SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

HENRI COHEN

Accélération de la convergence de certaines récurrences linéaires

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 9 (1980-1981), exp. nº 1, p. 1-47
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1980-1981__9__A1_0>

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie des Nombres
6 et 13 novembre 1980

Grenoble

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE CERTAINES RECURRENCES LINEAIRES

par Henri COHEN

1. INTRODUCTION

Considérons la relation de récurrence linéaire d'ordre K :

$$(1) \qquad v(n) = \sum_{j=1}^{K} a_j(n+1-j)v(n-j)$$

où les $a_j(n)$ sont donnés. En général, l'espace vectoriel des solutions de (1) est de dimension K . Soit $\{v_1,\dots,v_K\}$ une base de cet espace. Nous dirons que la récurrence (1) converge si le K-uplet $(v_1(n),\dots,v_K(n))$ considéré comme élément de l'espace projectif $\mathbb{P}_{K-1}$ tend vers une limite quand $n \to \infty$. Il est facile de voir que cette notion ne dépend pas de la base $\{v_1,\dots,v_K\}$ choisie.

Si $v_K(n) \neq 0$ pour tout n , il revient au même de dire que pour tout $i \in [1,K-1]$ la suite $v_i(n)/v_K(n)$ tend vers une limite.

Notre but est d'accélérer la convergence de la récurrence (1) (ou même de faire converger des récurrences qui ne convergent pas). Pour cela, on introduit des suites $r_i(n)$ pour $1 \leq i \leq K$ et on modifie la suite v en posant :

$$(2) \qquad v'(n) = \sum_{i=1}^{K} r_i(n+K+1-i)v(n+K-i) \ .$$

Si les r_i sont choisis de façon judicieuse, les $v'(n)$ convergeront plus vite que les $v(n)$, et en général vers la même limite. On peut maintenant recommencer le procédé en accélérant $v'(n)$ (grâce à des suites r'_i) et ainsi de suite. On obtient ainsi un tableau de suites avec des récurrences permettant de construire les tableaux.

Enfin pour une certaine famille de récurrences (1), le terme général $v(n)$ peut se calculer explicitement, et nous sommes alors conduits à étudier ces familles de récurrences.

Le plan de ce travail est donc le suivant : après le présent § 1) (introduction) nous mettons en place en détail la construction et les propriétés des suites $v'(n)$ dans le § 2). Dans le § 3) (resp. § 4)) nous étudions en détail le cas $k = 2$ (resp. $k = 3$) avec 3 sous-paragraphes principaux :

A) Traduction des formules générales.

B) Déplacement dans les tableaux.

C) Récurrences explicitement solubles.

2. FORMULES GENERALES

Nous allons montrer qu'il existe une relation du type (1) satisfaite par $v'(n)$. Montrons tout d'abord qu'il existe une matrice

(3) $$M(n) = (m_{ij}(n+1-j))_{0 \leq i \leq K,\ 1 \leq j \leq K}$$

telle que $V' = M(n)V$, où V et V' sont les vecteurs colonnes : $V = {}^t(v(n-1),\dots,v(n-K))$ et $V' = {}^t(v'(n),\dots,v'(n-K))$. En effet, par hypothèse, on a :

$$v'(n-K) = \sum_{j=1}^{K} r_j(n+1-j)v(n-j)$$

donc on peut prendre

(4) $$m_{Kj}(n) = r_j(n) .$$

Si on suppose par récurrence que pour un certain $i \geq 1$ les $m_{ij}(n)$ sont donnés pour $1 \leq j \leq K$ tels que

$$v'(n-i) = \sum_{j=1}^{K} m_{ij}(n+1-j)v(n-j) ,$$

on a

$$\begin{aligned} v'(n-(i-1)) = v'(n+1-i) &= \sum_{j=1}^{K} m_{ij}(n+2-j)v(n+1-j) \\ &= m_{i1}(n+1)\sum_{j=1}^{K} a_j(n+1-j)v(n-j) + \sum_{j'=1}^{K-1} m_{ij'+1}(n+1-j')v(n-j') \\ &= \sum_{j=1}^{K} m_{i-1j}(n+1-j)v(n-j) \end{aligned}$$

en posant :

(5) $\quad m_{i-1j}(n) = a_j(n)m_{i1}(n+j) + m_{ij+1}(n)$

avec par convention $m_{iK+1}(n) = 0$.

Si on appelle $\mathcal{D}_i(n)$ le déterminant extrait de la matrice $M(n)$ en supprimant la ligne i (pour $0 \leq i \leq K$) alors de l'égalité $V' = M(n)V$ on tire (en général)

$$\sum_{i=0}^{K} (-1)^i v'(n-i)\mathcal{D}_i(n) = 0 .$$

Si $\mathcal{D}_0(n) \neq 0$ on a donc :

(6) $$v'(n) = \sum_{i=1}^{K} a'_i(n+1-i)v'(n-i) \quad \text{avec} \quad a'_i(n) = (-1)^{i-1}\mathcal{D}_i(n+i-1)/\mathcal{D}_0(n+i-1)$$

ce qui est bien une relation analogue à (1).

Remarquons que

$$\mathcal{D}_K(n) = |m_{ij}(n+1-j)|_{0\leq i\leq K-1,\ 1\leq j\leq K} = |a_j(n+1-j)m_{i1}(n+1) + m_{ij+1}(n+1-j)|_{\substack{1\leq i\leq K \\ 1\leq j\leq K}}$$
$$= (-1)^{K-1}a_K(n+1-K)\,|m_{ij}(n+2-j)|_{1\leq i\leq K,\ 1\leq j\leq K}$$

d'où les relations :

(7) $$\mathcal{D}_K(n) = (-1)^{K-1}a_K(n+1-K)\mathcal{D}_0(n+1)$$
$$a'_K(n) = a_K(n)\mathcal{D}_0(n+K)/\mathcal{D}_0(n+K-1) .$$

3. LE CAS $K=2$

A) TRADUCTION DES FORMULES GENERALES.

On pose ici $a_1(n) = a(n)$, $a_2(n) = b(n)$. On a donc :

(1_2) $\quad v(n) = a(n)v(n-1) + b(n-1)v(n-2)$.

D'autre part, comme on ne s'intéresse qu'aux quotients de suites v vérifiant la même récurrence, on peut supposer en perdant peu de généralité que $r_1(n) = 1$. On pose alors $r_2(n) = r(n)$, donc

$(2_2)\qquad v'(n) = v(n+1) + r(n+1)v(n)\ .$

On a :

$$(3_2)\qquad M(n) = \begin{pmatrix} a(n)(a(n+1)+r(n+1)) + b(n) & b(n-1)(a(n+1)+r(n+1)) \\ a(n) + r(n) & b(n-1) \\ 1 & r(n-1) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$(4_2)\qquad \begin{aligned} \mathcal{D}_0(n) &= r(n-1)(a(n)+r(n)) - b(n-1) \\ \mathcal{D}_1(n) &= (a(n)r(n-1)-b(n-1))(a(n+1)+r(n+1)) + b(n)r(n-1) \\ &= \mathcal{D}_0(n)(a(n+1)+r(n+1)) - \mathcal{D}_0(n+1)r(n-1) \\ \mathcal{D}_2(n) &= -\mathcal{D}_0(n+1)b(n-1)\ . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(5_2)\qquad \begin{aligned} v'(n) &= a'(n)v'(n-1) + b'(n-1)v'(n-2) \quad \text{avec} \\ a'(n) &= a(n+1) + r(n+1) - r(n-1)\mathcal{D}_0(n+1)/\mathcal{D}_0(n) \\ b'(n) &= b(n)\mathcal{D}_0(n+2)/\mathcal{D}_0(n+1)\ . \end{aligned}$$

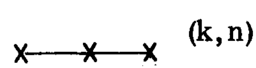
B) DEPLACEMENT DANS LES TABLEAUX.

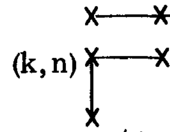
Nous rajoutons maintenant un indice k pour indiquer le nombre de fois où la suite initiale $(k=0)$ a été accélérée. Par définition, on a donc :

$$(6_2)\qquad \begin{array}{lll} v(0,n) = v(n) & a(0,n) = a(n) & b(0,n) = b(n) \\ r(1,n) = r(n) & m_{ij}(1,n) = m_{ij}(n) & \mathcal{D}_i(1,n) = \mathcal{D}_i(n) \end{array}$$

et les relations de récurrences (1_2), (2_2) et (5_2) se traduisent de la façon suivante (noter que chaque récurrence est accompagnée d'un petit diagramme autoexplicatif, la convention étant que les droites horizontales sont à k constant, les droites verticales à n constant) :

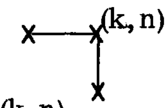
$$(7_2)\qquad \begin{aligned} v(k,n) &= a(k,n)v(k,n-1) + b(k,n-1)v(k,n-2) \\ v(k+1,n) &= v(k,n+1) + r(k+1,n+1)v(k,n) \\ a(k+1,n) &= a(k,n+1) + r(k+1,n+1) - r(k+1,n-1)\mathcal{D}_0(k+1,n+1)/\mathcal{D}_0(k+1,n) \\ b(k+1,n) &= b(k,n)\mathcal{D}_0(k+1,n+2)/\mathcal{D}_0(k+1,n+1)\ . \end{aligned}$$



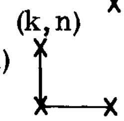


A partir des deux premières relations de récurrence ci-dessus on peut trouver des relations de récurrence entre trois éléments quelconques du tableau, en procédant par élimination. Citons entre autres :

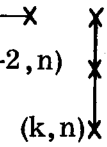
$$v(k+1,n) = (a(k,n+1)+r(k+1,n+1))v(k,n) + b(k,n)v(k,n-1)$$



$$(8_2) \qquad v(k+1,n+1) = (a(k,n+2)+r(k+1,n+2))v(k+1,n) - \mathcal{B}_0(k+1,n+1)v(k,n)$$



$$v(k,n) = (a(k-2,n+2)+r(k-1,n+2)+r(k,n+1))v(k-1,n) - \mathcal{B}_0(k-1,n+2)v(k-2,n)$$



Enfin, on peut obtenir la récurrence diagonale en combinant les deux premières récurrences de (8_2). Si on pose

$$d_1(k,n) = a(k,n+1) + r(k+1,n+1) \qquad d_2(k,n) = b(k,n)$$

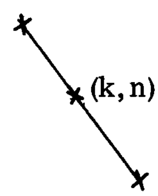
$$d_3(k,n) = d_1(k,n+1) \qquad d_4(k,n) = -\mathcal{B}_0(k+1,n+1) \qquad \text{alors}$$

$$(9_2) \qquad v(k+1,n+1) = d_5(k,n)v(k,n) + d_6(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

$$d_5(k,n) = d_1(k,n)d_3(k,n) + d_4(k,n) + \frac{d_2(k,n)d_3(k,n)}{d_3(k-1,n-1)}$$

$$d_6(k,n) = -\frac{d_2(k,n)d_3(k,n)d_4(k-1,n-1)}{d_3(k-1,n-1)} \quad .$$



Remarque (voir § 4) homogénéité : $a(n) = L$, $b(n) = L^2$, $r(n) = L$, $\mathcal{B}_i(n) = L^{2+i}$, $d_1 = L$, $d_2 = L^2$, $d_3 = L$, $d_4 = L^2$, $d_5 = L^2$, $d_6 = L^4$, $v(k,n) = L^{k+n}$.

C) <u>RECURRENCES EXPLICITEMENT SOLUBLES.</u>

Un cas où la récurrence (1_2) est explicitement soluble se produit quand elle est de la forme :

$$v(n) - f(n)v(n-1) = g(n-1)(v(n-1)-f(n-1)v(n-2)) \ .$$

En effet, dans ce cas, si on pose $u(n) = v(n+1) - f(n+1)v(n)$, on a $u(n) = g(n)u(n-1)$ donc si pour toute fonction arithmétique f on pose $f!(n) = \prod_{i=1}^{n} f(i)$ et $f!(0) = 1$ on a donc $u(n) = g!(n)u(0)$ d'où

$$\frac{v(n)}{f!(n)} = \frac{v(n-1)}{f!(n-1)} + \frac{g!(n-1)}{f!(n)} u(0)$$

donc par récurrence

$$\frac{v(n)}{f!(n)} = v(0) + u(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)} .$$

En résumé, si on pose

$$u(0) = v(1) - f(1)v(0) \text{ , on a}$$

$$\frac{v(n)}{f!(n)} = v(0) + u(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)}$$

(10_2) et $v(n)$ satisfait à la récurrence :

$$v(n) = a(n)v(n-1) + b(n-1)v(n-2)$$

avec $a(n) = f(n) + g(n-1)$, $b(n) = -f(n)g(n)$.

Comme base de cette récurrence, nous choisirons v_1 pour que $v_1(0) = 0$, $u_1(0) = 1$, soit encore :

$$v_1(0) = 0 , \quad v_1(1) = 1$$

et v_2 pour que $v_2(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, soit encore

$$v_2(0) = 1 , \quad v_2(1) = f(1) .$$

La solution générale de la récurrence est alors :

$$v(n) = v(0)v_2(n) + u(0)v_1(n) \quad , \quad (u(0) = v(1) - f(1)v(0))$$

et la "limite", si elle existe, de la récurrence est la limite de la suite $v_1(n)/v_2(n)$.

