Bruno Poizat

Une théorie finiement axiomatisable et superstable

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A1_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 1, 9 p.

UNE THÉORIE FINIEMENT AXIOMATISABLE ET SUPERSTABLE

par Bruno POIZAT (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

Problèmes (en ordre décroissant). - Existence d'une théorie complète, finiement axiomatisable :

1° catégorique en toutes puissances infinies,

2° catégorique en puissances non dénombrables,

3° ω-stable,

4° superstable,

5° stable.

Ces problèmes tourmentent les logiciens depuis une dizaine d'années. J. A. MAKOWSKY [1] décrit (sommairement) une théorie vérifiant 4°, et donc 5°, obtenue à partir d'un pavage du plan par des dominos sans solutions périodiques découvert par R. M. ROBINSON [2]. Je décris ici cette théorie. En ce moment (début 1982), il semble qu'il n'existe pas de théorie vérifiant 1°, mais qu'il en existe vérifiant 2° (et donc 3°).

Le graphe d'un groupe. - G est un groupe infini dénombrable ; soit $T(G)$ la théorie dont le vocabulaire comporte un symbole de fonction pour chaque élément de G, avec les axiomes suivants :

- si $h = gf$, $(\forall x)\ h(x) = g(f(x))$
- $(\forall x)\ 1(x) = x$, et si $g \neq 1$, $(\forall x)\ g(x) \neq x$.

Soit a dans un modèle de $T(G)$; G agit de façon régulière sur l'orbite de a, c'est-à-dire que tout élément différent de l'identité agit sans points fixes : cette action est équivalente à l'action de G par translation à droite sur lui-même, action qui constitue le modèle minimal de $T(G)$; les modèles de $T(G)$ sont formés de juxtapositions de copies de ce modèle minimal. On voit sans peine que $T(G)$ est universelle, $\aleph_1$-catégorique, donc complète ; et aussi modèle-complète, avec élimination des quanteurs. Dans cette théorie, les types principaux sont algébriques, l'unique type transcendant étant de rang de Morley 1 ; tous les types sont stationnaires.

Supposons maintenant qu'on se soit donné une présentation de G, c'est-à-dire un groupe libre L, de générateurs $f_1, \dots, f_n, \dots$ et un sous-groupe R normal

(*) Bruno POIZAT, Mathématiques UER 47, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

de L , tels que G soit isomorphe à L/R . On introduit des symboles f_i^ϵ , $\epsilon = \pm 1$; pour axiomatiser $T(G)$, il faut introduire les axiomes suivants :

1° $(\forall x)\ f_i^\epsilon(f_i^{-\epsilon}(x)) = x$;

2° si $f_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots f_{i_n}^{\epsilon_n}$ appartient à R , $(\forall x)\ f_{i_1}^{\epsilon_1}(\ldots f_{i_n}^{\epsilon_n}(x)).) = x$;

3° si $f_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots f_{i_n}^{\epsilon_n}$ n'est pas dans R , $(\forall x)\ f_{i_1}^{\epsilon_1}(\ldots f_{i_n}^{\epsilon_n}(x))..) \neq x$.

On peut se contenter d'un nombre fini d'axiomes du premier type si G est finiement engendré, d'un nombre fini d'axiomes du second type s'il est de présentation finie, d'un nombre fini d'axiomes du troisième type s'il n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison. Mais l'existence d'un groupe infini finiement présenté, et avec seulement un nombre fini de classes de conjugaison, reste un problème ouvert de théorie des groupes.

En fait, $T(G)$ est finiement axiomatisable si G est finiement présenté, et s'il existe un nombre fini de classes de conjugaison $\neq 1$, tel que tout élément de $G \neq 1$ ait une puissance dans l'une de ces classes.

