

BRUNO MARTEL

**De l'anneau des entiers d'une extension de type (p, p)
d'un corps p -adique**

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 8 (1979-1980), exp. n° 2, p. 1-26

http://www.numdam.org/item?id=STNG_1979-1980__8__A2_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Grenoble implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE L'ANNEAU DES ENTIERS D'UNE EXTENSION DE
TYPE (p, p) D'UN CORPS p -ADIQUE

par

Bruno MARTEL

1. - INTRODUCTION

Soit A l'anneau des entiers d'un corps p -adique k , B celui d'une extension galoisienne finie K , et $G = \text{Gal}(K/k)$. B est un $A[G]$ -module, il est libre si et seulement si K/k est modérément ramifiée [8]. Lorsque K/k est sauvagement ramifiée, on introduit l'ordre de A dans $k[G]$ associé à B par : $\mathfrak{D} = \{\lambda \in k[G] ; \lambda B \subset B\}$. Un problème ouvert est : B est-il un \mathfrak{D} -module libre ? (\mathfrak{D} est le seul ordre de $k[G]$ sur lequel B puisse être libre). La réponse est connue lorsque K/k est : cyclique de degré p [2], diédrale de degré $2p$ [4], cyclique et k absolument non ramifié [1]. Dans tous ces cas, la réponse ne dépend que des nombres de ramification de K/k .

On va donner quelques résultats, partiels, lorsque K/k est bi-cyclique de degré p^2 , p impair, et montrer que la réponse au problème posé ne dépend plus que des seuls nombres de ramification de K/k .

Madame Bertrandias a une large part dans les résultats obtenus.

2. - NOMBRES DE RAMIFICATION

Soit v_K la valuation normalisée de K , la suite $(G_i)_{i \geq -1}$ des groupes de ramification de G est définie par : $G_i = \{\sigma \in G ; \forall x \in B, \sigma(x) \equiv x \pmod{\mathfrak{p}^{i+1}}\}$,

II.2

$v_K(\sigma-1)x \geq i+1$ }. Un entier t est dit nombre de ramification de K/k si $G_t \neq G_{t+1}$. On utilisera plusieurs fois le résultat suivant :

LEMME 0. - Si $t > 0$ et ssi $\sigma \in G_t \setminus G_{t+1}$, alors, pour tout $x \in B$
 $v_K(\sigma-1)x = v_K(x) + t$ si $v_K x \not\equiv 0 \pmod{p}$
 $v_K(\sigma-1)x > v_K x + t$ sinon.

On suppose désormais K/k bicyclique de degré p^2 , p impair. On note e l'indice de ramification absolu de k , F son degré résiduel.

2.1. Si K/k a un seul nombre de ramification t , alors $F > 1$ et
 t vérifie : $t \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $0 < t < \frac{pe}{p-1}$.

Il est clair que $t > 0$. On sait ([9] ch.4) que $G = G_t/G_{t+1}$ se plonge dans le groupe additif du corps résiduel de K , donc de k . On en déduit : $F > 1$. D'autre part, t est le nombre de ramification des extensions cycliques intermédiaires de k . On en déduit que :
 $t \leq \frac{pe}{p-1}$, avec égalité si $t \equiv 0 \pmod{p}$ (ce qui exige que k contienne les racines p -èmes de 1) [6]. Montrons que $t \not\equiv 0 \pmod{p}$. Soit $\sigma \in G$, σ distinct du neutre, K_1 le corps fixe par σ . Soit π une uniformisante de K . Posons $f = \sigma-1$ et supposons que $t \equiv 0 \pmod{p}$. Alors, pour tout entier $i > 0$, $v_K f^i \pi = it+1$ (lemme 0). En particulier, $v_K f^{p-1} \pi = (p-1)t+1$. Or, dans $\mathbb{Z}[X]$, $(X-1)^{p-1} \equiv \sum_{j=0}^{p-1} X^j \pmod{p}$. Il existe donc $h \in \mathbb{Z}[\sigma]$ tel que $\text{Tr}_{K/K_1} \pi = f^{p-1} \pi + ph\pi$. Or $v_K \text{Tr}_{K/K_1} \pi \equiv 0 \pmod{p}$, et $v_K (f^{p-1} \pi + ph\pi) = (p-1)t+1$ puisque $v_K p = p^2 e \geq p(p-1)t$. On obtient une contradiction.