Dans le cas où on a des tableaux de récurrences, on peut alors écrire :

$$v_1(n) = f!(n)P_2(k,n)\sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)} + g!(n)P_1(k,n)$$

$$v_2(n) = f!(n)P_2(k,n)$$

(11_2) où P_2 et P_1 vérifient les récurrences :

$$P_2(0,n) = 1 , \quad P_1(0,n) = 0$$

$$P_2(k+1,n) = f(n+1)P_2(k,n+1) + r(k+1,n+1)P_2(k,n)$$

$$P_1(k+1,n) = g(n+1)P_1(k,n+1) + r(k+1,n+1)P_1(k,n) + P_2(k,n+1)$$

Remarque. - Le choix de $r(n) = -f(n)$ conduit à $\mathcal{D}_0(n) = \mathcal{D}_1(n) = \mathcal{D}_2(n) = 0$.

4. LE CAS K = 3

A) TRADUCTION DES FORMULES GENERALES.

On pose ici $a_1(n) = a(n)$, $a_2(n) = b(n)$, $a_3(n) = c(n)$. On a donc :

(1_3) $$v(n) = a(n)v(n-1) + b(n-1)v(n-2) + c(n-2)v(n-3) .$$

D'autre part, on prend $r_1(n) = 1$ (cf. § 3) et on pose $r_2(n) = r(n)$, $r_3(n) = s(n)$, donc

(2_3) $$v'(n) = v(n+2) + r(n+2)v(n+1) + s(n+1)v(n) .$$

On a :

$$m_{31}(n) = 1 , \quad m_{32}(n) = r(n) , \quad m_{33}(n) = s(n)$$
$$m_{21}(n) = a(n)+r(n) , \quad m_{22}(n) = b(n)+s(n) , \quad m_{23}(n) = c(n)$$

(3_3) $$\begin{cases} m_{11}(n) = a(n)m_{21}(n+1)+m_{22}(n) \\ m_{12}(n) = b(n)m_{21}(n+2)+m_{23}(n) \\ m_{13}(n) = c(n)m_{21}(n+3) \end{cases} ; \quad \begin{cases} m_{01}(n) = a(n)m_{11}(n+1)+m_{12}(n) \\ m_{02}(n) = b(n)m_{11}(n+2)+m_{13}(n) \\ m_{03}(n) = c(n)m_{11}(n+3) \end{cases}$$

$$M(n) = \begin{pmatrix} m_{01}(n) & m_{02}(n-1) & m_{03}(n-2) \\ m_{11}(n) & m_{12}(n-1) & m_{13}(n-2) \\ a(n)+r(n) & b(n-1)+s(n-1) & c(n-2) \\ 1 & r(n-1) & s(n-2) \end{pmatrix}$$

Des combinaisons de colonnes évidentes montrent que :

$$\mathcal{D}_0(n) = \begin{vmatrix} m_{21}(n+1) & m_{22}(n) & m_{23}(n-1) \\ 1 & r(n) & s(n-1) \\ s(n-2) & c(n-2)-a(n)s(n-2) & c(n-2)r(n-1)-b(n-1)s(n-2) \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_1(n) = \begin{vmatrix} m_{11}(n+1) & m_{12}(n) & m_{13}(n-1) \\ 1 & r(n) & s(n-1) \\ s(n-2) & c(n-2)-a(n)s(n-2) & c(n-2)r(n-1)-b(n-1)s(n-2) \end{vmatrix}$$

(4_3)

$$\mathcal{D}_2(n) = \begin{vmatrix} m_{11}(n+1) & m_{12}(n) & m_{13}(n-1) \\ m_{21}(n+1) & m_{22}(n) & m_{23}(n-1) \\ s(n-2) & c(n-2)-a(n)s(n-2) & c(n-2)r(n-1)-b(n-1)s(n-2) \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_3(n) = c(n-2)\mathcal{D}_0(n+1)$$

$$a'(n) = \mathcal{D}_1(n)/\mathcal{D}_0(n) \ , \quad b'(n) = -\mathcal{D}_2(n+1)/\mathcal{D}_0(n+1) \ ,$$

$$c'(n) = c(n)\mathcal{D}_0(n+3)/\mathcal{D}_0(n+2) \ .$$

B) DEPLACEMENT DANS LES TABLEAUX.

(cf. § 3B). On pose :

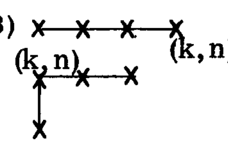
$$v(0,n) = v(n) \ , \quad a(0,n) = a(n) \ , \quad b(0,n) = b(n) \ , \quad c(0,n) = c(n)$$

$$r(1,n) = r(n) \ , \quad s(1,n) = s(n) \ , \quad m_{ij}(1,n) = m_{ij}(n) \ , \quad \mathcal{D}_i(1,n) = \mathcal{D}_i(n) \ .$$

Les relations de récurrence (1_3), (2_3) et (4_3) se traduisent de la façon suivante :

$$v(k,n) = a(k,n)v(k,n-1) + b(k,n-1)v(k,n-2) + c(k,n-2)v(k,n-3)$$

$$v(k+1,n) = v(k,n+2) + r(k+1,n+2)v(k,n+1) + s(k+1,n+1)v(k,n)$$



(5_3)

$$a(k+1,n) = \mathcal{D}_1(k+1,n)/\mathcal{D}_0(k+1,n)$$

$$b(k+1,n) = \mathcal{D}_2(k+1,n+1)/\mathcal{D}_0(k+1,n+1)$$

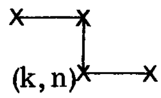
$$c(k+1,n) = c(k,n)\mathcal{D}_0(k+1,n+3)/\mathcal{D}_0(k+1,n+2)$$

A partir de ces récurrences, on obtient par élimination les récurrences suivantes :

$$v(k,n+1) = d_1(k,n)v(k,n) + d_2(k,n)v(k-1,n) + d_3(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

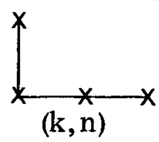
$$(6_3)\qquad \begin{aligned} d_1(k,n) &= m_{11}(k,n+2)/m_{21}(k,n+2) \\ d_2(k,n) &= (m_{21}(k,n+2)m_{12}(k,n+1)-m_{11}(k,n+2)m_{22}(k,n+1))/m_{21}(k,n+2) \\ d_3(k,n) &= (m_{21}(k,n+2)m_{13}(k,n)-m_{11}(k,n+2)m_{23}(k,n))/m_{21}(k,n+2) \end{aligned}$$



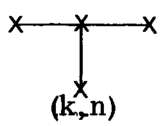
$$v(k,n+1) = d_4(k,n)v(k,n) + d_5(k,n)v(k,n-1) + d_6(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

$$(7_3)\qquad \begin{aligned} d_4(k,n) &= (m_{11}(k,n+2)r(k,n+1) - m_{12}(k,n+1))/d_0(k,n) \\ d_5(k,n) &= (m_{21}(k,n+2)m_{12}(k,n+1) - m_{11}(k,n+2)m_{22}(k,n+1))/d_0(k,n) \\ d_6(k,n) &= \mathcal{D}_0(k,n+1)/d_0(k,n) \\ d_0(k,n) &= m_{21}(k,n+2)r(k,n+1) - m_{22}(k,n+1) \end{aligned}$$



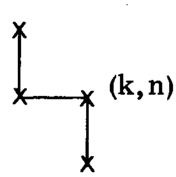
$$(8_3)\qquad v(k,n) = m_{21}(k,n+2)v(k-1,n+1) + m_{22}(k,n+1)v(k-1,n) + m_{23}(k,n)v(k-1,n-1)$$



$$v(k+1,n) = d_7(k,n)v(k,n) + d_8(k,n)v(k,n-1) + d_9(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

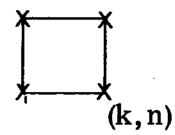
$$(9_3)\qquad \begin{aligned} d_7(k,n) &= d_4(k,n)m_{21}(k+1,n+2) + m_{22}(k+1,n+1) \\ d_8(k,n) &= d_5(k,n)m_{21}(k+1,n+2) + m_{23}(k+1,n) \\ d_9(k,n) &= d_6(k,n)m_{21}(k+1,n+2) \end{aligned}$$



$$v(k,n) = d_{10}(k,n)v(k,n-1) + d_{11}(k,n)v(k-1,n) + d_{12}(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

$$(10_3)\qquad \begin{aligned} d_{10}(k,n) &= d_5(k,n)/(d_1(k,n)-d_4(k,n)) \\ d_{11}(k,n) &= -d_2(k,n)/(d_1(k,n)-d_4(k,n)) \\ d_{12}(k,n) &= (d_6(k,n)-d_3(k,n))/(d_1(k,n)-d_4(k,n)) \end{aligned}$$

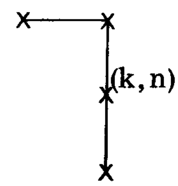


Remarque : $d_1(k,n) - d_4(k,n) = d_5(k,n)/m_{21}(k,n+2)$

$$v(k+1,n) = d_{13}(k,n)v(k,n) + d_{14}(k,n)v(k-1,n) + d_{15}(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

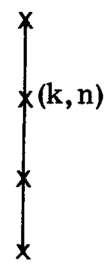
$$(11_3)\qquad \begin{aligned} d_{13}(k,n) &= d_7(k,n) + d_8(k,n)/d_{10}(k,n) \\ d_{14}(k,n) &= -d_8(k,n)d_{11}(k,n)/d_{10}(k,n) \\ d_{15}(k,n) &= d_9(k,n) - d_8(k,n)d_{12}(k,n)/d_{10}(k,n) \end{aligned}$$



$$v(k+2,n) = d_{16}(k,n)v(k+1,n) + d_{17}(k,n)v(k,n) + d_{18}(k,n)v(k-1,n)$$

avec

$$(12_3)\qquad \begin{aligned} d_{16}(k,n) &= d_{13}(k+1,n) - \frac{d_{12}(k,n)d_{15}(k+1,n)}{d_{10}(k,n)d_{15}(k,n)} \\ d_{17}(k,n) &= d_{14}(k+1,n) + \frac{d_{15}(k+1,n)(d_{15}(k,n)+d_{12}(k,n)d_{13}(k,n))}{d_{10}(k,n)d_{15}(k,n)} \\ d_{18}(k,n) &= \frac{d_{15}(k+1,n)(d_{12}(k,n)d_{14}(k,n)-d_{11}(k,n)d_{15}(k,n))}{d_{10}(k,n)d_{15}(k,n)} \end{aligned}$$

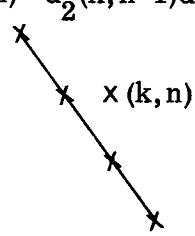


Enfin on peut obtenir la récurrence diagonale en combinant les récurrences (6_3) et (9_3) :

$$v(k+2,n+1) = d_{19}(k,n)v(k+1,n) + d_{20}(k,n)v(k,n-1) + d_{21}(k,n)v(k-1,n-2)$$

avec

$$(13_3)\qquad \begin{aligned} d_{19}(k,n) &= d_7(k+1,n+1)d_1(k+1,n) + d_8(k+1,n+1) + d_2(k,n-1)d_{23}(k,n) \\ d_{20}(k,n) &= d_7(k+1,n+1)d_3(k+1,n) + (d_1(k,n-1)d_9(k,n) - d_2(k,n-1)d_8(k,n))d_{23}(k,n) \\ d_{21}(k,n) &= d_3(k,n-1)d_9(k,n)d_{23}(k,n) \\ d_{23}(k,n) &= \frac{d_7(k+1,n+1)d_2(k+1,n) + d_9(k+1,n+1)}{d_7(k,n)d_2(k,n-1) + d_9(k,n)} \end{aligned}$$



Remarque. - Pour ne pas trop se perdre dans les formules, il est bon de se rappeler qu'il y a une certaine homogénéité : si L est une dimension physique, alors :

$$a(n) = L\ ,\quad b(n) = L^2\ ,\quad c(n) = L^3\ ,\quad r(n) = L\ ,\quad s(n) = L^2$$

$m_{ij}(n) = L^{j-i+2}$, $\mathcal{B}_i(n) = L^{6+i}$ et d'autre part :

$$v(k,n) = L^{2k+n}$$

$$\begin{cases} d_1 = L \\ d_2 = L^3 \\ d_3 = L^4 \end{cases} ;\quad \begin{cases} d_4 = L \\ d_5 = L^2 \\ d_6 = L^4 \end{cases} ;\quad \begin{cases} d_7 = L^2 \\ d_8 = L^3 \\ d_9 = L^5 \end{cases} ;\quad \begin{cases} d_{10} = L \\ d_{11} = L^2 \\ d_{12} = L^3 \end{cases} ;\quad \begin{cases} d_{13} = L^2 \\ d_{14} = L^4 \\ d_{15} = L^5 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} d_{16} = L^2 \\ d_{17} = L^4 \\ d_{18} = L^6 \end{cases} \quad \text{enfin} \quad d_{19} = L^3\ ,\quad d_{20} = L^6\ ,\quad d_{21} = L^9\ .$$

C) RECURRENCES EXPLICITEMENT SOLUBLES.

