p \in S(k)$, $k \subset K$. Si k est parfait, les assertions suivantes sont équivalentes :

1° p a une seule extension non déviante à K

2° $I(p) \otimes K$ est premier.

Définitions. - Soient K et L deux extensions d'un corps k , $K , L \subset \Omega$.

K et L sont k-algébriquement disjointes si toute (resp. une) base de transcendance de K sur k reste algébriquement libre sur L .

K et L sont k-linéairement disjointes si toute (resp. une) base du k-espace vectoriel K reste linéairement libre sur L .

Ces deux notions sont en fait parfaitement symétriques en K et L , et il est facile de voir que " k-linéairement disjointes" implique " k-algébriquement disjointes".

COROLLAIRE 9. - Soit $q \in S(K)$, $K \supset k$, k parfait, $p = q \upharpoonright k$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1° q est seule extension non déviante de p à K ,

2° q admet une bonne définition à paramètres dans k [cf. Appendice II]

3° $I(q)$ admet k pour corps de définition, i. e. a un système de générateurs dans $k[\bar{X}]$,

4° $I(q) = I(p) \otimes K$,

5° $I(p) \otimes K$ est premier, et dim Krull $I(p)$ = dim Krull $I(q)$,

6° $I(p) \otimes K$ est premier, et $k(q)$ et K sont k-algébriquement disjoints,

7° $k(q)$ et K sont k-linéairement disjoints,

où $k(q)$ désigne toute extension de k par un uplet réalisant q , $k(q)$ est donc unique à K-isomorphisme près.

Commentaires. - L'équivalence 2° et 3° et l'existence d'un plus petit corps d'un idéal d'anneaux de polynômes (App. II) implique l'existence d'un plus petit ensemble de bonne définition définissablement clos pour chaque type de la théorie des corps algébriquement clos. Il s'agit là d'un comportement très particulier de T . Dans le cas général d'une théorie T stable quelconque, on aura toutefois un résultat analogue à condition de faire intervenir des éléments "imaginaires" du gros modèle saturé Ω .

Démonstration. - 1° <--> 2° par la proposition B de l'appendice I ; 3° <--> 4° est immédiat puisque $I(p) = I(q) \cap k[\bar{X}]$ et 1° <--> 4° puisque les deux assertions sont équivalentes, par la proposition 5, à $E_{I,K} = \{I(q)\}$; 4° --> 5° est clair et 5° --> 4° vient du fait 6 (iv). Soit $\bar{a}$ une réalisation de q dans Ω. La deuxième partie de 5° affirme que les degrés de transcendance de $K(\bar{a})$ sur K et $k(\bar{a})$ sur k sont égaux, ce qui est exactement dire que $k(\bar{a})$ et K sont algébriquement disjoints. Il ne nous reste donc qu'à montrer, par exemple, 7° <--> 4°.

7° --> 4° : soit $P = \sum c_i M_i(\bar{X})$ un polynôme non nul de $I(q) - I(p) \otimes K$ faisant intervenir un nombre minimal de monômes $M(\bar{X})$. Les éléments c_i de K qui interviennent sont donc non nuls et en nombre fini. Si $\bar{a}$ réalise q dans Ω, on a $\sum c_i M_i(\bar{a}) = 0$. Par 7°, il y a des d_i dans k, non tous nuls, tels que $\sum d_i M_i(\bar{a}) = 0$. Il en résulte que $Q = \sum d_i M_i(\bar{X})$ est dans $I(p)$. Supposons $d_1 \neq 0$. Alors $P - c_1 Q/d_1$ est dans $I(q) - I(p) \otimes K$ et contredit la minimalité de P.

4° --> 7° : soient $M_i(\bar{X})$, i de 1 à n, tels que les $M_i(\bar{a})$ soient K-linéairement dépendants (où $\bar{a}$ réalise q), et soient des c_i dans K, non tous nuls, i de 1 à n, tels que $c_i M_i(\bar{a}) = 0$. Alors $\sum c_i M_i(\bar{X})$ est dans $I(q)$, donc dans $I(p) \otimes K$.

