SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

CLAUDE MOSER

Sur le nombre de classes d'un corps K réel cyclique de conducteur premier, deg $K \leq 4$

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 8 (1979-1980), exp. n° 3, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1979-1980__8__A3_0>

Séminaire de Théorie des Nombres III.1
10 janvier 1980
Grenoble

SUR LE NOMBRE DE CLASSES D'UN CORPS K REEL CYCLIQUE DE CONDUCTEUR PREMIER , deg K ≤ 4 .

par

Claude MOSER

0. - INTRODUCTION ET RESULTATS.

La conjecture de Vandiver dit que si p est un nombre premier, le nombre de classes du sous-corps réel maximal du p-ième corps cyclotomique est premier à p .

Le présent exposé se place modestement dans "l'environnement" de cette conjecture, motivé par le théorème suivant :

THEOREME 1. - Soit K/k une extension cyclique de degré premier ℓ de corps de nombres. On suppose qu'un seul idéal premier est ramifié dans cette extension. Alors

1) La norme induit un homomorphisme surjectif du groupe U_K des unités de K sur le groupe U_k des unités de k .

2) Le nombre de classes $h(k)$ de k divise le nombre $h(K)$ de classes de K et $\frac{h(K)}{h(k)} \equiv 1$ (modulo ℓ).

Ceci résulte d'une étude détaillée de la formule des classes ambiges [6] . Une idée pour aborder la conjecture de Vandiver est donc de dévisser $\mathbb{Q}_o^{(p)}/\mathbb{Q}$ en une tour d'extensions cycliques de degré premier et de démontrer que les rapports de nombres de classe successifs sont premiers à p et (si possible inférieur à p).

On se propose de démontrer ici les deux résultats :

THEOREME A. - Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 3. Soit K le sous-corps cubique de $\mathbb{Q}^{(p)}$. Si p est de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$ le nombre de classe de K est inférieur à $p/3$. Sinon il est inférieur à $p/4$.

THEOREME B. - Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 8, K le sous-corps réel de degré 4 de $\mathbb{Q}^{(p)}$ et k le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Alors

$$h(k) \leq \frac{\sqrt{p}}{2}$$

$$\frac{h(K)}{h(k)} \leq \frac{p}{4} .$$

Le second ingrédient est la formule analytique du nombre de classes qui s'écrit pour une extension réelle $K/\mathbb{Q}$:

$$2^{[K:\mathbb{Q}]-1} h(K) R(K) (\Delta(K))^{-\frac{1}{2}} = \lim_{s \to 1+} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(0)} .$$

Le terme de droite n'étant autre chose que le produit $\prod_{\chi \neq \chi_o} L(1,\chi)$ avec les notations suivantes :

$h(K)$ le nombre de classes de K,

$R(K)$ le régulateur de K,

$\Delta(K)$ le discriminant de K,

χ parcourt l'ensemble des caractères non principaux pairs de conducteur $f(K)$, dont l'ordre divise $[K:\mathbb{Q}]$. Voir [5].

Pour ce qui concerne une extension cyclique K/k on aura en particulier pour un degré premier ℓ.

$$\frac{h(K)}{h(k)} = 2^{-[K:\mathbb{Q}]+[k:\mathbb{Q}]} \frac{R(k)}{R(K)} \left\{\frac{\Delta(K)}{\Delta(k)}\right\}^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{\chi \\ w(\chi)=[K:\mathbb{Q}]}} L(1,\chi)$$

le produit étant étendu aux caractères de Dirichlet d'ordre égal à $[K:\mathbb{Q}]$. Il y en a $\varphi([K:\mathbb{Q}])$.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, on a les deux formules suivantes :

$$[K:\mathbb{Q}] = 3 \ , \quad h(K) = \frac{1}{4}\frac{P}{R(K)} \left|L(1,\chi)\right|^2 \quad (p \equiv 1 \pmod 6) \ ,$$

$$\begin{matrix}[K:\mathbb{Q}] = 4 \\ [K:k] = 2\end{matrix} \ , \quad \frac{h(K)}{h(k)} = \frac{P}{4}\frac{R(k)}{R(K)} \left|L(1,\chi)\right|^2 \quad (p \equiv 1 \pmod 8) \ .$$

Le problème est donc de montrer que $h(K)$ dans le cas cubique, $h(k)$ et $h(K)/h(k)$ dans le cas du degré 4 sont inférieurs à p . Il s'agit donc de majorer les $|L(1,\chi)|$ et de minorer $R(k)$ (resp. $R(k)$ et $R(K)/R(k)$) .

1. - MINORATION DE $L(1,\chi)$.

A quelques modifications techniques près cette majoration est donnée en suivant une méthode de HUA [4] présentée dans le cas d'un caractère réel.