Un cas où la récurrence (1_3) est explicitement soluble se produit quand elle est de la forme

$$\begin{aligned}&(v(n)-(f(n)+g(n-1))v(n-1)+f(n-1)g(n-1)v(n-2))\\ &= h(n-2)(v(n-1)-(f(n-1)+g(n-2))v(n-2)+f(n-2)g(n-2)v(n-3))\ .\end{aligned}$$

En effet, dans ce cas, si on pose $u(n) = v(n+1)-f(n+1)v(n)$ on a vu au paragraphe précédent que

$$v(n)-(f(n)+g(n-1))v(n-1)+f(n-1)g(n-1)v(n-2) = u(n-1)-g(n-1)u(n-2)$$

donc si on pose $t(n) = u(n+1) - g(n+1)u(n)$, la récurrence s'écrit $t(n) = h(n)t(n-1)$ d'où :

$$t(n) = h!(n)t(0) \quad \text{donc (cf. § 3))}$$

$$\frac{u(n)}{g!(n)} = u(0) + t(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{h!(i-1)}{g!(i)}\ , \text{ d'où}$$

$$\frac{v(n)}{f!(n)} = v(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{u(i-1)}{f!(i)} = v(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)}\left(u(0)+t(0)\sum_{j=1}^{i-1}\frac{h!(j-1)}{g!(j)}\right)\ .$$

En résumé, si on pose :

$$u(0) = v(1) - f(1)v(0) \ , \quad t(0) = v(2) - (f(2)+g(1))v(1) + f(1)g(1)v(0) \ ,$$

on a :

$$\frac{v(n)}{f!(n)} = v(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)} \left(u(0) + t(0) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{h!(j-1)}{g!(j)} \right)$$

(14_3) et $v(n)$ satisfait à la récurrence

$$v(n) = a(n)v(n-1) + b(n-1)v(n-2) + c(n-2)v(n-3) \quad \text{avec}$$

$$a(n) = f(n) + g(n-1) + h(n-2)$$

$$b(n) = -\,(f(n)g(n) + h(n-1)f(n) + h(n-1)g(n-1))$$

$$c(n) = f(n)g(n)h(n) \ .$$

Comme base de cette récurrence, nous choisirons v_1 pour que $v_1(0) = 0$, $u_1(0) = 0$, $t_1(0) = 1$, soit encore :

$$v_1(0) = 0 \ , \quad v_1(1) = 0 \ , \quad v_1(2) = 1$$

v_2 pour que $v_2(0) = 0$, $u_2(0) = 1$, $t_2(0) = 0$, soit encore

$$v_2(0) = 0 \ , \quad v_2(1) = 1 \ , \quad v_2(2) = f(2) + g(1)$$

v_3 pour que $v_3(0) = 1$, $u_3(0) = 0$, $t_3(0) = 0$, soit encore

$$v_3(0) = 1 \ , \quad v_3(1) = f(1) \ , \quad v_3(2) = f(1)f(2) \ .$$

La solution générale de la récurrence est alors :

$$v(n) = v(0)v_3(n) + u(0)v_2(n) + t(0)v_1(n)$$

$$(u(0) = v(1) - f(1)v(0) \ , \quad t(0) = v(2) - (f(2)+g(1))v(1) + f(1)g(1)v(0))$$

et la "limite" si elle existe de la récurrence peut être prise comme étant le couple

$$\left(\lim_{n\to\infty} v_1(n)/v_3(n) \ , \ \lim_{n\to\infty} v_2(n)/v_3(n) \right) \ .$$

Dans le cas où on a des tableaux de récurrences, on peut alors écrire :

$$v_1(n) = f!(n)\, P_3(k,n)\sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{h!(j-1)}{g!(j)} + g!(n)P_2(k,n)\sum_{i=1}^{n} \frac{h!(i-1)}{g!(i)} + h!(n)P_1(k,n)$$

$$v_2(n) = f!(n)P_3(k,n)\sum_{i=1}^{n} \frac{g!(i-1)}{f!(i)} + g!(n)P_2(k,n)$$

$v_3(n) = f!(n)P_3(k,n)$, où P_3, P_2, P_1 vérifient les récurrences :

$$(15_3) \quad P_3(0,n) = 1 \;,\quad P_2(0,n) = P_1(0,n) = 0$$

$$P_3(k+1,n) = f(n+2)f(n+1)P_3(k,n+2) + r(k+1,n+2)f(n+1)P_3(k,n+1) + s(k+1,n+1)P_3(k,n)$$

$$\begin{aligned} P_2(k+1,n) = {} & g(n+2)g(n+1)P_2(k,n+2) + r(k+1,n+2)g(n+1)P_2(k,n+1) + s(k+1,n+1)P_2(k,n) \\ & + (f(n+2)+g(n+1))P_3(k,n+2) + r(k+1,n+2)P_3(k,n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(k+1,n) = {} & h(n+2)h(n+1)P_1(k,n+2) + r(k+1,n+2)h(n+1)P_1(k,n+1) + s(k+1,n+1)P_1(k,n) \\ & + P_3(k,n+2) + (g(n+2)+h(n+1))P_2(k,n+2) + r(k+1,n+2)P_2(k,n+1) \end{aligned}$$

Remarques. -

1) Le choix de $r(n) = -(f(n)+x(n-1))$, $s(n) = f(n)x(n)$ où x est quelconque, conduit à $\mathcal{D}_0(n) = \mathcal{D}_1(n) = \mathcal{D}_2(n) = \mathcal{D}_3(n) = 0$.

2) Les suites v_2 et v_3 sont solution de l'équation de récurrence avec $K = 2$ (n° 10_2). Donc si les $r_2(k,n)$ forment le tableau de récurrences déduites de cette récurrence initiale par

$$v(k+1,n) = v(k,n+1) + r_2(k+1,n+1)v(k,n)$$

on peut choisir dans le cas $K = 3$ d'utiliser deux fois le procédé d'accélération pour $K = 2$, c'est-à-dire d'écrire

$$(16_3) \quad \begin{aligned} & v(k+2,n) = v(k,n+2) + r_3(k+1,n+2)v(k,n+1) + s_3(k+1,n+1)v(k,n) \;, \\ & \text{où } r_3(k,n) = r_2(k,n) + r_2(k+1,n-1) \\ & \phantom{\text{où }} s_3(k,n) = r_2(k,n)r_2(k+1,n) \end{aligned}$$

Nous donnons dans la suite un certain nombre d'exemples. Les exemples pour $k \geq 3$ n'auraient pu être trouvés * sans l'aide du système de calcul formel REDUCE implanté au centre interuniversitaire de calcul de Grenoble. Je tiens à remercier tout particulièrement E. Tournier et Y. Siret pour leur aide dans l'utilisation de ce système.

---

* voir l'appendice de l'exemple 1_3 pour l'expression la plus simple qui intervient pour $k \geq 3$.

EXEMPLE 1_2

Considérons la série hypergéométrique confluente

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} x^n$$

pour $x \in [-1,1[$. Si on prend $f(n) = \beta + n - 1$, $g(n) = x(\alpha+n)$ on a donc

$$\frac{v(n)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} = v(0) + u(0) \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+i-1)} .$$

En particulier on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v(n)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} = v(0) + \frac{F_{\alpha,\beta}(x) - 1}{\alpha x} u(0) .$$

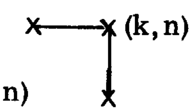
Dans le cas particulier où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v(n)}{n!} = v(0) - u(0) \frac{\mathrm{Log}(1-x)}{x} .$$

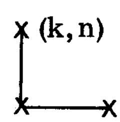
On cherche à obtenir $\mathcal{D}_0(k;n)$ ne dépendant pas de n et non nul. On constate sans difficulté par récurrence qu'il n'y a qu'une seule solution :

$$\begin{aligned}
r(k,n) &= -x(n-k+\alpha) \\
a(k,n) &= x(n-k+\alpha-1) + n + k + \beta - 1 \\
b(k,n) &= -x(n+\alpha)(n+\beta-1) \\
\mathcal{D}_0(k,n) &= xk(k+\beta-\alpha-1) .
\end{aligned}$$

Les récurrences (8_2) s'écrivent :

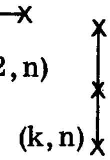


$$v(k+1,n) = (n+k+\beta)v(k,n) - x(n+\alpha)(n-\beta-1)v(k,n-1)$$



$$v(k+1,n+1) = (n+k+\beta+1)v(k+1,n) - x(k+1)(k+\beta-\alpha)v(k,n)$$

$$v(k,n) = (n+k+\beta-1-x(n-k+\alpha+1))v(k-1,n) - x(k-1)(k+\beta-\alpha-2)v(k-2,n)$$



Pour compléter ces récurrences, il suffit de connaître $v(k,n)$ pour $0 \le k,n \le 1$.

Les valeurs sont les suivantes pour les suites v_1, v_2 :

$v_1(k,n)$

$k \backslash n$	0	1
0	0	1
1	1	$\beta+1$

$v_2(k,n)$

$k \backslash n$	0	1
0	1	β
1	$\beta-x\alpha$	$\beta(\beta+1-x(\alpha+1))$

En prenant en particulier $n = k+1$ dans les deux premières récurrences, on en déduit la fraction continue suivante, due à Gauss :

$$F_{\alpha,\beta}(x) = 1 + \cfrac{\alpha x}{\beta - \cfrac{x.\beta.(\alpha+1)}{\beta+1 - \cfrac{x.1.(\beta-\alpha)}{\beta+2 - \cfrac{x(\beta+1)(\alpha+2)}{\beta+3 - \cfrac{x.2.(1+\beta-\alpha)}{\beta+4 - \dots}}}}}$$

La récurrence diagonale (9_2) s'écrit :

$$v(k+1,n+1) = d_5(k,n)v(k,n) + d_6(k,n)v(k-1,n-1)$$

avec

$$d_5(k,n) = (n+k+\beta)(n+k+\beta+1) - x(k+1)(k+\beta-\alpha) - \frac{x(n+\alpha)(n+\beta-1)(n+k+\beta+1)}{n+k+\beta-1}$$

$$d_6(k,n) = -\frac{x^2(n+\alpha)(n+\beta-1)(n+k+\beta+1)k(k+\beta-\alpha-1)}{n+k+\beta-1} .$$

Des théorèmes généraux montrent que le comportement de ce genre de récurrence dépend essentiellement de l'équation caractéristique

$$X^2 - 2(2-x)X + x^2 = 0$$

dont les racines sont $X_1 = (1+\sqrt{1-x})^2$ et $X_2 = (1-\sqrt{1-x})^2$. Puisque $x \in [-1,1[$ on a $0 < X_2 < 1 < X_1$. On en déduit qu'il existe des constantes B et C_i $(i=1,2)$ telles que, quand $k \to \infty$

$$w_i(k) = v_i(k,k) \sim k!^2 X_1^k k^B C_i$$

avec $X_1 = (1+\sqrt{1-x})^2$.

On en déduit immédiatement qu'il existe B' et C' telles que

$$\left|\frac{w_1(k)}{w_2(k)} - \frac{F_{\alpha,\beta}(x) - 1}{\alpha x}\right| \sim \left(\frac{x}{X_1}\right)^{2k} k^{B'} C' .$$

CALCUL EXPLICITE DE $v_i(k,n)$.

D'après (11_2) on a :

$$v_2(k,n) = \frac{(\beta+n-1)!}{(\beta-1)!} P_2(k,n)$$

$$v_1(k,n) = \frac{(\beta+n-1)!}{(\beta-1)!} P_2(k,n) \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)} + x^n \frac{(\alpha+n)!}{\alpha!} P_1(k,n)$$

où P_1 et P_2 satisfont aux récurrences décrites en (11_2). Grâce à un calcul par récurrence, court pour P_2 mais assez long pour P_1 on montre que l'on a :

$$\begin{pmatrix} P_1(k,n) \\ P_2(k,n) \end{pmatrix} = k! \sum_{m=0}^{k} x^{k-m} (1-x)^m \binom{k+\beta-\alpha-1}{k-m} \binom{n+\beta+m-1}{m} \begin{pmatrix} \alpha_1(m,n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha_1(m,n) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(-1)^{\ell-1}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)\ldots(\beta-\alpha+\ell-2)x^{\ell-1}}{(1-x)^{\ell}(n+\beta)(n+\beta+1)\ldots(n+\beta+\ell-1)} .$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - $v_1(k,n)$ et $v_2(k,n)$ sont des polynômes en x dont les degrés sont majorés par les quantités suivantes :

$$d^o v_1(k,n) \le \sup(k,n) - 1$$
$$d^o v_2(k,n) \le k .$$

Démonstration. - Vu les formules explicites trouvées plus haut, il est clair que $d^o v_2(k,n) = d^o P_2(k,n) \le k$. Montrons la première majoration par récurrence sur k . C'est vrai pour $k = 0$. Soit $k \ge 1$ donné et supposons la majoration vraie pour $k-1$ (et tout n) ; démontrons là pour k . Nous raisonnons par récurrence sur n : si $n = 0$, on voit que $d^o v_1(k,0) = d^o P_1(k,0) \le k-1$. Supposons $n \ge 1$ et que la majoration soit démontrée pour $n-1$. Pour la montrer pour n on utilise la récurrence

$$v_1(k,n) = (n+k+\beta-1)v_1(k-1,n) - x(n+\alpha)(n+\beta-1)v_1(k-1,n-1)$$

et on en déduit :

$$d^o v_1(k,n) \le \sup(\sup(k-1,n)-1, \sup(k,n)-1)$$
$$\le \sup(k,n)-1$$

d'où la proposition en utilisant notre double récurrence.