Soient $f_1, \dots, f_r$ un système de générateurs de $I(p)$ dans $k[\bar{X}]$ et $s_1, \dots, s_r$ des polynômes de $K[\bar{X}]$ tels que :

$$\sum c_i M_i(\bar{X}) = \sum s_j(\bar{X}) f_j(\bar{X}) .$$

Cette équation entre polynômes, considérée comme un système linéaire à coefficients dans k : les coefficients des f_j, a une solution dans K : les c_i et les coefficients des s_j. Le système a donc une solution dans k, et il existe des $c'_i \in k$, $s'_j \in k[\bar{X}]$, les c'_i n'étant pas tous nuls, tels que

$$\sum c'_i M_i(\bar{X}) = \sum s'_j(\bar{X}) f_j(\bar{X}) .$$

Il en résulte que

$$\sum c'_i M_i(\bar{X}) \in I(p) .$$

$$\sum c'_i M_i(\bar{a}) = 0 ,$$

et les $M_i(\bar{a})$, $i = 1$ à n, sont k-linéairement liés. Par conséquent, toute base de monômes $M_i(\bar{a})$, $i \in I$, du k-espace vectoriel $k(\bar{a})$ reste linéairement libre dans $K(\bar{a})$ et $k(\bar{a})$ et K sont linéairement disjoints.

COROLLAIRE 10. - $p \in S(k)$, k parfait. Alors, sont équivalentes :

1° p est stationnaire,

2° $I(p) \otimes \tilde{k}$ est premier, 3° $k(p)$ <u>et</u> $\tilde{k}$ <u>sont</u> <u>k-linéairement disjoints</u>, <u>où</u> $k(p)$ <u>désigne toute extension</u> <u>de</u> k <u>par un uplet réalisant</u> p .

<u>Commentaires</u>. – La deuxième assertion nous dit que $I(p)$ est un idéal <u>absolument</u> premier, c'est-à-dire que $I(p) \otimes K$ est premier pour toute extension K de k (utiliser par exemple l'équivalence avec 1° et le corollaire 9). Une extension L de k est une <u>extension régulière de</u> k si, par définition, L et $\tilde{k}$ sont k-linéairement disjoints. Considérant alors le multi-type p de L sur k le corollaire 10 nous fournit une caractérisation modèle-théorique, pour k parfait, de la régularité.

<u>Quand</u> k <u>n'est pas parfait</u> ... – Tout idéal I de $k[\bar{X}]$ a une extension canonique I^* à $k^{p^{-\infty}}[\bar{X}]$, où $p = \operatorname{car} k$, définie par :

$$I^* = \{P \in k^{p^{-\infty}}[\bar{X}] \ ; \ \exists \ n \in \underset{\sim}{N} , \ P^{p^n} \in I\} .$$

Soit K une extension quelconque de k , $k^+ = k^{p^{-\infty}} \cap K$, et I^+ l'idéal de $k^+[\bar{X}]$ défini par

$$I^+ = I^* \cap k^+[\bar{X}] .$$

Si I est premier, I^+ est premier et associé à l'unique extension sur k^+ du type de $S(k)$ associé à I . En particulier, I et I^+ ont même dimension de Krull, et les idéaux premiers de $K[\bar{X}]$ qui contiennent I sont exactement ceux qui contiennent I^+ .

Il en résulte que la proposition 5 reste vraie si on remplace $I \otimes K$ par $I^+ \otimes K$. Dans le corollaire 8, on peut remplacer le 2°, au choix, par

$$I^+(p) \otimes K \text{ est premier,}$$

ou, en remarquant que dans l'anneau noetherien $K[\bar{X}]$, tout idéal de radical premier est primaire, par

$$I(p) \otimes K \text{ est primaire .}$$

Les assertions 3° et 7° du corollaire 9 restent bien sûr équivalentes mais, si on veut conserver leur équivalence à 1° et 2°, il convient de remplacer dans leur énoncé k par k^+ et $I(p)$ par $I(p)^+$. On finira par des modifications analogues pour le corollaire 10.

APPENDICE I : Bonne définissabilité

Supposons que T est une théorie complète <u>stable</u> d'un langage L quelconque, et Ω un gros modèle saturé ("gros" signifie comme d'habitude : contenant tout ensemble A de paramètres que l'on considérera et $|A|^+$ saturé). T étant stable, à tout type p de T est associée une définition globale de ses extensions non déviantes à Ω .