LEMME 2. - *Soient* f *un entier naturel et* χ *un caractère primitif pair de conducteur* f . *Pour tout entier naturel* n *on note respectivement* n^* *le plus petit reste de* n *modulo* f *et* $S(n)$ *le nombre complexe*

$$S(n) = \sum_{a=0}^{n} \sum_{j=0}^{a} \chi(j) \ .$$

Alors, pour tout $n > 0$, *on a* $|S(n)| \leq (n^*+1)\cdot\frac{1}{2}\left\{\sqrt{f} - \frac{n^*+1}{\sqrt{f}}\right\}$.

On utilise les propriétés relatives à la somme de Gauss associée au caractère χ , à savoir

$$|\tau(\chi)| = f$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad \sum_{x \bmod f} \chi(x) \exp(2i\pi xn/f) = \bar{\chi}(n)\,\tau(\chi) \ .$$

Si on pose $\varphi(n,\chi) = \tau(\chi)\cdot \sum_{a=0}^{n} \sum_{j=-a}^{a} \bar{\chi}(j)$, on a :

$$\varphi(n,\chi) = \sum_{x \bmod f} \chi(x) \sum_{a=0}^{n} \sum_{j=-a}^{a} u^{2nj} \quad \text{avec} \quad u = \exp(i\pi/f)$$

$$\varphi(n,\chi) = \sum_{x \bmod f} \chi(x)\,(u^{x} - u^{-x})^{-1} \sum_{a=0}^{n} (u^{(2a+1)x} - u^{-(2a+1)x})$$

$$= \sum_{x \bmod f} \chi(x)\,\frac{\sin^2 \pi(n+1)x/f}{\sin^2 \pi x/f} \ .$$

On a donc en premier lieu $\varphi(n,\chi) = \varphi(n^*,\chi)$ pour tout n et en second lieu l'inégalité

$$|\varphi(n,\chi)| \le \sum_{\substack{x \bmod f \\ x \neq 0}} \sum_{a=0}^{n^*} \sum_{j=-a}^{a} u^{2jx} \ .$$

C'est-à-dire $|\varphi(n,\chi)| \le \sum_{a=0}^{n^*} \left\{ \sum_{j=-a}^{a} -1 + \sum_{h=1}^{f} e^{2i\pi jh/f} \right\}^{-}$. La quantité entre $\{\ \}$ vaut $f-1$ si $j = 0$ et -1 sinon. On obtient en fin de compte

$$|\varphi(n,\chi)| \le (n^*+1)[f-1] + \sum_{a=1}^{n^*} -2a$$

$$|\varphi(n,\chi)| \le (n^*+1)[f-1-n^*] \ .$$

Du fait que χ est pair on a $S_\chi(n) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{\tau(\chi)}\ \varphi(n,\chi) \right\}$. D'où le lemme.

Pour des raisons techniques qui interviendront à la fin de l'exposé, on est amené à considérer des caractères non primitifs.

LEMME 3. - Soient f un entier, χ un caractère modulo f, non primitif, non principal et pair. Soit χ_1 le caractère primitif équivalent à χ. Soient q le conducteur de χ_1 et $d = (f/q)$. Alors

$$S_\chi(n) = \sum_{r|d} \mu(r)\,\chi_1(r)\,S_{\chi_1}([n/r]) \ .$$

En particulier pour tout $n \in [\sqrt{2q}, q]$, si $f = 2q$ on a

$$|S_\chi(n)| \le \frac{3}{2}\, n\sqrt{q}$$

et pour tout entier $n > q$, $|S_\chi(n)| < \frac{3}{8}\, q\sqrt{q}$.

On sait que $\sum_{\delta \mid m} \mu(\delta)$ est égal à 1 si $m = 1$, sinon à 0.
Par suite avec les notations de l'énoncé, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\chi(n) = \chi_1(n) \sum_{\delta \mid (n,d)} \mu(\delta) .$$

De là, il résulte les égalités suivantes

$$S_\chi(n) = \sum_{\delta \mid d} \mu(\delta) \sum_{a=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ \delta \mid j}}^{a} \chi_1(j)$$

$$= \sum_{\delta \mid d} \mu(\delta)\chi_1(\delta) \sum_{a=0}^{n} \sum_{j=0}^{[a/\delta]} \chi_1(j)$$

$$= \sum_{\delta \mid d} \mu(\delta)\chi_1(\delta) \sum_{k=0}^{[n/\delta]} \delta \sum_{j=0}^{k} \chi_1(j)$$

$$S_\chi(n) = \sum_{\delta \mid d} \delta\mu(\delta)\chi_1(\delta) S_{\chi_1}([n/\delta]) .$$