Réciproquement, étant donné un corps p -adique k de degré résiduel $F > 1$, il existe des extensions de k de type (p,p) avec un seul nombre de ramification t vérifiant : $t \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $t < \frac{pe}{p-1}$. On peut le montrer en utilisant la théorie du corps de classe local, on

verra ultérieurement des constructions explicites à l'aide de polynômes d'Artin-Schreier (cf.5).

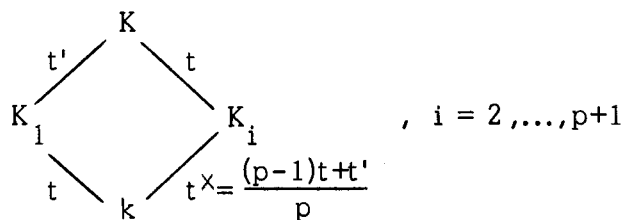
2.2. Si K/k a deux nombres de ramification $t < t'$, ils vérifient :

$$t = -1, \quad 0 < t' \leq \frac{pe}{p-1} \quad \text{avec égalité ssi } t' \equiv 0 \pmod{p}$$

ou

$$t \equiv t' \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad t^x = \frac{(p-1)t+t'}{p} \leq \frac{pe}{p-1} \quad \text{avec égalité ssi } t^x \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si l'extension est non totalement ramifiée ($t = -1$), t' est le nombre de ramification des extensions cycliques intermédiaires de k , distinctes du corps d'inertie. Sinon, soit K_1 le corps fixe par $G_{t'}$, les nombres de ramification sont donnés par le schéma suivant ([9] ch.4):



On en déduit l'inégalité $t^x \leq \frac{pe}{p-1}$, avec égalité ssi $t^x \equiv 0 \pmod{p}$. On sait que $t \equiv t' \pmod{p}$, et $t \not\equiv 0 \pmod{p}$, sinon $t = \frac{pe}{p-1} < t^x$.

Réciproquement, il existe des extensions bicycliques de degré p^2 de k avec deux nombres de ramification $t < t'$ vérifiant les conditions précédentes. Il suffit de composer deux extensions cycliques de degré p ayant -1 et t' ou t et t^x comme nombres de ramification.

3. - ORDRE MAXIMAL DE A DANS $k[G]$

Soient σ et τ deux générateurs de G . On pose $f = \sigma^{-1}$ et $g = \tau^{-1}$. Soit w une uniformisante de k . Pour tout couple d'entiers (i, j) du segment $[0, n-1]$, on définit l'entier $n_{i,j} = \left[\frac{(i+j)e}{p-1} \right]$.

PROPOSITION 1. - L'ordre maximal \mathfrak{O}_m de A dans $k[G]$ est
le réseau de base $(\frac{f_{ij}^i}{n_{ij}})_{i,j}$.

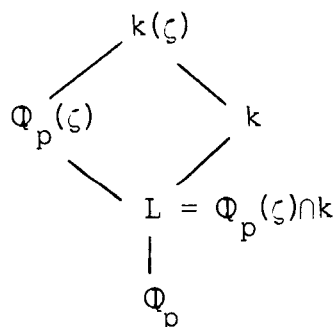
On définit le discriminant d'un réseau de $k[G]$ comme celui vis à vis de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée : $(\lambda, \mu) \rightarrow \text{Tr}(\lambda\mu)$

LEMME 1. - Le discriminant de $A[G]$ est engendré par p^{2p^2} .

Pour tout $\rho \in G$, $\text{Tr}(\rho)$ est égale à l'ordre de G si ρ est le neutre de G , et à zéro sinon. Prenons comme base de $A[G]$ la famille $(\sigma_{\tau}^{i,j})_{i,j}$ ordonnée lexicographiquement. Le discriminant de $A[G]$ est engendré par celui de la matrice carrée d'ordre p^2 suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } A \text{ est la matrice d'ordre } p : \begin{pmatrix} p^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit ζ une racine primitive p -ème de 1 dans une clôture algébrique de k . On a le schéma suivant :



On note r le degré de L/\mathbb{Q}_p ,
 q l'indice de ramification de $k(\zeta)/k$,
 d son degré résiduel.