Réseaux. - Soit R la théorie avec deux symboles de fonction σ et τ , et l'axiome " σ et τ sont deux bijections commutant entre elles". Si a est dans un modèle de R , le réseau de a est son orbite par le groupe engendré par σ et τ ; une ligne est une orbite par σ , une colonne est une orbite par τ . Le cas qui nous intéresse, celui du damier infini correspondant à $T(Z \times Z)$, est celui où lignes et colonnes sont infinies et se coupent en un seul point. Restent les cylindres droits et les tores (finis), où une ligne et une colonne ne se coupent toujours qu'en un seul point, et encore les cylindres enroulés et les tores tordus. Dans tous les cas de dégénérescence, il existe m et n , non tous deux nuls, tels que $\sigma^n \tau^m = Id$ sur le réseau, puisque, comme le groupe est abélien, le stabilisateur est le même en chaque point.

Nous allons enrichir la théorie R en ajoutant des prédicats unaires, appellés dominos, et en imposant des conditions purement locales, en nombre fini, qui élimineront les réseaux dégénérés. Mais ce que nous gagnerons en nombre d'axiomes, nous le perdrons en stabilité.

Les dominos. - Un domino est un carré avec un numéro sur chacune de ses quatre arêtes (et non sur deux seulement comme pour les dominos ordinaires) ; deux dominos sont semblables s'ils se correspondent par translation (rotations et réflexions sont interdites) ; on se donne un nombre fini de types de dominos, D_1 , ... , D_n , avec une provision infinie de dominos de chaque type, et on cherche à paver le plan, de façon que deux arêtes adjacentes portent le même numéro.

A un système de dominos correspond la théorie du premier ordre suivant : on ajoute à R des prédicats unaires D_1 , ... , D_n , et on exprime que les images par σ ,

τ , σ^{-1} , τ^{-1} , d'un domino de type donné sont de tel ou tel type ; si C est un carré rempli de dominos, on dit que le pavage P exclut C si C ne figure pas dans P : on peut en outre imposer l'exclusion d'un certain nombre de carrés ; tous ces axiomes sont en $\forall$; il faut a priori ajouter une infinité d'axiomes pour garantir que les réseaux sont des damiers.

LEMME. - Pour qu'un système de dominos permette de paver le plan, il suffit qu'il pave des carrés arbitrairement grands.

Preuve. - Par compacité.

P s'abrite (localement) dans P' si tout carré extrait de P figure dans P' ; si en outre P' s'abrite dans P , P et P' sont localement isomorphes.

Un pavage P est minimal si tout P' qui s'abrite dans P lui est localement isomorphe ; tout pavage abrite un pavage minimal (exclure une famille maximale de carrés en laissant consistante la théorie du pavage).

Un pavage est régulier si tout carré figurant dans P possède deux occurences distinctes ; c'est équivalent au fait que tout carré figurant dans P y possède deux occurences disjointes, ou encore une infinité d'occurences. Un pavage localement isomorphe à un pavage régulier est régulier.

Un pavage minimal est régulier : si C ne figure qu'une seule fois, on peut paver des carrés arbitrairement grands en l'omettant. Pour la même raison, il est presque périodique, en ce sens que, pour tout carré C , il existe un entier n , tel que tout carré de côté n contienne une occurence de C ; cette dernière propriété équivaut à la minimalité.

Un pavage P est périodique s'il est formé de la répétition d'un carré de n dominos dont les arêtes opposées se correspondent. Tout pavage s'abritant dans P lui est alors isomorphe (globalement).

PROPOSITION. - Les structures élémentairement équivalentes à un pavage P sont les suivantes :

1° Si P est minimal, les réunions de pavages localement isomorphes à P .

2° Si P est régulier, les réunions de pavages s'abritant dans P , telles que tout carré de P ait une occurence dans un pavage de la réunion.

3° Si P n'est pas régulier, les réunions d'un seul exemplaires de P , et de pavages dans lesquels ne se trouvent que des carrés qui occurent une infinité de fois dans P .

La théorie de P est toujours modèle-complète et superstable ; elle n'est universelle que si P est minimal.