En particulier, si $d = 2$ et $n \in [\sqrt{2q}, q-1]$, $n = n^*$ et d'après le lemme 2

$$|S_\chi(n)| \leq \sum_{\delta=1}^{2} \frac{1}{2}\delta \left\{ ([\frac{n}{\delta}]^* + 1) \left\{ \sqrt{q} - \frac{[n/\delta]+1}{\sqrt{q}} \right\} \right.$$

$$|S_\chi(n)| \leq \frac{1}{2}(n+1)\left\{ \sqrt{q} - \frac{n+1}{\sqrt{q}} \right\} + (\frac{n}{2}+1)\left\{ \sqrt{q} - \frac{n}{2\sqrt{q}} \right\}$$

$$|S_\chi(n)| \leq \frac{3}{2}n\sqrt{q} + \frac{\sqrt{q}}{2} - \frac{(n+1)^2}{2\sqrt{q}} + \sqrt{q} - \frac{n(n+2)}{4\sqrt{q}} .$$

Or $\frac{3\sqrt{q}}{2} - \frac{(n+1)^2}{2\sqrt{q}} - \frac{n(n+2)}{4\sqrt{q}} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ si $n > \sqrt{2q}$. Ceci achève la démonstration des deux premières parties. La dernière est immédiate, du fait d'après le lemme 2 que $|S_{\chi_1}(n)| < \frac{q\sqrt{q}}{8}$ ∎

LEMME 4. - Soient p un nombre premier et χ_1 un caractère primitif pair modulo p. On suppose $p > 30$. Alors

$$|L(1,\chi_1)| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Log} p + \gamma - \frac{1}{2} .$$

On pose $S(0) = S(-1) = 0$ et pour $n \geq 1$ on conserve les notations du lemme 2. On remarque que $S(p) = S(p-1) = 0$. Une majoration de $|S(n)|$ est évidemment $\frac{1}{2}n(n+1)$, majoration meilleure que celle du

lemme 2 pour $n < \sqrt{p}$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\chi_1(n) = S(n) - 2S(n-1) + S(n-2)$$

ce qui permet d'écrire

$$L(1,\chi)_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,S(n)}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) \ .$$

Les remarques qui précèdent amènent à "couper" en trois morceaux :

$$\Sigma\,1 = \sum_{1}^{[\sqrt{p}]} \rho(n) \ ; \quad \Sigma\,2 = \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \rho(n) \ ; \ \Sigma\,3 = \sum_{p+1}^{\infty} \rho(n)$$

et il suffit de majorer $|\Sigma\,1|$, $|\Sigma\,2|$ et $|\Sigma\,3|$.

- On a $|\Sigma\,1| \leq \sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{n+2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \sum_{1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{n}$.

D'après la formule d'Euler-Mac-Laurin on obtient

$$\sum_{1}^{A} \frac{1}{j} \leq \text{Log } A + \gamma + \frac{1}{2A}$$

et donc

$$|\Sigma\,1| \leq \frac{1}{2} \text{ Log } p - \frac{3}{2} + \gamma + \frac{1}{2[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} \ .$$

- D'après la majoration fournie par le lemme 2, on a

$$|\Sigma\,2| \leq \sum_{1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{\sqrt{p}}{n(n+2)} - (\sqrt{p})^{-1} \sum_{1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)}$$

$$|\Sigma\,2| \leq 1 - \frac{\sqrt{p}}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{\sqrt{p}}{p-1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \text{ Log } p \ .$$

- On a immédiatement

$$|\Sigma\,3| \leq \frac{1}{8}\, p^{3/2} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{p^{3/2}}{8} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right) < \frac{1}{8\sqrt{p}} \ .$$

D'où

$$|L(1,\chi_1)| \leq \frac{1}{2} \text{ Log } p + \gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} - \frac{\sqrt{p}}{p-1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{8\sqrt{p}} - \frac{\text{Log } p}{2\sqrt{p}}$$

et on vérifie que $|L(1,\chi_1)| \leq \frac{1}{2} \text{ Log } p + \gamma - \frac{1}{2}$ pour $p > 30$ ■

LEMME 5. - On utilise les notations du lemme 4. De plus, soit χ le caractère modulo $2p$ nul sur les entiers pairs qui coïncide avec χ_1 sur les entiers impairs. Alors :

1) $L(1,\chi_1) = (1-\chi_1(2)2^{-1})L(1,\chi)$.

2) $|L(1,\chi)| \leq \frac{1}{2}\operatorname{Log} p + 1{,}546 + \frac{1}{\sqrt{p}}\cdot 0{,}1427$.