Donc : $p-1 = rdq$.

LEMME 2. - $d = (\frac{p-1}{r}, \frac{e}{r})$.

Soit $d_0 = (\frac{p-1}{r}, \frac{e}{r})$, posons $\frac{p-1}{r} = d_0 q_0$ et $\frac{e}{r} = d_0 q'$. L'indice de ramification de $\mathbb{Q}_p(\zeta)/L$ divise celui de $k(\zeta)/L$, on en déduit que q_0 divise q . Soit Λ l'extension de degré d_0 de L contenue dans $\mathbb{Q}_p(\zeta)$, v une uniformisante de Λ , ρ un générateur de $\text{Gal}(\Lambda k/k)$. Puisque Λ/L est modérément ramifiée, $v_{\Lambda}(\rho-1)v = 1$. Soit ε l'unité de Λk définie par $\varepsilon = \frac{v}{w q'}$, alors $v_{\Lambda k}(\rho-1)\varepsilon = 0$. On en déduit que

k/k est non ramifiée et donc d_0 divise d .

Corollaire. - Les indices de ramification q et q' de $k(\zeta)/k$ et $k(\zeta)/\mathbb{Q}_p(\zeta)$ sont premiers entre eux.

LEMME 3. - Le discriminant du réseau \mathfrak{D}' de base $\left(\frac{f^i q^j}{n_{i,j}}\right)_{i,j}$ est engendré par $\omega^{(p+1)rd(q-1)}$.

D'après le lemme 1, le discriminant de \mathfrak{D}' est engendré par $p^{2p^2} \cdot \omega^{-2 \sum_{i,j} n_{i,j}}$. Or :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i \leq p-1 \\ j \leq p-1}} n_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p-1} (k+1) \left[\frac{ke}{p-1} \right] + \sum_{k=1}^{p-1} (p-k) \left[\frac{(p-1+k)e}{p-1} \right] \\ &= (p+1) \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{ke}{p-1} \right] + e \sum_{k \leq p-1} k = p^2 e - (p+1) \sum_{k=1}^{p-1} \left\langle \frac{ke}{p-1} \right\rangle \end{aligned}$$

où $\langle x \rangle$ désigne la partie fractionnaire de x . Or :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\langle \frac{ke}{p-1} \right\rangle = \sum_{k=1}^{p-1} \left\langle \frac{kq'}{q} \right\rangle = rd \sum_{k=1}^{q-1} \left\langle \frac{kq'}{q} \right\rangle = rd \frac{q-1}{2}$$

car q et q' sont premiers entre eux. Donc $\sum_{i,j} n_{i,j} = p^2 e - \frac{p+1}{2} rd(q-1)$

et le discriminant de \mathfrak{D}' est engendré par $p^{2p^2} \omega^{-2p^2 e + (p+1)rd(q-1)}$
i.e. $\omega^{(p+1)rd(q-1)}$.

LEMME 4. - Les réseaux \mathfrak{D}_m et \mathfrak{D}' ont le même discriminant.

La décomposition de l'algèbre $k[G]$ en composantes simples est de la forme : $k[G] \simeq k \times (k(\zeta))^{r(p+1)}$, puisque $[k(\zeta):k] = \frac{p-1}{r}$.
Donc $\mathfrak{D}_m \simeq A \times (A_1)^{r(p+1)}$, où A_1 est l'anneau des entiers de $k(\zeta)$.
Or le discriminant de A_1 est engendré par $\omega^{d(q-1)}$, puisque $k(\zeta)/k$ est modérément ramifiée, d'indice de ramification q et de degré résiduel d . Les réseaux \mathfrak{D}_m et \mathfrak{D}' ayant même discriminant, il suffit, pour démontrer la proposition, de montrer que \mathfrak{D}' est inclus dans \mathfrak{D}_m , c'est-à-dire que l'image de $\frac{f^i q^j}{n_{i,j}}$ dans $k(\zeta)$ est un entier. Or ζ^{-1}

est une uniformisante de $\mathbb{Q}_p(\zeta)$, et l'indice de ramification de $k(\zeta)/\mathbb{Q}_p(\zeta)$ est égal à $\frac{qe}{p-1}$. Donc

$$v_{k(\zeta)} \frac{(\zeta-1)^{i+j}}{w_{i,j}^{n_{i,j}}} = (i+j) \frac{qe}{p-1} - q \left[\frac{(i+j)e}{p-1} \right] \geq 0 .$$