Remarque. - On déduit aisément de ce qui précède que pour $n \ge k$, $\frac{v_1(k,n)}{v_2(k,n)}$ est l'approximant de Padé (k,n) de $\frac{F_{\alpha,\beta}(x)-1}{\alpha x}$.

APPLICATIONS NUMERIQUES.

Etant donné que nous sommes tombés sur les approximants de Padé, et que nous en avons une formule explicite, il n'est pas difficile de voir que l'on peut retrouver tous les résultats et mesures d'irrationalité de Beukers [ ]. Donnons simplement deux exemples : $\sqrt[3]{2}$ et $\mathrm{Log}(1-x)$.

1er cas particulier.

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 1, \quad x = \frac{P}{Q} \quad \text{avec } 3|P.$$

On remarque que

$$3^{[\frac{3}{2}(k-m)]}\binom{k-\frac{1}{3}}{k-m} \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit aisément que $Q^k 3^{[k/2]} w_2(k)/k!^2 \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, d'après les formules explicites, $P_1(k,k)$ est un polynôme en x et d'après la proposition 1, $d^o v_1(k,k) \le k-1$. On en déduit en développant $(1-x)^m$ et après un regroupement que

$$w_1(k)/k!^2 = 3\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j x^{k-m+j-1}\binom{k-\frac{1}{3}}{k-m}\binom{k+m}{m}\left(\binom{m-\frac{1}{3}}{j}-\binom{m}{j}\right).$$

On déduit à nouveau du fait que $3^{[\frac{3}{2}(k-m)]}\binom{k-\frac{1}{3}}{k-m} \in \mathbb{Z}$ et $3^{[\frac{3}{2}j]}\binom{m-\frac{1}{3}}{j} \in \mathbb{Z}$ que $Q^{k-1}3^{[k/2]}w_1(k)/k!^2 \in \mathbb{Z}$. Posons donc pour $i = 1,2$:

$$p_i(k) = Q^k 3^{[k/2]} w_i(k)/k!^2.$$

D'après ce qui précède $p_i(k)$ est entier pour $i = 1,2$ et pour tout k, et on a aussi $\frac{x}{3}p_1(k) \in \mathbb{Z}$. D'autre part, d'après ce qui a été vu plus haut :

$$\left|\frac{\frac{x}{3}p_1(k)+p_2(k)}{p_2(k)} - F_{\frac{1}{3},1}(x)\right| \sim \left(\frac{x}{(1+\sqrt{1-x})^2}\right)^{2k} k^{B'} C''$$

et $F_{\frac{1}{3},1}(x) = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$. Enfin, d'après l'équivalent donné pour w_i on a :

$$p_2(k) \leq (Q\sqrt{3}(1+\sqrt{1-x})^2)^k k^B C_2 \ .$$

Il est facile de déduire de ceci le théorème suivant :

THEOREME A. - Soit $x \in [-1,1[$, $x \neq 0$ un nombre rationnel. Ecrivons $x = \frac{P}{Q}$ avec $P,Q \in \mathbb{Z}$, $Q > 0$, $3|P$. Nous supposons que la condition suivante est satisfaite :

$$Q < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{x}\right)^2 \ .$$

Alors $\sqrt[3]{1-x}$ est irrationnel, et plus précisément pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $a,b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ on ait :

$$\left|\sqrt[3]{(1-x)} - \frac{a}{b}\right| > \frac{C(\epsilon)}{b^{m(x)+\epsilon}}$$

avec $m(x) = \dfrac{2\,\mathrm{Log}((1+\sqrt{1-x})^2/x)}{2\,\mathrm{Log}(\frac{1+\sqrt{1-x}}{x}) - \mathrm{Log}(Q\sqrt{3})}$

Par exemple, si on prend $x = \frac{3}{128}$ (on a bien $3|P$) alors $\sqrt[3]{1-x} = \frac{5}{4\sqrt[3]{2}}$. L'inégalité souhaitée a bien lieu et on obtient :

COROLLAIRE A. - Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a,b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ on ait

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^{2,9471}} \ .$$

Remarque. - La démonstration triviale utilisant le fait que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique de degré 3 donne la minoration $\left|\sqrt[3]{2} - \frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^3}$.

2e cas particulier.

$$\alpha = 0 \ , \quad \beta = 1 \ , \quad x = \frac{P}{Q} \ .$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME B. - <u>Soit</u> $x \in [-1,1[$, $x \neq 0$ <u>un nombre rationnel.</u> <u>Ecrivons</u> $x = \frac{P}{Q}$ <u>avec</u> $P, Q \in \mathbb{Z}$, $Q > 0$. <u>Nous supposons que la condition suivante est satisfaite</u> :

$$Q < \frac{1}{e}\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{x}\right)^2 .$$

<u>Alors</u> $\mathrm{Log}(1-x)$ <u>est irrationnel, et plus précisément pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe une constante</u> $C(\varepsilon) > 0$ <u>telle que pour tout</u> $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ <u>on ait</u> :

$$\left|\mathrm{Log}(1-x) - \frac{a}{b}\right| > \frac{C(\varepsilon)}{b^{m(x)+\varepsilon}}$$

<u>avec</u> $m(x) = \dfrac{2\,\mathrm{Log}((1+\sqrt{1-x})^2/|x|)}{2\,\mathrm{Log}((1+\sqrt{1-x})/|x|) - (1+\mathrm{Log}\,Q)}$.

<u>Démonstration.</u> - Admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME. - <u>Posons</u> $d_k = \text{P.P.C.M.}\ (1,2,\dots,k)$. <u>Alors</u>

$$d_k Q^{k-1} w_1(k)/k!^2 \in \mathbb{Z}$$

$$Q^k w_2(k)/k!^2 \in \mathbb{Z} .$$

Si on pose $p_i(k) = d_k Q^k w_i(k)/k!^2$ on a donc

$$\left|\frac{p_1(k)}{p_2(k)} + \frac{\mathrm{Log}(1-x)}{x}\right| \sim \left(\frac{x}{X_1}\right)^{2k} k^{B'} C'$$

avec $p_1(k)$ et $p_2(k) \in \mathbb{Z}$, $X_1 = (1+\sqrt{1-x})^2$, et d'autre part

$$p_2(k) \sim (QX_1)^k d_k k^B C_1 \quad \text{donc}$$

$$\mathrm{Log}\, p_2(k) \sim k\, \mathrm{Log}(eQX_1) .$$

Le théorème en résulte aisément.

Par exemple, si on prend $x = -1$, l'inégalité souhaitée a bien lieu et on obtient :

COROLLAIRE B. - <u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que pour tout</u> $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ <u>on ait</u>

$$\left|\mathrm{Log}\,2 - \frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^{4,6222}} .$$

Pour mémoire, notons que la récurrence diagonale satisfaite par $w(k) = v(k,k)$ est dans ce cas :

$$w(k+1) = (k+1)(2k+1)(2-x)w(k) - x^2k^3(k+1)w(k-1) .$$

EXEMPLE 1_3

On sait que $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}^2(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} H_{n-1}$ en posant

$H_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$ $\quad (H_0 = 0)$.

I. - <u>CAS PARTICULIER</u> $x = -1$.

En particulier $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}^2 2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} H_{i-1}$.

Si on prend $f(n) = n$, $g(n) = h(n) = -n$, on a donc

$$\frac{v(n)}{n!} = v(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\left(u(0) - t(0)\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j}\right)$$
$$= v(0) + u(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i} + t(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i} H_{i-1} .$$

En particulier, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v(n)}{n!} = v(0) + u(0)\,\mathrm{Log}\,2 + \frac{t(0)}{2}\,\mathrm{Log}^2\,2 .$$

On a : $a(n) = -n+3$

$b(n) = n^2+n-1$

$c(n) = n^3$.

Vu les formules, on cherche à obtenir $\mathcal{D}_0(n)$ constant non nul. Pour cela, et en respectant "l'homogénéité", on pose $r(n) = an+b$, $s(n) = cn^2+dn+e$. $\mathcal{D}_0(n)$ est alors un polynôme de degré 6 en n (voir l'appendice I pour son expression complète). Son terme de plus haut degré est $+n^6(a+c+1)(a-c-1)^2$, donc on doit avoir $a = c+1$ ou $a = -c-1$.

<u>Cas 1.</u>

$a = -c-1$. Le terme dominant est $n^5(c+1)^2(-c+b+d)$ donc $c = -1$ ou $c = d+b$.

<u>Cas 1.1.</u>

Si $c = -1$, $a = 0$ et le terme dominant est $n^3(b+d+1)(b-d+1)^2$ donc $d = -b-1$ ou $d = 1+b$.

Cas 1.1.1.

Si $d = -b-1$ le terme dominant est $n^2(4e)(b+1)^2$, donc on doit avoir $e = 0$ ou $b = -1$.

Cas 1.1.1.1.

Si $e = 0$, on constate que $\mathcal{D}_0(n) = 0$.

Cas 1.1.1.2.

Si $b = -1$, le terme dominant est $2e^2n$, donc $e = 0$, donc $\mathcal{D}_0(n) = 0$.

Cas 1.1.2.

Si $d = 1+b$, le terme dominant est $4n^2(b+1)(b+e+1)$, donc $b = -1$ ou $e = -b-1$.

Cas 1.1.2.1.

Si $b = -1$, alors $d = 0 = -b-1$, voir cas 1.1.1.2.

Cas 1.1.2.2.

Si $e = -b-1$, alors le terme dominant est $-4n(b+1)^2$, donc $b = -1$, voir cas 1.1.1.2.

Cas 1.2.

Si $c = d+b$ le terme dominant est $4n^4e(b+d+1)^2$, donc $e = 0$ ou $d = -b-1$.

Cas 1.2.1.

Si $e = 0$, on constate que $\mathcal{D}_0(n) = 0$.

Cas 1.2.2.

Si $d = -b-1$, alors $c = -1$, voir cas 1.1.1.

Cas 2.

Si $a = +c+1$ le terme dominant est $2n^4(c+1)(b-d+1)^2$, donc $c = -1$ ou $d = 1+b$.

Cas 2.1.

Si $c = -1$, $a = 0$, voir cas 1.1.

Cas 2.2.

Si $d = 1+b$ le terme dominant est $-n^3(c-1)(c+1)(c+2e+2b+3)$, donc $c = -1$ ou $c = 1$ ou $c = -2b-2e-3$.

Cas 2.2.1.

Si $c = -1$, voir cas 2.1.

Cas 2.2.2.

Si $c = 1$ le terme dominant est $n^2(b+e+2)^2$, donc $e = -b-2$. Dans ce cas le terme dominant est $2n(b+3)(b+4)$, donc $b = -3$ ou $b = -4$.

Cas 2.2.2.1.

Si $b = -3$ alors $c = 1$, $d = -2$, $a = +2$, $e = 1$ et on trouve :

$r(n) = 2n-3$, $s(n) = n^2 - 2n + 1$, $\mathcal{B}_0(n) = 1$.

Cas 2.2.2.2.

Si $b = -4$ alors $c = 1$, $d = -3$, $a = +2$, $e = 2$ et on trouve :

$r(n) = 2n-4$, $s(n) = n^2 - 3n + 2$, $\mathcal{B}_0(n) = 8$.

Cas 2.2.3.

Si $c = -2b-2e-3$ le terme dominant est $-8n^2(b+e+1)(b+e+2)(2b+3e+2)$ donc $b = -e-1$, $b = -e-2$ ou $b = -\frac{3}{2}e-1$.

Cas 2.2.3.1.

Si $b = -e-1$, $c = -1$, voir cas 2.1.

Cas 2.2.3.2.

Si $b = -e-2$, $c = 1$, voir cas 2.2.2.

Cas 2.2.3.3.

Si $b = -\frac{3}{2}e-1$ alors le terme dominant est $-3ne^2(e-2)$ donc $e = 0$ ou $e = 2$.

Cas 2.2.3.3.1.

Si $e = 0$, alors $\mathcal{B}_0(n) = 0$.

Cas 2.2.3.3.2.

Si $e = 2$, alors $b = -4 = -e-2$, voir cas 2.2.3.2.

<u>Conclusion</u> : on trouve tout d'abord les solutions triviales $r(n) = -(n+x(n-1))$, $s(n) = n\,x(n)$ où $x(n)$ est de degré 1 en n , conduisant à $\mathcal{D}_0(n) = 0$.

D'autre part, on a vu que pour $k = 2$, $f(n) = n$, $g(n) = -n$, on a $r(k,n) = n-k$ donc d'après (16_3),

$$r_3(1,n) = (n-1) + (n-3) = 2n - 4$$
$$s_3(1,n) = (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$$

est un procédé d'accélération, et c'est effectivement l'une des deux solutions trouvée. Toutefois, ce procédé n'a a priori rien à voir avec la suite v_1 , et c'est effectivement ce qu'on constate numériquement.

On est donc conduit à conserver uniquement la solution $r(n) = 2n - 3$, $s(n) = n^2 - 2n + 1$, $\mathcal{D}_0(n) = 1$, qui donne $a'(n) = -n+7$, $b'(n) = n^2 + 5n - 7$, $c'(n) = n^3$, et on peut recommencer avec cette nouvelle récurrence. On constate qu'à <u>chaque</u> étape il y a deux solutions non triviales, et que l'une des deux provient de récurrences avec $k=2$. En conservant systématiquement l'autre solution, on aboutit aux fonctions suivantes :

$$r(k,n) = 2n - 2k - 1 , \quad s(k,n) = (n-k)^2$$
$$a(k,n) = -n + 4k + 3 , \quad b(k,n) = n^2 + (4k+1)n - (2k^2+4k+1)$$
$$c(k,n) = n^3 , \quad \mathcal{D}_0(k,n) = k^6 .$$

L'étude précédente a été détaillée pour bien montrer le "miracle" fondamental de la méthode : les termes de plus haut degré non nuls se factorisent toujours de façon simple, ce qui permet de poursuivre facilement les calculs. Ce phénomène n'est pas encore expliqué.