La première assertion résulte du développement en produit eulérien de $L(1,\chi)$. En ce qui concerne la seconde, on procède à peu près comme dans la démonstration qui précède, en utilisant le lemme 3 au lieu du lemme 2 . On coupe de la façon suivante :

$$\sum 1 = \sum_{n=1}^{[\sqrt{2p}]} \rho(n)$$

$$\sum 2 = \sum_{1+[\sqrt{2p}]}^{p} \rho(n) \quad \text{avec} \quad \rho(n) = 2\,S(n)\{n(n+1)(n+2)\}^{-1} .$$

$$\sum 3 = \sum_{p+1}^{\infty} \rho(n)$$

On obtient :

- $|\sum 1| \leq \frac{1}{2}\operatorname{Log} p + \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2[\sqrt{2p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{2p}]} + \frac{1}{2+[\sqrt{2p}]}$

- $|\sum 2| \leq 3\sqrt{p} \sum_{n=1+[\sqrt{2p}]}^{p} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 3\sqrt{p}\left\{\frac{1}{2+[\sqrt{2p}]} - \frac{1}{p+2}\right\}$

  $|\sum 2| \leq \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{p}}{p+2}$.

- $|\sum 3| < \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{p}}$.

D'où $|L(1,\chi)| \leq \frac{1}{2}\operatorname{Log} p + \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \gamma + \frac{3}{2}(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2[\sqrt{2p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{2p}]}$

$$+ \frac{1}{2+[\sqrt{2p}]} + \frac{3}{8\sqrt{p}} - \frac{2}{\sqrt{p}} .$$

D'où le lemme ∎

2. - MINORATIONS DE REGULATEURS.

On va distinguer ici le cas du degré 3 du cas du degré 4 . On utilisera les représentations d'entiers de telles extensions données par HASSE [3] . Celles-ci, au moins pour le degré 3, avaient été racontées par M.N.G. en 1971. On rappelle simplement ici les principales formules.

2.1. - Le cas cubique.

Tout nombre premier congru à 1 modulo 6 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\begin{cases} p = \frac{1}{4}(a^2+3b^2) \\ a \in \mathbb{Z} \ , \ a \equiv 2 \pmod 3 \\ b \in \mathbb{N} \ , \ b \equiv 0 \pmod 3 \ , \ b > 0 \ . \end{cases}$$

Si dans $\mathbb{Q}(j)$ on pose $\varphi = \frac{1}{2}(a+b\sqrt{-3})$, alors il existe un caractère cubique modulo p , soit χ tel que la somme de Gauss $\tau(\chi)$ vérifie

$$\tau(\chi)^3 = -p\varphi \ . \qquad (1)$$

Si on pose

$$T = -\tau(\chi)$$

on a les égalités

$$T^3 = p\varphi \ , \quad T^2 = \varphi\bar{T} \ . \qquad (2)$$

Cela étant, tout élément A de K peut se mettre sous la forme

$$A = \frac{1}{3}\left\{x + yT + \bar{y}\bar{T}\right\} \overset{df}{=} [x,y] \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q}(j) \end{cases} . \qquad (3)$$

Un $A \in K$ est un entier si et seulement si

$$\begin{matrix} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z}[j] \end{matrix} \quad x \equiv y \bmod (1-j) \ \text{ dans } \ \mathbb{Z}[j] \qquad (4)$$

Soit σ le générateur de $Gal(K/\mathbb{Q})$ tel que $\chi(\sigma) = j$. Alors $A^\sigma = [x,j^2y]$. Les formules qui nous seront utiles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} N_{K/\mathbb{Q}}[x,y] &= \frac{1}{27}\left\{x^3-3pxNy + pS(\varphi y^3)\right\} \\ Tr_{K/\mathbb{Q}}([x,y]^2) &= \frac{1}{3}(x^2+2pNy) \end{aligned} \qquad (5)$$

où N (resp. S) est la norme (resp. la trace) dans $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}$.

LEMME 6. - Soit $\varepsilon = [x,y]$ une unité de K qui n'est pas rationnelle. Son régulateur vérifie

$$R(\varepsilon) \geq \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2\left\{\frac{x^2+2p\,Ny-3}{6}\right\} .$$

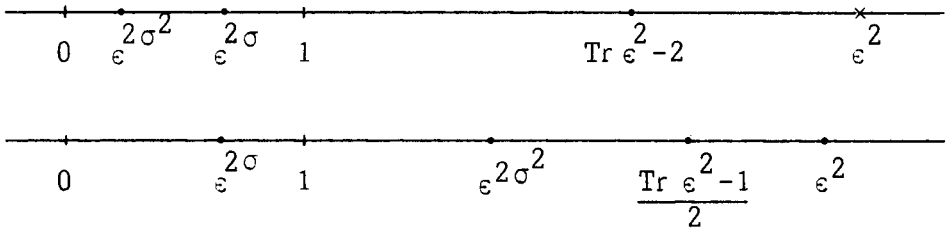
On vérifie facilement que

$$R(\varepsilon) = \mathrm{Log}^2|\varepsilon| + \mathrm{Log}|\varepsilon|\cdot\mathrm{Log}|\varepsilon^{\sigma}| + \mathrm{Log}^2|\varepsilon^{\sigma}| .$$