<u>Preuve</u>. - Je ne démontre que le 1°. Soit M une réunion de pavages localement isomorphes à P, soit k un cardinal supérieur à celui de M et au continu, et soit M_k la structure formée de k copies de tous les pavages localement isomorphes à P ; soit T la théorie de M, et D le diagramme de M_k : $T \cup D$ est consistant, car tout sous-ensemble fini de D peut s'interpréter dans M. Donc T possède un modèle de cardinalité k contenant M_k, qui ne peut que lui être isomorphe ; par conséquent, tous les modèles M sont élémentairement équivalents.

L'homogénéité de M_k prouve que la théorie est modèle-complète, et admet l'élimination des quanteurs.

Si M est un modèle, un type au-dessus de M, non réalisé dans M, est caractérisé par le type d'isomorphisme du pavage dans lequel il gît, et par sa place dans ce pavage ; comme il y a au plus un infinité continupotente de pavages deux à deux non isomorphes, il ne peut y avoir que 2^{ω} types non réalisés, et la théorie est superstable.

Un pavage est rigide s'il n'admet pas d'automorphismes autres que l'identité ; un automorphisme éventuel est de la forme $\sigma^n \tau^m$, car il doit conserver le réseau.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> P <u>un pavage non rigide</u> ; <u>pour tout</u> k, <u>il existe un pavage</u> P' <u>admettant une période verticale et une période horizontale</u>, <u>dont tous les carrés d'ordre</u> k <u>s'abritent dans</u> P.

<u>Preuve</u>. - Soit $\sigma^n \tau^m$ un automorphisme de P, et supposons $n \neq 0$; une ligne de crête L est formée des points juste au-dessus d'une droite de pente m/n ; considérons les bandes obliques de largeur verticale $2k$ centrées sur les lignes de crêtes ; à cause de la périodicité dans la direction m/n, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour remplir ces bandes ; il existe donc L_1 et L_2, distantes de plus de k, telles que les bandes centrées sur L_1 et L_2 soient isomorphes. En répétant la bande comprise entre L_1 et L_2, on obtient un pavage P'' qui a une période verticale. On applique à P'' le même procédé pour faire apparaître une période horizontale.

<u>Remarques</u>.

1° La dernière proposition nous impose de ne considérer que des pavages rigides, car sinon un nombre fini d'axiomes ne nous débarasse pas des tores finis.

2° Pour qu'un système de dominos force la non-périodicité, il suffit qu'il ne fournisse que des pavages sans période horizontale. L'existence de tels systèmes a dû être établie pour prouver l'indécidabilité du problème des dominos (savoir si un système de dominos permet ou non de paver le plan) ; si on sait qu'un système de dominos ne fournit pas de solution rigide, on a un processus de décision en cherchant à paver des carrés de plus en plus grands, jusqu'à ce qu'on arrive à une impasse ou qu'on trouve un carré périodique.

PROPOSITION. - Un pavage P régulier et rigide possède une infinité continupotente d'isomorphes locaux deux à deux non isomorphes.

Preuve. - On associe à chaque noeud de l'arbre de la dichotomie, repéré par une suite finie de 0 et de 1 , un carré extrait de P , centré sur le carré associé au noeud précédent, de sorte que les pavages associés aux différentes branches de l'arbre répondent à la question.

Soit c_0 un élément de P , et C_n le carré d'arête $2n + 1$ centré en c_0 ; le carré associé à la racine est c_0 . Supposons avoir construit les 2^k carrés de niveau k , noté Γ_s ; prenons deux exemplaires de chacun, Γ_s^0 et Γ_s^1 , et réalisons ces 2^{k+1} carrés de manière disjointe dans P , ce qui est possible puisque P est régulier ; soit c et c' deux occurences distinctes de c_0 dans la figure obtenue : comme P est rigide, aucun automorphisme de P n'envoie c sur c' , et il est nécessaire qu'il existe deux carrés de même taille, centrés sur c et c' , et non isomorphes. Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles occurences, on peut construire des carrés $(\Gamma_s^\varepsilon)'$, englobant C_n et ces carrés-là ; on prend $(\Gamma_s^0)'$ pour $\Gamma_{s\hat{}0}$, (Γ_s^1) pour $\Gamma_{s\hat{}1}$.