II. - <u>CAS GENERAL.</u>

On prend $f(n) = n$, $g(n) = xn$, $h(n) = xn$. On a donc

$$\frac{v(n)}{n!} = v(0) + u(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{i} + t(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-2}}{i} H_{i-1} .$$

En particulier, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v(n)}{n!} = v(0) - \frac{u(0)}{x} \operatorname{Log}(1-x) + \frac{t(0)}{2x^2} \operatorname{Log}^2(1-x) .$$

Des calculs analogues aux précédents fournissent comme meilleure solution les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
r(k,n) &= -x(2n-2k-1) , \qquad s(k,n) = x^2(n-k)^2 \\
a(k,n) &= x(2n-2k-3) + n + 2k \\
b(k,n) &= -x(x(n-k-1)^2 + 2n^2 + (2k-1)n - k(k+2)) \\
c(k,n) &= x^2 n^3 , \qquad \mathcal{D}_0(k,n) = x^4 k^6 .
\end{aligned}$$

Ceci conduit aux valeurs suivantes pour les récurrences (6_3) à (12_3) :

$$\begin{cases}
d_1(k,n) = (n^2+n(4k+1)+k(k(4-3x)+2))/(n+2k) \\
d_2(k,n) = -k^2x^2(3n^2+2kn+k^2)/(n+2k) \\
d_3(k,n) = 3n^3k^2x^3/(n+2k)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
d_4(k,n) = (3n(1+x)+k(6-4x)+3)/3 \\
d_5(k,n) = -x(3n^2+2kn+k^2)/3 \\
d_6(k,n) = k^4x^3/3
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
d_7(k,n) = (3n^2(1-x)+n(3-x)(4k+3)+(k+1)(k(12-5x)+6-3x))/3 \\
d_8(k,n) = -x(3n^3(1-x)+2n^2(4k+3)+kn(5k+4)+2k^2(k+1))/3 \\
d_9(k,n) = k^4x^3(n+2k+2)/3
\end{cases}$$

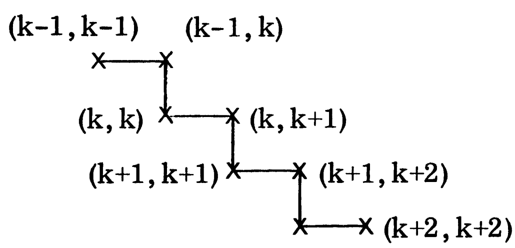
$$\begin{cases}
d_{10}(k,n) = n+2k \\
d_{11}(k,n) = -3k^2x \\
d_{12}(k,n) = k^2x^2(3n-2k)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
d_{13}(k,n) = (n^3(1-x)^2+3n^2(1-x)(2k+1)+n(2-x)(6k^2+6k+1) \\
\qquad\qquad +2k(2-x)(k+1)(2k+1))/(n+2k) \\
d_{14}(k,n) = -k^2x^2(3n^3(1-x)+2n^2(4k+3)+kn(5k+4)+2k^2(k+1))/(n+2k) \\
d_{15}(k,n) = n^3k^2x^3(3n(1-x)+2k(3+x)+6)/(n+2k)
\end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
d_{16}(k,n) &= (3n^3(1-x)^3+n^2(1-x)^2(2k(4x+9)+3(2x+9))\\
&\quad +n(1-x)(k^2(7x^2+14x+36)+k(10x^2+26x+108)+3x^2+3x+78)\\
&\quad +2(k^3(x+3)(x^2-2x+4)+k^2(2x^3+2x^2-13x+54)\\
&\quad +k(x^3-27x+78)+18(2-x)))/(3n(1-x)+2k(3+x)+6)\\
d_{17}(k,n) &= x^2(k+1)^2(3n^2(1-x)^2(2k+1)+n(1-x)((10x-3)k^2+(10x+18)k+3x+9)\\
&\quad +2((x+3)(2x-5)k^3+(3x^2+6x-42)k^2+(x^2+2x-27)k-6))\\
&\quad /(3n(1-x)+2k(3+x)+6)\\
d_{18}(k,n) &= k^4(k+1)^2x^4(3n(1-x)+2(k+1)(3+x)+6)/(3n(1-x)+2k(3+x)+6)\ .
\end{aligned}
\right.
$$

Les expressions pour $d_{19}(k,n)$, $d_{20}(k,n)$, $d_{21}(k,n)$ sont trop longues pour être données ici. Il suffit de dire que leur dénominateur est de degré total 4 en k et n , et que leur numérateur est de degré total respectif 7 , 10 et 13 en k et n .

Nous examinerons plus en détail les récurrences que l'on obtient dans la marche en escalier suivante :



Si on pose

$w(k) = v(k,k)$ et $w_1(k) = v(k,k+1)$

on a donc les récurrences :

$$
\begin{aligned}
w_1(k) &= d_1(k,k)w(k) + d_2(k,k)w_1(k-1) + d_3(k,k)w(k-1)\\
w(k+1) &= d_7(k,k+1)w_1(k) + d_8(k,k+1)w(k) + d_9(k,k+1)w_1(k-1)\\
w_1(k+1) &= d_1(k+1,k+1)w(k+1) + d_2(k+1,k+1)w_1(k) + d_3(k+1,k+1)w(k)\\
w(k+2) &= d_7(k+1,k+2)w_1(k+1) + d_8(k+1,k+2)w(k+1) + d_9(k+1,k+2)w_1(k)\\
w(k+2) &= d_{19}(k,k+1)w(k+1) + d_{20}(k,k+1)w(k) + d_{21}(k,k+1)w(k-1)
\end{aligned}
$$

Cette dernière récurrence est la récurrence diagonale (13_3) spécialisée au cas $n = k+1$.

Les coefficients sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} d_1(k,k) = k(3-x)+1 \\ d_2(k,k) = -2k^3x^2 \\ d_3(k,k) = k^4x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(k+1,k+1) = k(3-x)+4-x \\ d_2(k+1,k+1) = -2(k+1)^3x^2 \\ d_3(k+1,k+1) = (k+1)^4x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_7(k,k+1) = (k+1)((9-4x)k+6-3x) \\ d_8(k,k+1) = -x(k+1)((6-x)k^2+(8-2x)k+3-x) \\ d_9(k,k+1) = x^3k^4(k+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_7(k+1,k+2) = (k+2)((9-4x)k+15-7x) \\ d_8(k+1,k+2) = -x(k+2)((6-x)k^2+(20-4x)k+17-4x) \\ d_9(k+1,k+2) = x^3(k+1)^4(k+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{19}(k,k+1) = (k+2)(3k+4)((3k^2+7k+3)(x^2-9x+9)+3-3x)/(3k+2) \\ d_{20}(k,k+1) = -x^4(k+1)^3(k+2)(9k^3+24k^2+17k+4)/(3k+2) \\ d_{21}(k,k+1) = x^6k^5(k+1)^3(k+2)(3k+5)/(3k+2) \quad . \end{cases}$$

Pour compléter ces récurrences, il suffit de connaître $v(k,n)$ pour $0 \leq k,n \leq 2$. Les valeurs sont les suivantes pour les suites v_1, v_2, v_3 :

$v_1(k,n)$

k \ n	0	1	2
0	0	0	1
1	1	3	$-3x+12$
2	x^2+12	$x^2-36x+60$	$66x^2-360x+360$

$v_2(k,n)$

k \ n	0	1	2
0	0	1	$x+2$
1	2	$-3x+6$	$x^2-18x+24$
2	$-12x+24$	$28x^2-132x+120$	$-36x^3+432x^2-1080x+720$

$v_3(k,n)$

k \ n	0	1	2
0	1	1	2
1	$-x+2$	x^2-6x+6	$8x^2-30x+24$
2	$4x^2-24x+24$	$-8x^3+84x^2-192x+120$	$8x^4-192x^3+912x^2-1440x+720$

Nous considérons maintenant la vitesse de convergence de la récurrence diagonale. Utilisant les formules pour $d_{19}(k,k+1)$, $d_{20}(k,k+1)$, $d_{21}(k,k+1)$ on déduit des théorèmes généraux sur ce genre de récurrences, que le comportement de la récurrence dépend surtout de l'équation caractéristique

$$X^3 - 3(x^2-9x+9)X^2 + 3x^4X - x^6 = 0 .$$

Le discriminant de cette équation vaut :

$$-(27)^3x^6(x-1)^2(x-2)^2 .$$

Il est négatif donc l'équation ne possède qu'une seule racine réelle, à savoir

$$\begin{aligned} X_1 &= x^2 - 9x + 9 + (9-6x)\sqrt[3]{1-x} + (9-3x)\sqrt[3]{(1-x)^2} \\ &= (1+\sqrt[3]{(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})^3 . \end{aligned}$$

On vérifie que le module des deux autres racines complexes X_2 et X_3 vaut

$$|X_2| = |X_3| = [x(1-\sqrt[3]{(1-x)})]^{3/2}$$

et comme $x \in [-1,1[$, on a $|X_2| < X_1$. Il en résulte qu'il existe des constantes B et C_i $(i=1,2,3)$ telles que quand $k \to \infty$

$$w_i(k) = v_i(k,k) \sim k!^3 X_1^k k^B C_i$$

$$\text{avec } X_1 = (1+\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})^3 .$$

De ceci on peut déduire une estimation de la vitesse de convergence de la récurrence. En effet, on vérifie aisément que l'on a le lemme suivant :

LEMME 1. - Si w_i $(i=1,2,3)$ sont trois solutions de la récurrence

$$w(k+2) = a(k)w(k+1) + b(k)w(k) + c(k)w(k-1)$$

avec $w_3(k) \neq 0$ pour tout k, alors pour $i = 1,2$ si on pose

$$\Delta_i w(k) = \frac{w_i(k)}{w_3(k)} - \frac{w_i(k-1)}{w_3(k-1)}$$ on a la récurrence

$$\Delta(k+2) = A(k)\Delta(k+1) + B(k)\Delta(k)$$

où $A(k) = a(k)\dfrac{w_3(k+1)}{w_3(k+2)} - 1$, $B(k) = -c(k)\dfrac{w_3(k-1)}{w_3(k+2)}$.

On applique ce lemme avec $a(k) = d_{19}(k,k+1)$, $b(k) = d_{20}(k,k+1)$, $c(k) = d_{21}(k,k+1)$. On déduit des équivalents ci-dessus que

$$A(k) = \frac{3(x^2-9x+9)}{X_1} - 1 + 0\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{X_2+X_3}{X_1} + 0\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$B(k) = -\frac{x^6}{X_1^3} + 0\left(\frac{1}{k}\right) \qquad = -\frac{X_2X_3}{X_1^2} + 0\left(\frac{1}{k}\right) .$$

L'équation caractéristique est :

$$X^2 - \left(\frac{X_2+X_3}{X_1}\right)X + \frac{X_2X_3}{X_1^2}$$

dont les racines sont $\dfrac{X_2}{X_1}$ et $\dfrac{X_3}{X_1}$, donc complexes conjuguées. Leur module vaut donc $\dfrac{|x|^3}{X_1^{3/2}}$ et de la théorie générale de ce type de récurrences, on déduit qu'il existe des constantes B' et C_i' telles que

$$|\Delta_i w(k)| \leq \left(\frac{|x|}{X_1^{1/2}}\right)^{3k} k^{B'} C_i' .$$

Or, on vérifie immédiatement que pour tout $x \in \,]-\infty,1[$ on a $|x|/X_1^{1/2} < 1$. La suite $\Delta_i w$ converge donc géométriquement vers 0 , en d'autres termes pour tout $x \in \,]-\infty,1[$ la récurrence diagonale converge (et même géométriquement).

$$\left|\frac{w_1(k)}{w_3(k)} - \frac{1}{2x^2}\mathrm{Log}^2(1-x)\right| \leq \left(\frac{|x|}{X_1^{1/2}}\right)^{3k} k^{B'} C_1''$$

$$\left|\frac{w_2(k)}{w_3(k)} + \frac{1}{x}\mathrm{Log}(1-x)\right| \quad \left(\frac{|x|}{}\right)^{3k} \; B' \quad '' \quad .$$

CALCUL EXPLICITE DE $v_i(k,n)$.