C'est-à-dire

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{4}\left\{(\mathrm{Log}\,\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\varepsilon^{2\sigma})^2 + \frac{3}{4}\,\mathrm{Log}^2\,\varepsilon^{2\sigma}\right\}$$

ou l'une des deux autres égalités obtenues par permutation sur $1,\sigma,\sigma^2$. Il n'est pas difficile de voir qu'on a, en supposant que ε^2 est la plus grande des trois unités $\varepsilon^2,\varepsilon^{2\sigma},\varepsilon^{2\sigma^2}$ l'un des deux schémas suivants, à permutation près de σ et σ^2



Dans le premier cas $|\mathrm{Log}\,\varepsilon^{2\sigma} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\varepsilon^2| \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\varepsilon^2$. Donc

$$R(\varepsilon) \geq \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2(\varepsilon^2) \geq \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2(\mathrm{Tr}(\varepsilon^2)-2) .$$

Dans le second cas $|\mathrm{Log}\,\varepsilon^{2\sigma} - \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\varepsilon^2| \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\varepsilon^2 + \mathrm{Log}\,\varepsilon^{2\sigma} \geq \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\varepsilon^2$. D'où cette fois

$$R(\varepsilon) \geq \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2\,\varepsilon^2 \geq \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2\left\{\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\varepsilon^2)-1)\right\}$$

et le lemme ■

LEMME 7. - Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 3 . Le régulateur R(K) de K vérifie :

- Si p est de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$, alors $R(K) > \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2(\frac{7}{15}\,p)$.
- Sinon $R(K) > \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2(\frac{52}{30}p)$ dès que $p > 130$.

D'après les formules 4 et 5 ci-dessus l'unité fondamentale $\varepsilon = [x,y]$ de K doit vérifier

$$\begin{cases} x \equiv y \text{ (modulo } 1-j) \text{ dans } \mathbb{Q}(j) \\ (x-3)(x^2+3x+9) = p(3x\,Ny - S(\varphi y^3)) \\ x^2 + 2p\,Ny \text{ minimum} . \end{cases}$$

On essaie les diverses valeurs possibles pour Ny, telles que $Tr(\varepsilon^2)$ soit minimum.

1) A conjugaison près pour ε, l'hypothèse $Ny = 1$ implique $y \in \{1,-1,(1+j),-(1+j)\}$, ce qui conduit à

$$(x-3)(x^2+3x+9) = p(3x + a\,\theta(y))$$

avec $\theta(y) = \begin{cases} -y & \text{si } y \in \{-1,1\} \\ 1 \text{ si } y = 1+j \text{ , } -1 \text{ si } y = 1-j . \end{cases}$

On vérifie que $p \mid (x-3)$ conduit à $|a| > \sqrt{4p}$, ce qui est contradictoire. Si on pose $dp = x^2+3x+9$ on obtient

$$a^2 = \{\frac{4}{d}(x^2+3x+9) - 3b^2\} = ((d-3)x-3d)^2$$

c'est-à-dire

$$(d-1)^2(d-4)x^2 - 6[d^2(d-3)+2]x + 9d^3 + 3b^2d - 36 = 0$$

ou encore

$$(d-1)^2(d-4)x^2 - 6(d-1)(d^2-2d-2)x + 3(3d^3+b^2d-12) = 0 .$$

La condition $d = 1$ implique $b = 3$, donc $p = \frac{1}{4}(a^2+27)$ avec $x = \frac{a\,\theta(y)-3}{2}$. Si $d \neq 1$, on a à résoudre l'équation

$$(d-1)^2(d-4)x^2 - 6(d^2-2d-2)(d-1)x + 3(3d^3+b^2d-12) = 0$$

On ne peut avoir $d = 4$ car x^2+3x+9 est impair. Le discriminant de cette équation est, en posant $b = 3b_1$

$$9(d-1)^2\{-3b'^2d^2 + 4(b_1^2+2)d - 12\}$$

qui est négatif pour $d > 4$. On ne peut avoir $d = 3$ car x est non multiple de 3.

Inversement si p est de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$, le corps K admet

pour unité fondamentale $[\frac{-a+3}{2},-1]$. La majoration du régulateur est alors facile. Maintenant si p n'est pas de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$, l'hypothèse $N(y) = 3$ implique que 3 divise x . Posant $x = 3x_1$, on obtient l'équation $(x_1-1)(x_1^2+x+1) = p(x_1-\frac{1}{27}S(\varphi y^3))$. Or on vérifie que $S(y^3\varphi) \in \{27b,-27b\}$. D'où $(x_1,-1)(x_1^2+x+1) = p(x_1+\varepsilon b)$. On vérifie que le second membre est congru à x_1 modulo 3 tandis que le premier est congru à x^3-1 , c'est-à-dire à $x-1$. En conclusion si p n'est pas de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$ on a $Ny \geq 4$. En ce qui concerne x , ou bien $x \geq p+3$, ou bien p divise x_1^2+3x+9 avec un quotient d qui vérifie

$$3 \mid d \Rightarrow N(y) \geq 6 \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\varepsilon^2 > 4p$$

$$3 \nmid d \Rightarrow d \geq 5 \Rightarrow x > \frac{29\sqrt{p}}{10} \text{ dès que } p > 13 .$$

On en déduit $x^2+2pNy > 12,41\cdot p$. Donc

$$\frac{\mathrm{Tr}(\varepsilon^2)-1}{2} > \frac{1}{6}\{12,41p-3\} > 2p$$

et

$$R(K) \geq \frac{1}{4}\mathrm{Log}^2(2p) .$$

2.2.- Le cas du degré 4 .