4. - CONDITION NECESSAIRE POUR QUE B SOIT UN \mathfrak{D} -MODULE LIBRE

4.1. Soit M une extension abélienne de k de groupe de Galois G fini. Soit θ un entier de M engendrant une base normale de M/k . On définit $\mathfrak{A}_\theta = \{\lambda \in k[G] ; \lambda\theta \in B\}$.

PROPOSITION 2. - [2], \mathfrak{A}_θ est un idéal de l'ordre \mathfrak{D} , isomorphe à B comme \mathfrak{D} -module. B est libre sur \mathfrak{D} ssi il existe θ tel que \mathfrak{A}_θ soit un anneau (et alors $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$). Les inclusions $\mathfrak{A}_\theta \subset \mathfrak{A}_{\theta'} \subset \mathfrak{D}_m$ entraînent $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{A}_{\theta'}$.

Si l'on remplace l'anneau B par l'un de ses idéaux \mathfrak{g} , on a une proposition analogue pour l'ordre $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ associé à \mathfrak{g} et l'idéal de $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ associé à un élément de \mathfrak{g} qui engendre une base normale de M/k . Soit H un sous-groupe de G , L le corps fixe par H , $\bar{G} = G/H$ le groupe de Galois de L/k . L'homomorphisme canonique de G sur \bar{G} se prolonge en un k -homomorphisme d'algèbre : $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ de $k[G]$ sur $k[\bar{G}]$. L'action de $k[\bar{G}]$ sur L est définie par $\bar{\lambda}x = \lambda x$. On note T la trace de M à L , B l'anneau des entiers de M .

LEMME 5. - Soit θ un entier de M qui engendre une base normale de M/k . Alors $T\theta$ engendre une base normale de L/k . Soit $\mathfrak{A}_{T\theta}(TB) = \{\Lambda \in k[\bar{G}] ; \Lambda T\theta \in TB\}$ alors $\mathfrak{A}_{T\theta}(TB) = \overline{\mathfrak{A}_\theta(B)}$.

Soit $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ un système exact de représentants des classes de $G \bmod H$. Les éléments $(\bar{g}_i T\theta)_{i \leq r}$ sont k -linéairement indépendants, puisque, pour tout $(x_i) \in k^r$, on a : $\sum_{i \leq r} x_i \bar{g}_i T\theta = \sum_{i \leq r} x_i g_i T\theta = \sum_{i \leq r} x_i g_i h\theta$.

$$h \in H$$

L'inclusion $\overline{\mathfrak{A}_\theta(B)} \subset \mathfrak{A}_{T\theta}(TB)$ est claire. Soit $\Lambda \in \mathfrak{A}_{T\theta}(TB)$. Il existe $b \in B$ tel que $\Lambda T\theta = Tb$, et il existe $\lambda \in \mathfrak{A}_\theta(B)$ tel que $b = \lambda\theta$. On obtient $\Lambda T\theta = \lambda T\theta = \bar{\lambda} T\theta$, et donc $\Lambda = \bar{\lambda}$ puisque $T\theta$ engendre une base normale de L/k .

COROLLAIRE. - Si B est libre sur son ordre associé dans $k[G]$, l'idéal TB est libre sur son ordre associé dans $k[\bar{G}]$.

En effet, si B est libre sur son ordre, il existe θ tel que $\mathfrak{A}_\theta(B)$ soit un anneau. Donc $\mathfrak{A}_{T\theta}(TB)$ est un anneau et l'idéal TB est libre sur son ordre (prop. 2).

4.2. On va appliquer ce corollaire à une extension K/k bicyclique de degré p^2 . On obtient ainsi une condition nécessaire pour que B soit libre sur son ordre : en effet, si L est une extension intermédiaire (cyclique de degré p) d'anneau d'entiers C , on sait caractériser les idéaux de C qui sont libres sur leur ordre [4].