D'après (15_3) on a :

$$v_3(k,n) = n!\,P_3(k,n)$$

$$v_2(k,n) = n!\left[P_3(k,n)\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{i-1}}{i} + x^n P_2(k,n)\right]$$

$$v_1(k,n) = n!\left[P_3(k,n)\sum_{i=2}^{n}\frac{x^{i-2}}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j} + x^{n-1}P_2(k,n)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + x^n P_1(k,n)\right]$$

$$= n!\left[P_3(k,n)\sum_{i=2}^{n}\frac{x^{i-2}}{i}H_{i-1} + x^{n-1}P_2(k,n)H_n + x^n P_1(k,n)\right]$$

où P_1, P_2, P_3 satisfont aux récurrences décrites en (15_3). Grâce à un calcul par récurrence extrêmement long, on montre que la solution des récurrences (15_3) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} P_1(k,n) \\ P_2(k,n) \\ P_3(k,n) \end{pmatrix} = k!^2 \sum_{m=0}^{2k} x^{2k-m}(1-x)^m \binom{n+m}{m}\left(\sum_i \binom{m}{i}\binom{k}{i}\binom{k+i}{m}\right)\begin{pmatrix} \alpha_1(m,n) \\ \alpha_2(m,n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $$\alpha_1(m,n) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(-x)^{\ell-2}(\ell-1)!\,H_{\ell-1}}{(1-x)^{\ell}(n+1)\dots(n+\ell)}$$

$$\alpha_2(m,n) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(-x)^{\ell-1}(\ell-1)!}{(1-x)^{\ell}(n+1)\dots(n+\ell)}$$

Remarque. - $\binom{m}{i}\binom{k}{i}\binom{k+i}{m} = \binom{k+i}{i}\binom{k}{i}\binom{k}{m-i}$. En dehors de cela, je ne vois pas de moyen de calculer explicitement la somme intérieure portant sur i . On sous-entend évidemment dans ces formules que $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$ ou $b > a$ quand a, b sont entiers avec $a \geq 0$.

Dans le cas particulier $n = 0$, on peut obtenir des formules plus simples pour P_2 et P_3 :

$$\begin{pmatrix} P_2(k,0) \\ P_3(k,0) \end{pmatrix} = k!^2 \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{k+i}{i} x^{k-i}(1-x)^i \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{i} \frac{(-1)^{\ell-1}x^{\ell-1}}{\ell(1-x)^{\ell}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il existe également des formules analogues pour $P_2(k,n)$ et $P_3(k,n)$ avec $n \geq 1$, ainsi que pour $P_1(k,n)$, mais elles sont plus compliquées et ne nous serviront pas dans la suite. A partir de ces formules nous allons démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - $v_1(k,n)$, $v_2(k,n)$, $v_3(k,n)$ <u>sont des polynômes en</u> x <u>dont les degrés sont majorés par les quantités suivantes</u> :

$$d^o v_1(k,n) \le k - 2 + \sup(k,n)$$

$$d^o v_2(k,n) \le k - 1 + n$$

$$d^o v_3(k,n) \le k + \inf(k,n) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour $k = 0$, on a $v_3(0,n) = n!$, $v_2(0,n) = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{i}$, $v_1(0,n) = n! \sum_{i=2}^{n} \frac{x^{i-2}}{i} H_{i-1}$ donc la proposition est vraie pour $k=0$. Soit $k \ge 1$ donné et supposons la proposition vraie pour $k-1$ (et tout n) ; démontrons-la pour k . Nous raisonnons par récurrence sur n : si $n = 0$ les formules ci-dessus montrent que $P_j(k,0)$ est un polynôme en x de degré majoré par $2k-2$ pour $j = 1$, $k-1$ pour $j = 2$ et k pour $j = 3$, ce qui donne bien la proposition. Supposons-la démontrée jusqu'à $n-1$, et montrons-la pour n . Pour cela, on utilise la formule (10_3) qui nous donne ici

$$v(k,n) = (n+2k)v(k,n-1) - 3k^2 xv(k-1,n) + k^2x^2(3n-2k)v(k-1,n-1) \ .$$

On a donc

$$d^o v_1(k,n) \le \sup(k-2+\sup(k,n-1)\ , k-2+\sup(k-1,n), k-2+\sup(k,n))$$
$$\le k-2+\sup(k,n)$$

$$d^o v_2(k,n) \le \sup(k+n-2\ , k+n-1\ , k+n-1) = k+n-1$$

$$d^o v_3(k,n) \le \sup(k+\inf(k,n-1), k+\inf(k-1,n), k+\inf(k,n))$$
$$\le k+\inf(k,n)$$

d'où la proposition en utilisant notre double récurrence.

<u>Remarques</u>. -

1) En raisonnant plus finement (par exemple en calculant explicitement le coefficient de plus haut degré), on doit pouvoir démontrer qu'il y a

égalité dans la proposition ci-dessus. C'est en tout cas vrai pour les petites valeurs de k et n.

2) Expérimentalement, on voit que les coefficients du développement en série de $v_2(k,n)/v_3(k,n) + \frac{\mathrm{Log}(1-x)}{x}$ sont nuls jusqu'au degré $2k+n$ non compris, et de même pour $v_1(k,n)/v_3(k,n) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Log}^2(1-x)}{x^2}$ jusqu'au degré $2k+n-1$.

Il est donc probable que v_1, v_2, v_3 sont les seules solutions (à un facteur multiplicatif global près) des conditions suivantes :

$$d^o v_1(k,n) \leq k-2+\sup(k,n)$$
$$d^o v_2(k,n) \leq k-1+n$$
$$d^o v_3(k,n) \leq k+\inf(k,n)$$

(donc en tout $4k+2n$ coordonnées homogènes, soit $4k+2n-1$ inconnues),

$$v_2(k,n)/v_3(k,n) + \frac{\mathrm{Log}(1-x)}{x} = 0 + 0x + \ldots + 0x^{2k+n-1} + a_{2k+n}x^{2k+n} + \ldots$$
$$v_1(k,n)/v_3(k,n) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Log}^2(1-x)}{x^2} = 0 + 0x + \ldots + 0x^{2k+n-2} + b_{2k+n-1}x^{2k+n-1} + \ldots$$

(donc en tout $4k+2n-1$ équations). Le système est donc soluble (et probablement de façon unique). Cela correspond donc a un problème d'approximants de Padé simultanés.

APPLICATIONS ARITHMETIQUES.

Nous allons utiliser les résultats précédents dans le cas où $x = \frac{P}{Q}$ est un nombre rationnel pour obtenir des théorèmes arithmétiques.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME. - Soit $x \in [-1,1[$, $x \neq 0$ un nombre rationnel. Ecrivons $x = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}$, $Q > 0$. Nous supposons que la condition suivante est satisfaite :

$$(*) \quad Q < \frac{1}{e}\left(\frac{(1+\sqrt[3]{(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{x^2}\right)^{3/4} .$$

Alors $\mathrm{Log}(1-x)$ n'est pas un nombre quadratique sur $\mathbb{Q}$. Plus précisément :

a) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$ on ait :

$$|a\,\mathrm{Log}^2(1-x) + b\,\mathrm{Log}(1-x) + c| \geq \frac{C(\varepsilon)}{H^{m(x)-1+\varepsilon}}$$

où $H = \sup(|a|,|b|)$ et

$$m(x) = \frac{3\,\mathrm{Log}((1+\sqrt[3]{(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})^{3/2}/|x|)}{\frac{3}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{(1+\sqrt[3]{(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{x^2}\right) - 2(1+\mathrm{Log}\,Q)}$$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout nombre quadratique ξ de hauteur H on ait

$$|\mathrm{Log}(1-x) - \xi| \geq \frac{C(\varepsilon)}{H^{m(x)+\varepsilon}} .$$

(Si $a\xi^2 + b\xi + c = 0$ est le polynôme minimal de ξ sur $\mathbb{Z}$ on pose $H = \sup(|a|,|b|)$).

Démonstration. - Admettons provisoirement les deux lemmes suivants :

LEMME 3. - Posons $d_k = \mathrm{P.P.C.M}\,(1,2,\ldots,k)$. Alors

$$d_k^2 Q^{2k-2} w_1(k)/k!^3 \in \mathbb{Z}$$

$$d_k Q^{2k-1} w_2(k)/k!^3 \in \mathbb{Z}$$

$$Q^{2k}\ w_3(k)/k!^3 \in \mathbb{Z} .$$

LEMME 4. - Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on ne peut pas avoir

$$2ax^2 w_1(k) - bxw_2(k) - cw_3(k) = 0$$

pour 3 valeurs consécutives de k.

Démontrons le a) du théorème. Posons pour $i = 1,2,3$: $p_i(k) = d_k^2 Q^{2k} w_i(k)/k!^3$. D'après le lemme 3, $x^2 p_1(k)$, $xp_2(k)$ et $p_3(k)$ sont entiers. On a donc pour k entier quelconque :

$$|a\,\mathrm{Log}^2(1-x)+b\,\mathrm{Log}(1-x)+c| = |a(\mathrm{Log}^2(1-x)-2x^2\frac{p_1(k)}{p_3(k)})$$

$$+\,b(\mathrm{Log}(1-x)+x\frac{p_2(k)}{p_3(k)})$$

$$+\frac{2ax^2p_1(k)-bxp_2(k)-cp_3(k)}{p_3(k)}|$$

$$\geq \frac{|2ax^2p_1(k)-bxp_2(k)-cp_3(k)|}{p_3(k)} - \frac{(|a|+|b|)}{C_2^{k(1-\epsilon_1)}}$$

pour tout $\epsilon_1 > 0$ et k assez grand, avec $C_2 = X_1^{3/2}/|x|^3$.

D'après les lemmes 3 et 4, quitte à modifier k d'au plus 2 unités, on peut toujours supposer $2ax^2p_1(k) - bxp_2(k) - cp_3(k) \neq 0$. Enfin, d'après l'équivalent trouvé pour w_i , on a $\mathrm{Log}\,p_3(k) \sim k\,\mathrm{Log}\,C_1$ avec $C_1 = X_1Q^2e^2$ donc pour tout $\epsilon_2 > 0$ et k assez grand on a

$$p_3(k) \leq C_1^{k(1+\epsilon_2)} .$$

On a donc

$$|a\,\mathrm{Log}^2(1-x)+b\,\mathrm{Log}(1-x)+c| \geq \frac{1}{C_1^{k(1+\epsilon_2)}} - \frac{(|a|+|b|)}{C_2^{k(1-\epsilon_1)}} .$$

On voit immédiatement que la condition (*) équivaut à $C_1 < C_2$. Choisissons ϵ_1 et ϵ_2 assez petits pour que $(1-\epsilon_1)\mathrm{Log}\,C_2 > (1+\epsilon_2)\mathrm{Log}\,C_1$. Il est alors facile de voir que si on pose

$$k = \frac{\mathrm{Log}(|a|+|b|)}{(1-\epsilon_1)\mathrm{Log}\,C_2-(1+\epsilon_2)\mathrm{Log}\,C_1} + \eta$$

on a

$$\frac{1}{C_1^{k(1+\epsilon_2)}} - \frac{(|a|+|b|)}{C_2^{k(1-\epsilon_1)}} = (|a|+|b|)^{1-m'(x)}(C_1^{-\eta(1+\epsilon_2)} - C_2^{-\eta(1-\epsilon_1)})$$

où $m'(x) = (1-\epsilon_1)\mathrm{Log}\,C_2/((1-\epsilon_1)\mathrm{Log}\,C_2-(1+\epsilon_2)\mathrm{Log}\,C_1)$.

Si $\eta > 0$ on a $C_1^{-\eta(1+\epsilon_2)} - C_2^{-\eta(1-\epsilon_1)} > 0$. Choisissant η assez grand pour que toutes les inégalités voulues soient satisfaites, et ajoutant au plus 3 unités pour que k soit un entier tel que $2ax^2w_1(k) - bxw_2(k) - cw_3(k) \neq 0$ ce qui est possible d'après le lemme 4, on en déduit le a) du théorème, en remarquant que $m'(x) \to m(x)$ quand ϵ_1 et $\epsilon_2 \to 0$ et que le remplacement de $(|a|+|b|)$ par $\sup(|a|,|b|)$ ne fait que changer la constante $C(\epsilon)$.

b) se déduit aisément de a) : si ξ est un nombre quadratique de polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0$$

on peut alors écrire

$$|a \operatorname{Log}^2(1-x) + b \operatorname{Log}(1-x) + c - (a\xi^2+b\xi+c)| \geq \frac{C(\epsilon)}{H^{m(x)-1+\epsilon}}$$

soit

$$|\operatorname{Log}(1-x) - \xi|\,|a(\operatorname{Log}(1-x)+\xi)+b| \geq \frac{C(\epsilon)}{H^{m(x)-1+\epsilon}} .$$

Si $|\operatorname{Log}(1-x)-\xi| \geq 1$, il n'y a rien à démontrer. Sinon $|a(\operatorname{Log}(1-x)+\xi)+b| \leq |a|(2|\operatorname{Log}(1-x)|+1) + |b| \leq M.H$ où M ne dépend que de x , d'où le résultat.

Il reste à démontrer les lemmes 3 et 4.

Démonstration du lemme 4. - Posons

$$M_k = \begin{pmatrix} w_1(k-1) & w_2(k-1) & w_3(k-1) \\ w_1(k-2) & w_2(k-2) & w_3(k-2) \\ w_1(k-3) & w_2(k-3) & w_3(k-3) \end{pmatrix}$$

La récurrence obtenue pour $v_i(k,k) = w_i(k)$ s'écrit matriciellement :

$$M_{k+1} = \begin{pmatrix} d_{19}(k,k+1) & d_{20}(k,k+1) & d_{21}(k,k+1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_k$$

donc en particulier $\det M_{k+1} = d_{21}(k,k+1) \det M_k$.

Comme $d_{21}(k,k+1) = x^6k^5(k+1)^3(k+2)(3k+5)/(3k+2) \neq 0$ pour $k \geq 1$ et $x \neq 0$, et que $\det M_3 = 90x^2(2-x) \neq 0$ également il en résulte que $\det M_k \neq 0$ pour tout k . Il en résulte que toute combinaison linéaire nulle des colonnes de M_k est la combinaison triviale, ce qui n'est autre que le lemme 4.