Soit k le corps quadratique intermédiaire entre K et $\mathbb{Q}$. On désigne par ε_o l'unité fondamentale de k et par ε une unité fondamentale relative de K , c'est-à-dire que ε et ε^σ engendrent le groupe des unités de K dont la norme dans K/k appartient à $\{-1,1\}$. Il résulte facilement de la seconde assertion du théorème 1 qu'on a $N_{K/k}\varepsilon = -1$ et que dans le groupe U_K des unités de K le sous-groupe engendré par ε_o , ε , ε^σ est d'indice 2 . Par suite, on a

$$R(K) = \frac{1}{2}R(\varepsilon_o,\varepsilon,\varepsilon^\sigma) .$$

Or on a

$$R(\varepsilon_o,\varepsilon,\varepsilon^\sigma) = \mathrm{ABS}\begin{vmatrix} \mathrm{Log}|\varepsilon| & \mathrm{Log}|\varepsilon^\sigma| & -\mathrm{Log}|\varepsilon| \\ \mathrm{Log}|\varepsilon^\sigma| & -\mathrm{Log}|\varepsilon| & -\mathrm{Log}|\varepsilon^\sigma| \\ \mathrm{Log}|\varepsilon_o| & -\mathrm{Log}|\varepsilon_o| & \mathrm{Log}|\varepsilon_o| \end{vmatrix} .$$

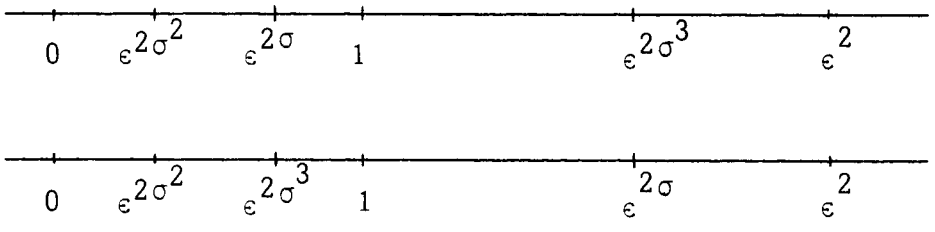
Ce qui donne

$$R(\varepsilon_o, \varepsilon, \varepsilon^\sigma) = R(\varepsilon_o)\cdot 2\{\mathrm{Log}^2|\varepsilon| + \mathrm{Log}^2|\varepsilon^\sigma|\} .$$

En conclusion provisoire

$$\frac{R(K)}{R(k)} = \frac{1}{4}\{\mathrm{Log}^2\varepsilon^2 + \mathrm{Log}^2\varepsilon^{2\sigma}\} .$$

Par ailleurs, on a l'une des répartitions possibles des unités



.

Dans le premier cas on a :

$$\mathrm{Tr}(\varepsilon^2) \le 2 + \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^{2\sigma}} \le 2 + 2\varepsilon^2$$

Donc $\mathrm{Log}(\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,\varepsilon^2-1)) \le \mathrm{Log}(\varepsilon)^2$ et $\mathrm{Log}^2(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\varepsilon^2)-1) \le \underset{i}{\mathrm{Max}}\,|\mathrm{Log}(\varepsilon^{2\sigma^i})|$.

Dans le second cas on a :

$$\mathrm{Tr}(\varepsilon^2) \le 2 + \varepsilon^{2\sigma} + \varepsilon^2$$

et aussi $(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\varepsilon^2-1) \le \mathrm{Max}\,\varepsilon^{2\sigma^i}$. Donc, dans tous les cas :

$$\mathrm{Max}(\mathrm{Log}^2(\varepsilon^{2\sigma^i})) \ge \mathrm{Log}^2(\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\varepsilon^2)-1) .$$

Il en résulte en définitive :

$$\boxed{\frac{R(K)}{R(k)} \ge \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2(\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\varepsilon^2)-1)} \quad .$$

Donnons maintenant la représentation de Hasse des entiers de K . Le nombre premier p congru à 1 modulo 8 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\begin{cases} a^2+b^2 \\ a \in \mathbb{Z} \ , \ a \equiv 1 \bmod 4 \\ b \in \mathbb{N} \ , \ b \equiv 0 \bmod 4 \ . \end{cases}$$