Les pavages obtenus répondent à la question, car deux occurences distinctes de c_0 dans le même pavage, ou deux occurences dans des pavages distincts, ont des voisinages non isomorphes.

Remarque. - Si P est minimal, sa théorie n'est ω-stable que si elle est $\aleph_1$-catégorique, puisqu'il lui faut un modèle premier : ce cas correspond au pavage périodique. Sinon il n'y a pas de modèle premier, et on sait alors que $S_n(T)$ est continupotent pour un certain n ; cela impose une infinité continupotente de pavages localement isomorphes ; c'est le cas du pavage rigide.

Soit P un pavage minimal rigide ; on remarque que tous les types sans paramètre sont non isolés : $S_n(P)$ est sans atome pour tout n (B. JONSSON avait conjecturé que cette propriété était incompatible avec l'axiomatisation finie). Sur tout ensemble de paramètres, les 2^ω types non algébriques sont de rang de Cantor, donc aussi de Morley. Ils sont de RU égals à 1 .

P est presque quasi-totalement transcendante au sens suivant :
Sur tout ensemble non vide de paramètres, les types rangés par le rang de Morley, qui sont isolés, sont denses. On voit bien qu'il existe un modèle premier au-dessus de chaque ensemble non vide de paramètres.

Il reste maintenant à trouver P finiement axiomatisable.

Le pavage de Raphael Robinson. - Raphael ROBINSON a découvert un système de dominos qui ne permet que des pavages rigides, et tel que deux solutions quelconques soient localement isomorphes : les axiomes de pavage, qui sont en nombre fini, constituent la théorie cherchée. En effet, comme il ne peut y avoir de période, le réseau est nécessairement un damier infini, et la théorie est complète puisque ces pavages sont minimaux.

ROBINSON utilise des tuiles, avec tenons et mortaises appropriés, ce qui équivaut à un problème de dominos, à ceci près que dans le cas des tuiles, les rotations et les réflexions sont autorisées ; ce système de tuiles est dessiné en annexe (dessin réel et dessin symbolique) ; une tuile avec quatre tenons est appelée "croix" une tuile avec un seul tenon est appelée "bras". Ce système est suffisant, mais "Unfortunately, the proof that these tiles force non periodicity is rather complicated" (sic). Il est avantageux, bien qu'inutile, d'introduire deux sortes de croix, par exemple croix blanches et croix noires, et d'imposer par un axiome (en $\forall$) que le réseau soit pavé régulièrement par des croix noires : une croix noire toutes les deux lignes et toutes les deux colonnes.

Appelons carré d'ordre 1 une croix noire ; on montre facilement que dans la direction définie par cette croix (voir dessin), on remplit nécessairement un carré d'ordre 3 , la seule inconnue restant l'orientation de la croix (blanche) centrale ; une fois choisie cette orientation, on étend nécessairement ce carré en un carré d'ordre 7 dans la direction qu'elle définit, à ceci près qu'on ignore l'orientation de la croix centrale ; et ainsi de suite.

A toute suite à valeurs dans $\{0 , 1 , 2 , 3\}$ correspond donc une figure de pavage, deux suites donnant la même figure si elles sont égales à partir d'un certain rang. On distingue trois cas :

1er cas : La suite est constante à partir d'un certain rang : on pave un quart de plan.

2e cas : La suite ne prend que deux valeurs adjacentes à partir d'un certain rang : on pave un demi-plan.

3e cas : On pave un plan.

Aucun pavage n'a de période horizontale, car on peut trouver des croix se faisant face à des distances arbitrairement grandes ; les pavages obtenus directement dans le 3e cas sont sûrement minimaux : en effet, les quatre carrés possibles d'ordre $2^n + 1$ se retrouvent dans un quelconque carré d'ordre $2^{n+1} + 1$.