Démonstration du lemme 3. - Vu la proposition 2, il est clair que le lemme 3 résultera du lemme suivant :

LEMME 5. -

$d_k^2 w_1(k)/k!^3 \in \mathbb{Z}[x]$

$d_k w_2(k)/k!^3 \in \mathbb{Z}[x]$

$w_3(k)/k!^3 \in \mathbb{Z}[x]$.

Vu les formules explicites pour $w_i(k)$, il est clair que $w_3(k)/k!^3 \in \mathbb{Z}[x]$. D'autre part, on peut écrire :

$$\binom{n+m}{m}\binom{m}{i}\binom{k}{i}\binom{k+i}{m}\frac{(\ell-1)!}{(n+1)\dots(n+\ell)} = \binom{n+m}{m-\ell}\binom{k}{i}\binom{k+i}{m}\frac{(m-\ell)!\,(\ell-1)!}{i!\,(m-i)!} .$$

Posons $Y = \frac{(m-\ell)!\,(\ell-1)!}{i!(m-i)!}d_k$. Considérons deux cas :

1er cas $i \geq \ell$.

Dans ce cas

$$Y = \frac{\binom{m-\ell}{i-\ell}}{\ell\binom{i}{\ell}}d_k .$$

Or, $i \leq k$, donc d'après un résultat bien connu $\ell\binom{i}{\ell} \mid d_k$ donc $Y \in \mathbb{Z}$.

2e cas $i < \ell$.

Dans ce cas

$$Y = \binom{\ell-1}{i}\frac{d_k}{(\ell-i)\binom{m-i}{\ell-i}} .$$

Or, $m-i \leq k$, donc comme précédemment $Y \in \mathbb{Z}$. De ce qui précède, on déduit immédiatement la deuxième assertion du lemme 5. Pour la première, il est clair qu'il suffit de montrer que pour j tel que $1 \leq j \leq \sup(k, \ell-1)$. on a $\frac{Y}{j}d_k \in \mathbb{Z}$. Or ceci est clair si $j \leq k$. Si $j > k$ on a $\ell-1 \geq j > k \geq i$ et on se trouve donc dans le 2e cas examiné plus haut. Comme dans ce cas

$$Y \in \binom{\ell-1}{i}\mathbb{Z} ,$$

il suffira de montrer que $\binom{\ell-1}{i}\frac{d_k}{j} \in \mathbb{Z}$. Or, on a :

$$\frac{1}{j}\binom{\ell-1}{i} d_k = \frac{\binom{\ell-1}{j}\binom{j-1}{i}}{(\ell-j)\binom{\ell-i-1}{\ell-j}} d_k$$

et on a $\ell - i - 1 \leq \ell - (m-k) - 1 \leq k-1$ donc $(\ell-j)\binom{\ell-i-1}{\ell-j} \mid d_k$, d'où la 1ère assertion du lemme 5, et donc le lemme 3.

COROLLAIRE. -

a) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$ on a :

$$|a \operatorname{Log}^2 2 + b \operatorname{Log} 2 + c| \geq \frac{C}{H^{286,819}}$$

où $H = \sup(|a|,|b|)$.

b) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout nombre quadratique ξ de hauteur H on ait

$$|\operatorname{Log} 2 - \xi| \geq \frac{C}{H^{287,819}} .$$

Démonstration. - En effet, dans ce cas l'inégalité (*) est tout juste satisfaite (le membre de droite vaut 1,01058...) et on calcule que $m(x) < 287,819$.

APPENDICE

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_0(n) = {} & n^6(-a^3-a^2c-a^2+ac^2+2ac+a+c^3+3c^2+3c+1) + n^5(6a^3+4a^2c-3a^2b \\
& -a^2d+9a^2-8ac^2-2acb+2acd-14ac-2ab+2ad-6a-6c^3+c^2b+3c^2d-21c^2 \\
& +2cb+6cd-24c+b+3d-9) + n^4(-11a^3-2a^2c+18a^2b+2a^2d-a^2e-32a^2 \\
& +22ac^2+9acb-13acd+2ace+37ac-3ab^2-2abd+17ab+ad^2-13ad+2ae \\
& +10a+13c^3-9c^2b-15c^2d+3c^2e+62c^2-cb^2+2cbd-14cb+3cd^2-34cd+6ce \\
& +82c-b^2+2bd-5b+3d^2-19d+3e+33) + n^3(2a^3-7a^2c-35a^2b+2a^2d+56a^2 \\
& -20ac^2-9acb+25acd-10ace-44ac+18ab^2+5abd-2abe-56ab-5ad^2+2ade \\
& +31ad-12ae+5a-12c^3+31c^2b+26c^2d-12c^2e-106c^2+5cb^2-15cbd+2cbe \\
& +39cb-12cd^2+6cde+80cd-26ce-158c-b^3-b^2d+8b^2+bd^2-13bd+2be \\
& +5b+d^3-13d^2+6de+53d-14e-63) + n^2(12a^3+4a^2c+18a^2b-3a^2d+2a^2e \\
& -48a^2-11ac^2-7acb-5acd+11ace+18ac-36ab^2+abd+abe+88ab+5ad^2 \\
& -7ade-29ad+ae^2+26ae-30a+4c^3-51c^2b-18c^2d+18c^2e+117c^2-7cb^2 \\
& +40cbd-12cbe-57cb+15cd^2-18cde-107cd+3ce^2+50ce+184c+6b^3+3b^2d \\
& -b^2e-24b^2-6bd^2+2bde+32bd-12be+10b-3d^3+3d^2e+22d^2-18de-84d \\
& +3e^2+33e+66) + n(-8a^3+4a^2c+12a^2b-2a^2d+a^2e+16a^2+28ac^2+8acb \\
& -27acd+8ace+8ac+24ab^2-5abd+3abe-64ab+5ad^2+2ad-2ae^2-19ae+28a \\
& +40c^2b+4c^2d-12c^2e-76c^2-45cbd+23cbe+48cb-6cd^2+18cde+85cd-6ce^2 \\
& -50ce-120c-12b^3-b^2d+b^2e+32b^2+11bd^2-9bde-35bd+be^2+26be-20b \\
& +2d^3-6d^2e-21d^2+3de^2+22de+72d-5e^2-42e-36) - 8a^2b - 12ac^2 + 4acb \\
& + 18acd - 15ace - 8ac - 2abd + abe + 16ab - 6ad^2 + 9ade + 8ad - 3ae^2 \\
& - 8a - 12c^2b + 4c^2e + 20c^2 + 4cb^2 + 18cbd - 15cbe - 20cb - 6cde \\
& - 30cd + 5ce^2 + 21ce + 32c + 8b^3 - 2b^2d + b^2e - 16b^2 - 6bd^2 + 9bde \\
& + 14bd - 3be^2 - 19be + 8b + 2d^2e + 10d^2 - 3de^2 - 13de - 24d + e^3 \\
& + 4e^2 + 20e + 8 \,.
\end{aligned}
$$

EXEMPLE 1_K

Il est facile de généraliser la construction des récurrences explicitement solubles à K quelconque : si $v(n) = v^1(n)$ est une suite donnée, et si $f_1(n), \ldots, f_K(n)$ sont des fonctions arithmétiques, on pose pour $i = 2, \ldots, K$:

$$v^i(n) = v^{i-1}(n) - f_{i-1}(n+1)v^{i-1}(n)$$

et la récurrence s'écrit

$$v^K(n) = f_K(n)v^K(n-1) ,$$

ce qui donne :

$$v^1(n) = v^1(0)v_K(n) + v^2(0)v_{K-1}(n) + \ldots + v^K(0)v_1(n)$$

où : $$v_K(n) = f_1!(n) , \quad v_{K-1}(n) = f_1!(n) \sum_{i_1=1}^{n} \frac{f_2!(i_1-1)}{f_1!(i_1)}$$

et plus généralement :

$$v_{K-j}(n) = f_1!(n) \sum_{i_1=1}^{n} \frac{f_2!(i_1-1)}{f_1!(i_1)} \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{f_3!(i_2-1)}{f_2!(i_2)} \cdots \sum_{i_j=1}^{i_{j-1}-1} \frac{f_{j+1}!(i_j-1)}{f_j!(i_j)} .$$

Nous considèrerons ici les cas particuliers

$$f_1(n) = n , \quad f_i(n) = nx \quad \text{pour } 2 \le i \le K .$$

On a donc

$$v_K(n) = n! \qquad v_{K-j}(n) = \frac{n!}{x^j} \sum_{i_1=j}^{n} \frac{x^{i_1}}{i_1} \sum_{i_2=j-1}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} \cdots \sum_{i_j=1}^{i_{j-1}-1} \frac{1}{i_j}$$

et en particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v^1(n)}{n!} = v^1(0) - \frac{v^2(0)}{x} \operatorname{Log}(1-x) + \frac{v^3(0)}{2!x^2} \operatorname{Log}^2(1-x) + \ldots + (-1)^{K-1} \frac{v^K(0) \operatorname{Log}^{K-1}(1-x)}{(K-1)!x^{K-1}} .$$

Les exemples 1_2 et 1_3 (ainsi que l'exemple 1_4 qui n'a pas été rédigé) conduisent à conjecturer que l'on a les valeurs suivantes pour les $a_i^K(k,n)$ et $r_i^K(k,n)$:

soit Δ l'opérateur agissant sur la variable n et défini par $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$. Interprétons Δ^{-1} comme étant nul. Alors :

Conjectures :

1) $$r_i^K(k,n) = \frac{\Delta^{K-i}}{(K-i)!}(n-k)^{K-1}(-x)^{i-1}$$

$$a_i^K(k,n) = (-x)^{i-1}\left[\frac{\Delta^{K-i}}{(K-i)!}n^K + (x-1)\frac{\Delta^{K-i-1}}{(K-i-1)!}(n-k-1)^{K-1}\right]$$

$$\mathcal{D}_0^K(k,n) = x^{(K-1)^2}k^{K(K-1)} .$$

2) Si $w_i^{(K)}(k) = v_i^K(k,k)$ alors il existe B , C_i : $w_i^{(K)}(k) \sim k!^K X_1^k k^B C_i$

où :

$$X_1 = \left(\frac{x}{1-(1-x)^{1/K}}\right)^K = (1+(1-x)^{1/K}+\ldots+(1-x)^{(K-1)/K})^K .$$

3) degré $v_i(k,k) \leq (K-1)k - (K-i)$.

4) Il existe B' et C'_i tels que :

$$\left|\frac{W_{K-i}^{(K)}(k)}{W_K^{(K)}(k)} - \frac{(-1)^i}{i!\,x^i}\operatorname{Log}^i(1-x)\right| \leq X^k k^{B'} C'_i$$

avec $$X = \left(\frac{1-2(1-x)^{1/K}+(1-x)^{2/K}}{1-2(\cos\frac{2\pi}{K})(1-x)^{1/K}+(1-x)^{2/K}}\right)^{K/2} .$$

5) Enfin la condition à satisfaire pour qu'on puisse obtenir un résultat de nature arithmétique est la suivante ($x=\frac{P}{Q}$ avec $Q>0$, $P,Q \in \mathbb{Z}$) :

$$Q < \frac{1}{e}(XX_1)^{-1/(K-1)} \quad \text{ou encore}$$

$$Q < \frac{1}{e}\left(\frac{1-2(\cos\frac{2\pi}{K})(1-x)^{1/K}+(1-x)^{2/K}}{x^2}\right)^{K/(2(K-1))} .$$

EXEMPLE 2_3

Prenons $f(n) = g(n) = h(n) = n^2$. On a donc

$$\frac{v(n)}{n!} = v(0) + u(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + t(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} H_{i-1}^{(2)}$$

où $H_{i-1}^{(2)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j^2}$.

Or $$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{2i^2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} - \frac{1}{2}\zeta(4) = \frac{1}{2}(\zeta^2(2) - \zeta(4)) = \frac{\pi^4}{120} .$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v(n)}{n!} = v(0) + u(0)\frac{\pi^2}{6} + t(0)\frac{\pi^4}{120} .$$

On cherche à obtenir $\mathcal{D}_0(k,n)$ ne dépendant pas de n et non nul. Il y a un certain nombre de solutions à ce problème. Nous choisissons parmi ces solutions celle qui semble donner la meilleure accélération.