Si on pose $\pi = a+bi$, il existe un caractère χ pair d'ordre 4 , de conducteur p tel que la somme de Gauss $\tau(\chi)$ vérifie

$$\begin{cases} T^2 = -\sqrt{p}\,\pi \\ T\bar{T} = p \quad . \end{cases}$$

Le caractère χ étant ainsi choisi, on note σ un générateur de $K/\mathbb{Q}$ tel que $\chi(\sigma) = i$. Alors les entiers de K peuvent être représentés sous la forme

$$A = \frac{1}{2}\{x + \frac{1}{2}(yT + \bar{y}\bar{T})\} \ , \quad \begin{cases} x \text{ entier de } k \ , \quad x = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\sqrt{p}) \\ y \in \mathbb{Z}[i] \quad , \quad y = y_1 + iy_2 \\ x_1 \equiv x_2 \equiv y_1 + y_2 \bmod 2 \ . \end{cases}$$

Alors si $A = [x,y]$ on a $A^\sigma = [\tilde{x}, iy]$. Les formules qui nous seront utiles sont les suivantes : si on pose

$$\Phi(y) = a(y_1^2 - y_2^2) - 2by_1y_2$$

on a

$$N_{K/k}(A) = \frac{1}{4}\{x^2 - \frac{1}{2}(p(y_1^2 + y_2^2) - \sqrt{p}\,\Phi(y))\}$$

$$Tr_{K/\mathbb{Q}} A^2 = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(x_1^2 + px_2^2) + p(y_1^2 + y_2^2)\} \ .$$

En particulier, si ε est une unité relative fondamentale, on aura si $\varepsilon = [x,y]$,

$$-1 = \frac{1}{4}\left\{x^2 - \frac{1}{2}(P(y_1^2 + y_2^2) - \sqrt{p}\,\Phi(y))\right\} \quad .$$

PROPOSITION 8. - Soit $m(K)$ le minimum de la forme quadratique $u \longrightarrow \mathrm{Tr}\, u^2$ sur le groupe E des unités relatives. Alors

1) Si $b = 4$, $m(K) = p-4$

2) Si $b > 4$, $m(K) \geq 5p-4$.

Si ε est une unité relative fondamentale sa norme relative est -1 . Si on pose $\varepsilon = [x,y]$ on devra avoir

$$\frac{x_1^2 + px_2^2}{4} - \frac{1}{2}\,p(y_1^2 + y_2^2) = -4$$

$$x_1x_2 = a(y_1^2 - y_2^2) - 2by_1y_2$$

$$x_1 \equiv x_2 \equiv y_1 + y_2 \pmod 2 \ .$$

Dans ces conditions la trace absolue de ε^2 est égale à

$$p(y_1^2+y_2^2) - 4 \ .$$

Il est donc suffisant de regarder quelles sont les valeurs minimum possibles pour $y_1^2 + y_2^2$.

• On essaie $y_1^2+y_2^2 = 1$. Modulo la conjugaison, on peut alors supposer $y_1 \in \{-1,1\}$ et $y_2 = 0$. On obtient

$$x_1^2 \equiv -16 \text{ modulo } p$$
$$x_1x_2 = a$$
$$x_1 \equiv x_2 \equiv 1 \text{ modulo } 2 \ .$$

De la majoration $|x_1| \leq |a| < \sqrt{p}$ on déduit $x_1^2 = p^2-16$. Donc $x_1^2 = a^2+(b^2-16)$, d'où $b = 4$ et $p = a^2+16$. Une unitérelative fondamentale est $\varepsilon = [\frac{a-\sqrt{p}}{2},1]$.

Réciproquement, il est évident que si $p = a^2+16$, $y_1^2+y_2^2 = 1$. Supposons dorénavant p non de la forme a^2+16 .

• L'hypothèse $y_1^2+y_2^2 = 2$ implique à conjugaison ou changement de signe près $y_1 = y_2 = 1$. D'où le système

$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ pairs}$$
$$x_1x_2 = -2b \ .$$

Donc $|x_1| \leq b < \sqrt{p}$ si par suite $x_1^2 = 4p-16 = 4a^2+4b^2-16 > 2b^2$ contradiction. On ne peut avoir $y_1^2+y_2^2 = 3$. L'hypothèse $y_1^2+y_2^2 = 4$ permet de supposer $y_1 = 2$, $y_2 = 0$. D'où le système

$$\begin{cases} x_1 \text{ et } x_2 \text{ pairs} \\ x_1x_2 = 4a \\ x_1^2 \equiv -16 \text{ mod } p \ . \end{cases}$$

On aurait

$$|x_1| < 2|a|$$

et

$$x_1^2 = 4p-16 = 4a^2 + 4b^2 - 16 > 4a^2 \ ,$$

nouvelle contradiction ; d'où le lemme ■

3. - DEMONSTRATION DES RESULTATS.