THÉORÈME A. - <u>Un ensemble de paramètres</u> A <u>et un type</u> $p \in S_n(A)$, $n \geqslant 1$, <u>étant donnés, on peut associer à chaque formule</u> $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (<u>sans paramètre</u>) <u>de</u> L <u>à</u> $n + r$ <u>variables libres, une formule</u> $d_p \varphi(\bar{y})$ <u>à paramètres dans</u> A <u>telle que</u>

$$\forall \bar{b} \in \Omega^r , \quad \Omega \models d_p \varphi(\bar{b})$$

<u>si, et seulement si, toute extension non déviante de</u> p <u>à</u> Ω (<u>ou à n'importe quel ensemble de paramètres contenant</u> $\bar{b}$) <u>contient</u> $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$.

<u>Remarques</u> :

(i) d_p est une "**<u>définition</u>**" de p en ce sens que

$$\forall \bar{a} \in A , \quad p \vdash \varphi(x , \bar{a}) \text{ si, et seulement si } \models d_p \varphi(\bar{a}) .$$

(ii) C'est une "<u>bonne définition</u>" en ce sens qu'elle s'étend de manière consistante à tout modèle M contenant A , et y définit le fermé des extensions non déviantes de p à M .

(iii) d_p est unique (à équivalence dans Ω près). Nous pouvons donc reformuler le théorème précédent sous la forme :

PROPOSITION A. - <u>Dans la théorie stable</u> T , <u>tout type</u> p <u>sur un ensemble de paramètres</u> A <u>admet une bonne définition à paramètres dans</u> A , <u>et deux bonnes définitions de</u> p <u>sont équivalentes dans</u> Ω .

PROPOSITION B. - <u>Soient</u> $A \subset B$ <u>et</u> $q \in S_n(B)$, $n \geqslant 1$, <u>alors les deux assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) q <u>est seule extension non déviante de</u> $q \restriction A$ <u>à</u> B .

(ii) q <u>a une bonne définition à paramètres dans</u> A .

<u>Démonstration</u> : Si (i) est vrai les extensions non déviantes de q à Ω et les extensions non déviantes de $q \restriction A$ coincident, donc on peut prendre pour bonne définition de q une bonne définition de $q \restriction A$, et (ii) est vrai. Si (ii) est vrai et (i) faux, deux cas se présentent :

<u>Cas (a)</u> : q <u>dévie sur</u> A . - Soit $a \in \Omega$ réalisant q et $\bar{b}' \in \Omega$ de même type que $\bar{b}$ sur A et indépendant de $B \cup \{a\}$ sur A (i. e. $\bar{b}'$ réalise une extension non déviante de $t(\bar{b}, A)$ à $B \cup \{a\}$). Comme les types de $S_n(B)$ qui dévient sur A forment un ouvert, il y a une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in B$, telle que $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$, et tout type sur B , qui contient $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$, dévie sur A . Il en résulte que tout type sur $\bar{b} \cup A$ qui contient $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ dévie sur A et, puisque $\bar{b}$ et $\bar{b}'$ ont même type sur A , tout type de $\bar{b}' \cup A$ contenant $\varphi(\bar{x}, \bar{b}')$ dévie sur A . Or, par choix de $\bar{b}'$, $t(a , A \cup \bar{b}')$ ne dévie pas sur A, donc on a $\neg \varphi(a , \bar{b}')$.

En résumé :

1° q , et donc toute extension non déviante de q à Ω , contient $\varphi(x , \bar{b})$;

2° il y a une extension non déviante de q à Ω qui ne contient pas $\varphi(x , \bar{b}')$;

3° $\bar{b}$ et $\bar{b}'$ ont même type sur A .

Il est alors clair que q ne peut pas être bien définissable sur A .

Cas (b) : q ne dévie pas sur A . – Soit q_1 un fils non déviant de $q \upharpoonright A$ à B , π et π_1 des prolongements non déviants de q et q_1 à Ω , et σ un automorphisme de Ω tel que $\sigma(\pi_1) = \pi$. Si $q \neq q_1$, il y a une formule $\varphi(\bar{x} , \bar{y})$ de L telle que $q \vdash \varphi(\bar{x} , \bar{b})$, $\bar{b} \in B$, et $q_1 \vdash \neg\varphi(\bar{x} , \bar{b})$. Alors

$$\pi \vdash \varphi(\bar{x} , \bar{b}) \wedge \neg\varphi(x , \sigma\bar{b})$$

contredisant l'existence d'une définition à paramètres dans A .