On peut encore paver avec deux demi-plan raccordés le long d'une ligne de bras infinie : les mortaises forcent la symétrie de ces deux demi-plans, car elles codent les orientations successives choisies. Pour cette raison, il est impossible de paver avec un demi-plan et deux quarts de plan. Restent les pavages obtenus avec les quatre quarts de plan, séparés par quatre demi-corridors infinis, avec au centre une croix ou un bras. A cause des symétries, tous ces pavages s'abritent dans ceux du troisième type.

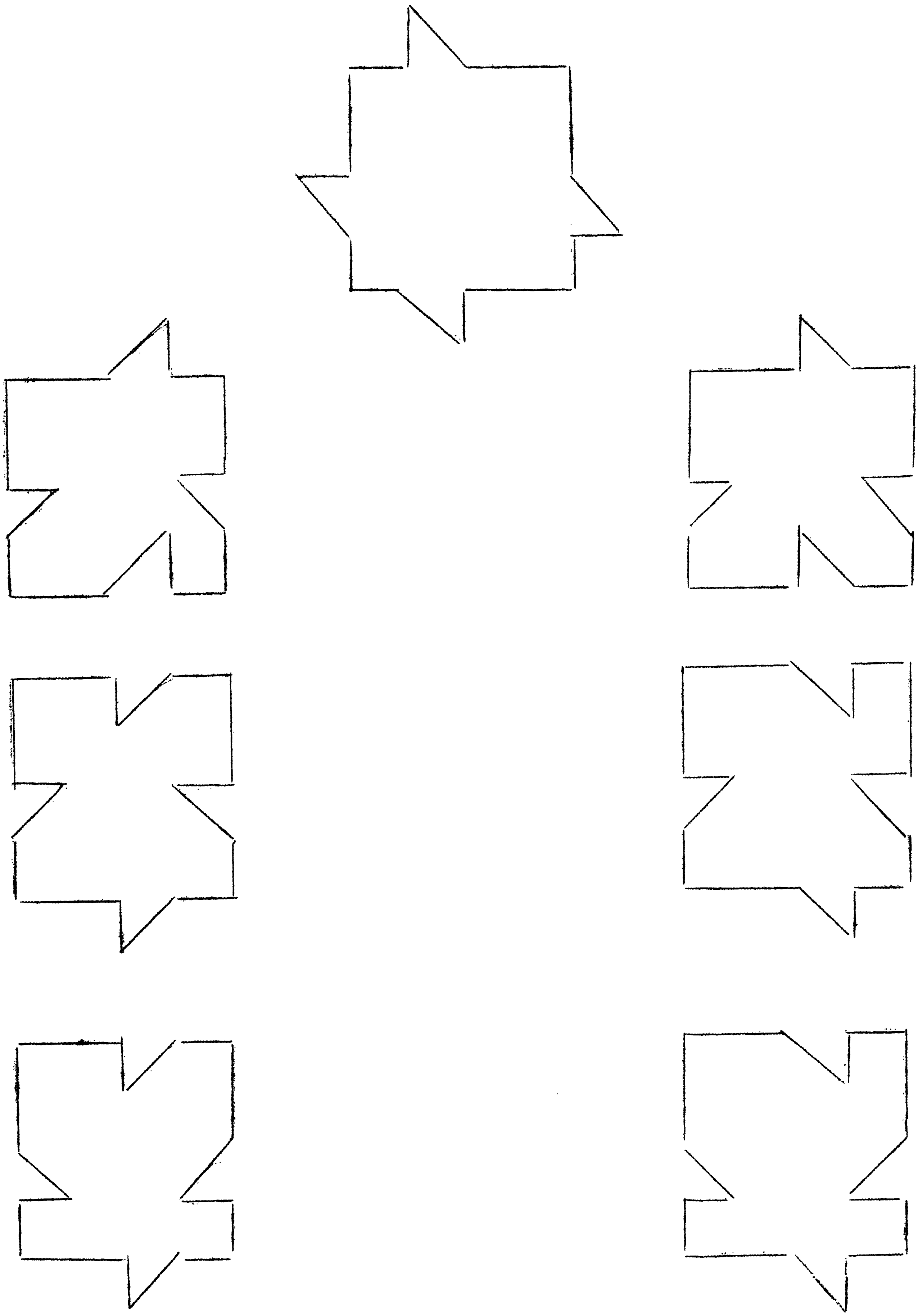
A ceux qui trouveraient ce puzzle un peu chinois, je signale que le premier système de dominos forçant la non-périodicité, découvert par R. BERGER en 1966, en en comporte plus de 20 000 espèces.