3.1. Le cas cubique.

• Si p n'est pas de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$, s'il est congru à 1 modulo 3 et supérieur à 30, le nombre de classes $h(K)$ du sous-corps cubique de $\mathbb{Q}^{(p)}$ est majoré par

$$\frac{p}{4} \cdot \frac{(1/4)\{\text{Log } p + 2\gamma - 1\}^2}{1/4\{\text{Log}^2(2p)\}} < \frac{p}{4} .$$

Les nombres premiers inférieurs à 30 congrus à 1 modulo 3 sont tous de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$.

• Si p est de la forme $\frac{1}{4}(a^2+27)$, alors 2 n'est pas reste cubique modulo p et on a

$$\left|1 - \frac{\chi_1(2)}{2}\right|^{-1} = \left|1-\frac{j}{2}\right|^{-1} = \frac{2}{\sqrt{7}} .$$

On utilise alors le lemme 5 qui fournit la majoration

$$R(K) \leq \frac{p}{4} \frac{(1/4)\{\text{Log } p + 16/5\}^2}{(1/4)\{\text{Log } p - \text{Log}\frac{15}{7}\}^2} \cdot \frac{4}{7} .$$

On vérifie alors que pour $p > 4000$ le terme de droite est inférieur à $p/3$. Pour $p < 4000$ la table 1 de [1] fournit le résultat suivant :

p	7	13	19	37	79	97	139	163	313
h(K)	1	1	1	1	1	1	1	4	7
p	349	607	709	877	937	1063	1129	1489	1567
h(K)	4	4	4	7	4	13	7	19	7
p	1987	2557	2659	3313	3547				
h(K)	7	7	19	19	19				

3.2. Le cas du degré 4.

• En premier lieu on considère le corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = k$. Du fait que p est congru à 1 modulo 8, l'unité fondamentale ε_0

de k est de la forme $a+b\sqrt{p}$, avec a et b entiers naturels. En particulier on a (grossièrement) $\varepsilon > \sqrt{2p}$ et le régulateur de k est supérieur à $\frac{1}{2}\operatorname{Log} 2p$. Il résulte de ce qui précède que

$$h(k) \leq \frac{\sqrt{p}}{2} \; \frac{\frac{1}{2}\operatorname{Log} p + \gamma - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\operatorname{Log} p + \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2} < \frac{\sqrt{p}}{2}$$

dès que $p > 30$. De plus, $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ est principal. La majoration ci-dessus est donc valable pour tout nombre premier p congru à 1 modulo 8 .

• En second lieu, si p n'est pas de la forme a^2+16 on a la majoration

$$\frac{h(K)}{h(k)} \leq \frac{p}{4}\left\{\frac{\operatorname{Log} p + 2\gamma - 1}{\operatorname{Log}\frac{5p-6}{2}}\right\}^2 < \frac{p}{4} \quad (p>30) \; .$$

• Enfin, si p est de la forme a^2+16 , 2 est reste quadratique modulo p mais n'est pas reste de puissance quatrième. On a donc $\left|1-\frac{\chi(2)}{2}\right|^2 = \left|1+\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{9}{4}$. On utilise le lemme 5 pour obtenir la majoration

$$\frac{h(K)}{h(k)} \leq \frac{p}{4}\cdot\frac{4}{9}\left\{\frac{\operatorname{Log} p + 3,092 + 0,1427\cdot p^{\frac{1}{2}} \times 2}{\operatorname{Log}(\frac{p-6}{2})}\right\}^2$$

et on vérifie que le terme de droite est inférieur à $p/4$ dès que $p > 4000$. Pour les nombres premiers inférieurs à 4000 la table [2] donne le résultat :

p	17	41	97	137	241	457	641	857	977
h(K)	1	1	1	1	1	5	5	5	5
p	1697	2417	2617	3041					
h(K)	17	17	13	13					

Ce qui achève les démonstrations ■

[1] GRAS Marie-Nicole - Méthodes et algorithmes pour le calcul numérique du nombre de classes et des unités d'une extension cyclique cubique de $\mathbb{Q}$. Jour. F. die reine und ange. Math. 277 (1975).

[2] GRAS Marie-Nicole - Tables numériques du nombre de classes et des unités des extensions cycliques de degré 4 de $\mathbb{Q}$. Sémin. Th. des nbres, Besançon (77/78).

[3] HASSE Helmut - Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit... Mathematische Abhandlungen 3 de Gzuyter (1975).

[4] HUA Loo-Keng - On the least solution of Pell's equation. American Jour. of Math. (1942).

[5] LANG Serge - Cyclotomic Fields, GTM 59, Springer.

[6] YOKOI Hideo - On the class number of a relatively cyclic Number Field. Nagoya Math. Jour. 29 (1967).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)