APPENDICE II : Plus petit corps de définition d'un idéal.

Soit I un idéal de $K[\bar{X}] = K[X_1 , \dots , X_n]$ (K corps quelconque). Un sous-corps k de K est un corps de définition de I si I est engendré, en tant qu'idéal, par un système de générateurs situés dans $k[\bar{X}]$.

THÉORÈME. – A tout idéal I de $K[\bar{X}]$ est associé un unique sous-corps k_0 de K ayant les propriétés suivantes :

1° k_0 est un corps de définition de I ,

2° k_0 est inclus dans tout corps de définition de I ,

3° k_0 est une extension de type fini du sous-corps premier de K ,

4° pour tout automorphisme σ de K , on a : $\sigma(I) = I$ si, et seulement si, $\sigma \upharpoonright k_0 = \mathrm{id}$.

Démonstration. – Soit $(M_s , s \in S)$, une base du K-espace vectoriel $K[\bar{X}]/I$ formée de monômes. A tout monôme M de $K[\bar{X}]$, on peut donc associer des éléments $a_{M,s}$ de K , presque tous nuls, tels que :

$$M - a_{M,s} M_s \in I .$$

On prend, pour k_0 , le sous-corps de K engendré par tous les $a_{M,s}$.

1° C'est un corps de définition de I ; en effet, tout polynôme f de $K[\bar{X}]$ s'écrit $\sum b_M M$, où les M sont des monômes et les b_M des éléments de K , donc aussi sous la forme :

$$f = b_M(M - \sum a_{M,s} M_s) + \sum c_s M_s .$$

Si f est dans I , comme les $M - \sum a_{M,s} M_s$ sont dans I aussi, tous les c_s

sont nuls, et

$$f = \sum r_M (M - \sum a_{M,s} M_s) \ .$$

Ceci montre que I est engendré par les $M - \sum a_{M,s} M_s$, polynômes de $k_0[\bar{X}]$.

2° Soit k un autre corps de définition de I , et $f_1 , \ldots f_k$ un système de générateurs de I à coefficients dans $k[\bar{X}]$. Pour tout M , on a

$$M - \sum a_{M,s} M_s = \sum g_i f_i$$

pour des g_i de $K[\bar{X}]$. En regardant cette équation comme un système d'équations ayant pour inconnues les $a_{M,s}$ et les coefficients des g_i , et pour coefficients dans k les coefficients des f_i , on voit qu'il a une solution dans K , donc qu'il en a une dans k : il y a des $a'_{M,s}$ dans k et des g'_i dans $k[\bar{X}]$ tels que :

$$M - \sum a'_{M,s} M_s = \sum g'_i f_i \ .$$

En particulier :

$$M - \sum a'_{M,s} M_s \in I$$

et, puisque les M_s sont indépendants modulo I , $a_{M,s} = a'_{M,s} \in k$ pour tous M , s .

C. Q. F. D.

3° vient du 2° et de ce que I a un corps de définition de type fini ($K[\bar{X}]$ est noethérien).

4° Il est clair que tout automorphisme de K , qui laisse k_0 invariant point par point, laisse I globalement invariant. Réciproquement, si σ est un automorphisme de K tel que $\sigma(I) = I$, on a, pour tout M ,

$$\sigma(M - \sum a_{M,s} M_s) = M - \sigma(a_{M,s}) M_s \in I \ ,$$

donc, par unicité des $a_{M,s}$,

$$\sigma(a_{M,s}) = a_{M,s} \ .$$

C. Q. F. D.

RÉFÉRENCES

[1] POIZAT (B.). - Une théorie ω_1-catégorique a α_T fini, Groupe d'étude de Théories stables, 1re année, 1977/78, exposé n° 8, 3 p.

[2] POIZAT (B.). - Le rang U selon Lascar, Groupe d'étude de Théories stables, 2e année, 1978/79, exposé n° 6, 7 p.