BIBLIOGRAPHIE

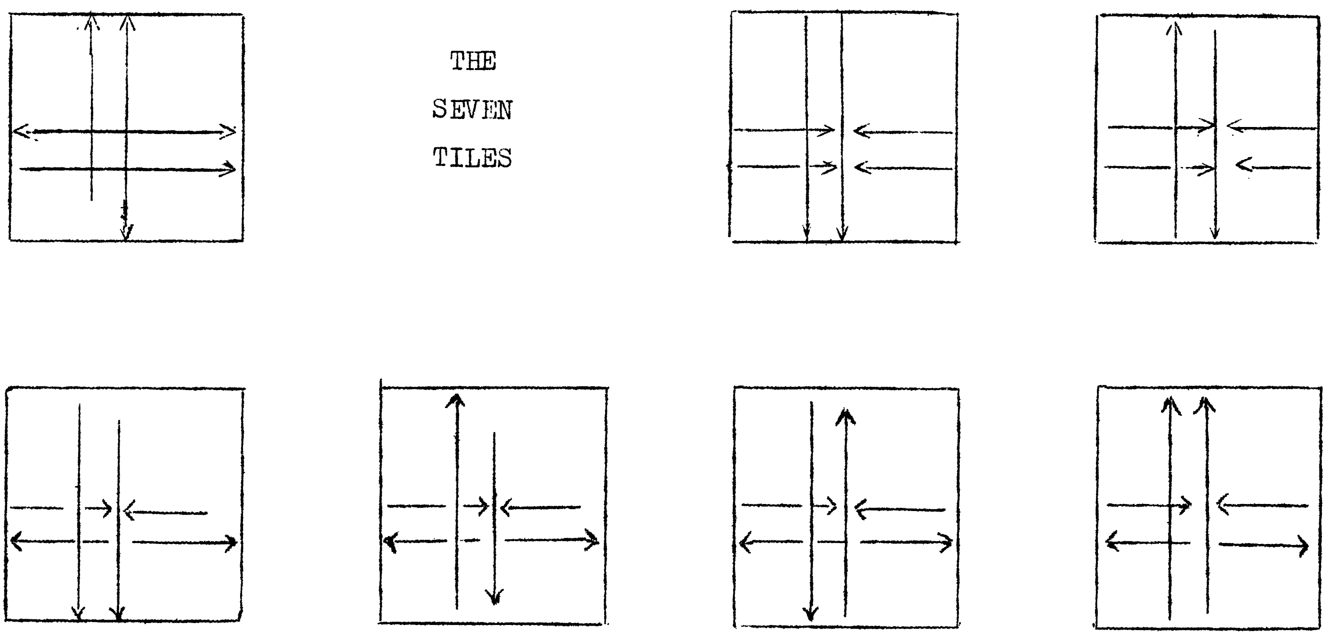
[1] MAKOWSKY (J. A.). - On some conjectures connected with complete sentences, Fund. Math., Warszawa, t. 81, 1974, p. 193-202.

[2] ROBINSON (R. M.). - Seven polygons which permit only non periodic tilings of the plane, Amer. math. Soc., Notices, t. 14, 1967, p. 835.

THE 7 TILES (ROTATE, REFLECT), by R. M. ROBINSON



THE SEVEN TILES



PORTION OF PLANE TILING WITH SOME ARROWS OMITTED