On trouve ainsi :

$$r(k,n) = -2n^2 + 2(k+1)n - (\tfrac{4}{3}k^2 + k + 1)$$

$$s(k,n) = (n^2 - kn + \frac{k^2}{3})(n^2 - kn + k^2)$$

$$a(k,n) = 3n^2 - 6n + 3k^2 + 3k + 5$$

$$b(k,n) = -3n^4 + 6n^3 - (3k^2+3k+7)n^2 + (2k^3+6k^2+4k+4)n - (k^4+3k^3+4k^2+2k+1)$$

$$c(k,n) = n^6$$

$$\mathcal{D}_0(k,n) = -\frac{1}{27}k^{12} .$$

Ceci conduit aux valeurs suivantes pour les récurrences (6_3) à (12_3) :

$$\begin{cases} d_1(k,n) = (3n^4+6n^3(2k+1)+n^2(22k^2+18k+3)+2nk(10k^2+11k+3) \\ \qquad\qquad +k^2(13k^2+10k+5))/(3n^2+6nk+5k^2) \\ d_2(k,n) = k^4(14n^4+14kn^3+9k^2n^2+4k^3n+k^4)/(3(3n^2+6nk+5k^2)) \\ d_3(k,n) = -14k^4n^6(3(3n^2+6nk+5k^2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_4(k,n) = 2n^2+n(k+2)+\frac{37}{14}k^2+2k+1 \\ d_5(k,n) = -(14n^4+14kn^3+9k^2n^2+4k^3n+k^4)/14 \\ d_6(k,n) = k^8/42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_7(k,n) = (42n^3(3k+2)+n^2(307k^2+434k+154)+2n(160k^3+349k^2+245k+56) \\ \qquad\qquad +157k^4+468k^3+507k^2+238k+42)/42 \\ d_8(k,n) = -(42n^5(3k+2)+n^4(181k^2+224k+70)+2kn^3(68k^2+97k+35) \\ \qquad\qquad +3k^2n^2(24k^2+38k+15)+2k^3n(k+1)(13k+10)+5k^4(k+1)^2)/42 \\ d_9(k,n) = k^8(3n^2+6n(k+1)+5(k+1)^2)/126 \end{cases}$$

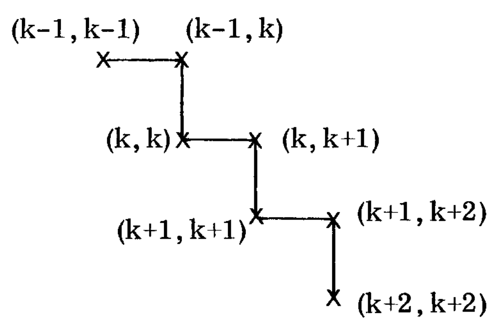
$$\begin{cases} d_{10}(k,n) = (3n^2+6nk+5k^2)/3 \\ d_{11}(k,n) = 14k^4/9 \\ d_{12}(k,n) = -k^4(14n^2-14kn+5k^2)/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{13}(k,n) = (9n^4(9k^2+9k+2)+12n^3(18k^3+27k^2+13k+2) \\ \qquad\qquad +n^2(265k^4+530k^3+364k^2+99k+9)+2nk(88k^4+220k^3+194k^2 \\ \qquad\qquad +71k+9)+5k^2(k+1)^2(11k^2+11k+3))/(3(3n^2+6nk+5k^2)) \\ d_{14}(k,n) = k^4(42n^5(3k+2)+n^4(181k^2+224k+70)+2kn^3(68k^2+97k+35) \\ \qquad\qquad +3k^2n^2(24k^2+38k+15)+2k^3n(k+1)(13k+10)+5k^4(k+1)^2)/(9(3n^2+6nk+5k^2) \\ d_{15}(k,n) = -k^4n^6(42n(3k+2)+5(11k^2+28k+14))/(9(3n^2+6nk+5k^2)) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
d_{16}(k,n) &= (126n^3(27k^3+99k^2+114k+40)+3n^2(1251k^4+7785k^3+17018k^2\\
&\quad +15386k+4760)+6n(417k^5+3181k^4+9638k^3+14274k^2+10157k\\
&\quad +2716)+5(132k^6+1227k^5+4685k^4+9414k^3+10463k^2+6048k\\
&\quad +1400))/(3(42n(3k+2)+5(11k^2+28k+14)))\\
d_{17}(k,n) &= (k+1)^4(42n^2(78k^4+247k^3+258k^2+117k+20)+2n(85k^5+2845k^4\\
&\quad +8410k^3+8555k^2+3815k+644)-5(110k^6+577k^5+841k^4+153k^3\\
&\quad -403k^2-280k-56))/(9(42n(3k+2)+5(11k^2+28k+14)))\\
d_{18}(k,n) &= -k^8(k+1)^4(42n(3k+5)+5(11k^2+50k+53))/(27(42n(3k+2)\\
&\quad +5(11k^2+28k+14))) .
\end{aligned}\right.$$

Les expressions pour $d_{19}(k,n)$, $d_{20}(k,n)$, $d_{21}(k,n)$ sont trop longues pour être données ici. Leur dénominateur est de degré total 8 en k et n , et leur numérateur est de degré total respectif 14 , 20 et 26 en k et n .

Nous allons examiner plus en détail les récurrences que l'on obtient dans la marche en escalier suivante :



Si on pose

$w(k) = v(k,k)$ et $w_1(k) = v(k,k+1)$

on a donc les récurrences :

$$\begin{aligned}
w_1(k) &= d_1(k,k)w(k) + d_2(k,k)w_1(k-1) + d_3(k,k)w(k-1)\\
w(k+1) &= d_7(k,k+1)w_1(k) + d_8(k,k+1)w(k) + d_9(k,k+1)w_1(k-1)\\
w_1(k+1) &= d_1(k+1,k+1)w(k+1) + d_2(k+1,k+1)w_1(k) + d_3(k+1,k+1)w(k)\\
w(k+2) &= d_7(k+1,k+2)w_1(k+1) + d_8(k+1,k+2)w(k+1) + d_9(k+1,k+2)w_1(k)\\
w(k+2) &= d_{19}(k,k+1)w(k+1) + d_{20}(k,k+1)w(k) + d_{21}(k,k+1)w(k-1) .
\end{aligned}$$

Cette dernière récurrence est la récurrence diagonale (13_3) spécialisée au cas $n = k+1$.

Les coefficients sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} d_1(k,k) = 5k^2 + 4k + 1 \\ d_2(k,k) = k^6 \\ d_3(k,k) = -k^8/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(k+1,k+1) = 5k^2 + 14k + 10 \\ d_2(k+1,k+1) = (k+1)^6 \\ d_3(k+1,k+1) = -(k+1)^8/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_7(k,k+1) = (k+1)^2(65k^2+84k+28)/3 \\ d_8(k,k+1) = -(k+1)^2(39k^4+108k^3+117k^2+58k+11)/3 \\ d_9(k,k+1) = k^8(k+1)^2/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_7(k+1,k+2) = (k+2)^2(65k^2+214k+177)/3 \\ d_8(k+1,k+2) = -(k+2)^2(39k^4+264k^3+675k^2+772k+333)/3 \\ d_9(k+1,k+2) = (k+1)^8(k+2)^2/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{19}(k,k+1) = (k+2)^2(2023k^6+14739k^5+43753k^4+67500k^3+56880k^2+24768k \\ \qquad +4368)/(3(7k^2+9k+3)) \\ d_{20}(k,k+1) = (k+1)^6(k+2)^2(399k^6+2109k^5+4345k^4+4508k^3+2560k^2+768k+96)/ \\ \qquad (9(7k^2+9k+3)) \\ d_{21}(k,k+1) = -k^{10}(k+1)^6(k+2)^2(7k^2+23k+19)/(27(7k^2+9k+3)) \; . \end{cases}$$

Pour compléter ces récurrences, il suffit de connaître $v(k,n)$ pour $0 \le k,n \le 2$. Les valeurs sont les suivantes pour les suite v_1, v_2, v_3 :

$v_1(k,n)$

k \ n	0	1	2
0	0	0	1
1	1	14/3	140/3
2	247/9	1277/3	26824/3

$v_2(k,n)$

$k \backslash n$	0	1	2
0	0	1	5
1	5/3	28/3	283/3
2	500/9	2588/3	163072/9

$v_3(k,n)$

$k \backslash n$	0	1	2
0	1	1	4
1	1	17/3	172/3
2	304/9	4720/9	99136/9

Nous considérons maintenant la vitesse de convergence de la récurrence diagonale. Utilisant les formules pour $d_{19}(k,k+1)$, $d_{20}(k,k+1)$, $d_{21}(k,k+1)$ on déduit des théorèmes généraux sur ce genre de récurrences, que le comportement de la récurrence dépend surtout de l'équation caractéristique :

$$X^3 - \frac{289}{3}X^2 - \frac{57}{9}X + \frac{1}{27} = 0 .$$

Posons $X = \frac{Y}{3}$. L'équation devient :

$$Y^3 - 289Y^2 - 57Y + 1 = 0 .$$

Le discriminant de cette équation vaut

$$368947264 = 2^6.7^8 .$$

Il est positif donc l'équation possède 3 racines réelles Y_1 , Y_2 , Y_3 de valeurs numériques approchées :

$$Y_1 = 289,1970854... \qquad Y_2 = 0,0162114... \qquad Y_3 = -0,2132969...$$

On vérifie que X_1, X_2, X_3 appartiennent au corps cubique cyclique de discriminant 7^2 , ce qui est d'ailleurs suggéré par la factorisation du discrimant, et même plus précisément que si $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont (dans un certain ordre) les racines de l'équation définissant ce corps :

$$Y^3 - Y^2 - 2Y + 1 = 0$$

alors pour $i = 1,2,3$ on a $Y_i = \theta_i^{-7}$.

De ce qui précède, on déduit qu'il existe des constantes B et C_i $(i=1,2,3)$ telles que quand $k \to \infty$:

$$w_i(k) = v_i(k,k) \sim k!^6 X_1^k k^B C_i$$

avec $X_1 = Y_1/3 = 96,39902847\ldots$

Pour avoir une estimation de la vitesse de convergence, nous raisonnons comme dans l'exemple 1_3. Si on pose

$$\Delta_i w(k) = \frac{w_i(k)}{w_3(k)} - \frac{w_i(k-1)}{w_3(k-1)}$$

alors $\Delta_i w(k)$ satisfait une récurrence dont les racines de l'équation caractéristique sont $\frac{X_2}{X_1}$ et $\frac{X_3}{X_1}$ (ou encore $\frac{Y_2}{Y_1}$ et $\frac{Y_3}{Y_1}$). Ici ces racines sont réelles (ce qui correspond au fait que le discriminant de l'équation du 3e degré initiale est positif). On déduit donc de la théorie générale qu'il existe des constantes B' et C'_i telles que

$$\Delta_i w(k) \sim \left(\frac{X_3}{X_1}\right)^k k^{B'} C'_i \ .$$

On en déduit en particulier

$$\frac{w_1(k)}{w_3(k)} - \frac{\pi^4}{120} \sim \left(\frac{X_3}{X_1}\right)^k k^{B'} C''_1$$

$$\frac{w_2(k)}{w_3(k)} - \frac{\pi^2}{6} \sim \left(\frac{X_3}{X_1}\right)^k k^{B'} C''_2$$

et $\frac{X_3}{X_1} = -\frac{1}{1355,8\ldots}$

Il est à remarquer que, contrairement à l'exemple 1_3, ce résultat n'est pas aussi bon que l'on pourrait espérer. Toutefois numériquement, on constate que C''_1 et $C''_2 > 0$ donc il n'y a rien à espérer de mieux. Par contre, il est probable qu'une combinaison linéaire convenable de $\frac{w_1(k)}{w_3(k)}$ et de $\frac{w_2(k)}{w_3(k)}$ convergera comme $\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^k$ plutôt que $\left(\frac{X_3}{X_1}\right)^k$. Des calculs numériques tendent même à accréditer la conjecture suivante :

Conjecture.

$$\frac{w_1(k) - \frac{\pi^2}{2} w_2(k)}{w_3(k)} + \frac{3\pi^4}{40} \sim \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^k k^{B''} C''' .$$

Remarque. - $\quad \dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{1}{17839,08\ldots}$.

CALCUL EXPLICITE DE $v_i(k,n)$.

D'après (15_3) on a :

$$v_3(k,n) = n!^2 P_3(k,n)$$

$$v_2(k,n) = n!^2 \left[P_3(k,n) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + P_2(k,n)\right]$$

$$v_1(k,n) = n!^2 \left[P_3(k,n) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} H_{i-1}^{(2)} + P_2(k,n) H_n^{(2)} + P_1(k,n)\right]$$

où P_1, P_2, P_3 satisfont aux récurrences décrites en (15_3). Grâce à un calcul par récurrence, on montre que la solution des récurrences (15_3) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} P_1(k,n) \\ P_2(k,n) \\ P_3(k,n) \end{pmatrix} = \frac{k!^4}{3^k} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \binom{n+m}{m} \binom{k+m}{m} \left(\sum_i \binom{k}{i} \binom{k+i}{i}^2 \binom{k}{m-i}\right) \begin{pmatrix} \beta_1(m,n) \\ \beta_2(m,n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\beta_1(m,n) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(\ell-1)!\, H_{\ell-1}^{(2)}}{\ell(n+1)\ldots(n+\ell)}$$

$$\beta_2(m,n) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\ldots(n+\ell)} \quad .$$

APPLICATIONS ARITHMETIQUES.

Il semble qu'ici il n'y en ait pas. En effet, on doit pouvoir montrer aisément grâce aux formules ci-dessus que $d_k^4 3^k w_i(k,k)/k!^6 \in \mathbb{Z}$ donc la constante qui intervient pour la croissance des dénominateurs est $e^4.3X_1 = e^4 Y_1 = 15789,6\ldots$ ce qui est beaucoup plus grand que $1355,8$. Si la convergence avait été gouvernée par $\dfrac{X_2}{X_1}$ au lieu de $\dfrac{X_3}{X_1}$ cela aurait marché. Si notre conjecture est vraie, cela ne se produit que pour la combinaison linéaire $w_1(k) - \frac{\pi^2}{2} w_2(k)$ et comme $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ il n'y a pas d'application arithmétique de ce côté-là non plus.