Si K/k est non totalement ramifiée, on choisit L distinct du corps d'inertie. Alors $TB = C$ et t' est le nombre de ramification de L/k . On obtient :

PROPOSITION 3. - Si K/k est non totalement ramifiée, pour que B soit un \mathfrak{O} -module libre, il est nécessaire que $t' = \frac{pe}{p-1}$ ou, si $t' < \frac{pe}{p-1} - 1$, que le reste de la division de t' par p divise $p-1$.

Si K/k est totalement ramifiée, soit \mathfrak{p} l'idéal maximal de L , \mathfrak{D} la différentielle de K/L . Le nombre de ramification de K/L est t (ou t'). Donc $v_{K\mathfrak{D}} = (p-1)(t+1)$ et $TB = \mathfrak{p}^{t - [t/p]}$. Le nombre de ramification de L/k est t^x (ou t). Que l'idéal TB soit libre sur son ordre ou non dépend des congruences mod p des entiers $t - [t/p]$ et t^x (ou $t' - [t'/p]$ et t). Si les nombres de ramification t et t' sont non congrus mod p^2 , on obtient des conditions différentes selon que l'on

choisit pour L le corps fixe par G_t , ou non. Sinon, on obtient la même condition.

On suppose désormais que les nombres de ramification sont congrus mod p^2 .

On note a le reste de la division de t par p^2 , $a = \alpha + \beta p$ son écriture en base p , $\frac{\alpha}{p} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ le développement en fraction continue de $\frac{\alpha}{p}$ (avec $\alpha_n > 1$). On obtient :

PROPOSITION 3'. - Si K/k est totalement ramifiée et ses nombres de ramification congrus mod p^2 , pour que B soit un \mathfrak{D} -module libre, sous l'hypothèse que $t < \frac{pe}{p-1} - 2$, il est nécessaire que :

$$\beta \leq \frac{p-1}{2} \text{ si } \alpha = 1$$

$$\beta = 0 \text{ ou } \alpha_n \text{ si } \alpha > 1 \text{ et } n \text{ pair}$$

$$\beta \leq \frac{1}{2} \alpha_n \text{ si } \alpha > 1 \text{ et } n \text{ impair.}$$

Exemples numériques.

$p = 3$, $t \equiv t' \pmod{9}$ et $t < \frac{3e}{2} - 2$. B n'est pas libre sur son ordre si, mod 9, $t \in \{5, 7\}$.

$p = 5$, $t \equiv t' \pmod{25}$ et $t < \frac{5e}{4} - 2$. B n'est pas libre sur son ordre si, mod 25, $t \in \{7, 9, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23\}$.

4.3. Il résulte de la proposition 2 que si un entier θ engendre une base normale, et si \mathfrak{A}_θ est inclus dans \mathfrak{D}_m , il est nécessaire que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ pour que B soit libre sur \mathfrak{D} . C'est cette condition que l'on va désormais exploiter.

PROPOSITION 4. - Soit θ un entier de K de valuation a . Alors θ engendre une base normale de K/k et, si $t^x \leq \frac{pe}{p-1} - \beta$, $\mathfrak{A}_\theta \subset \mathfrak{D}_m$.

LEMME 6. - Soit M une extension abélienne non cyclique de k . Un élément θ de M engendre une base normale de M/k ssi, pour toute extension intermédiaire stricte L , l'élément $\text{Tr}_{M/L} \theta$ engendre une base normale de L/k .

La condition est nécessaire (lemme 5). Montrons qu'elle est suffisante. Si l'annulateur de θ dans $k[G]$ n'était pas réduit à 0, il contiendrait un idéal minimal. Il suffit donc de montrer que, pour tout caractère irréductible χ de $G = \text{Gal}(M/k)$ sur k , $e_\chi \theta \neq 0$, où e_χ est l'idempotent primitif de $k[G]$ associé à χ . Soit ρ une représentation de G sur k , de module V . On sait que l'image par ρ de $k[G]$ dans $\text{End}_k V$ coïncide avec le bicommutant du module V , puisque $k[G]$ est semi-simple [3]. Supposons de plus ρ irréductible (de caractère χ), le bicommutant de V est un corps puisque G est abélien, et donc $\rho(G)$ est un groupe cyclique. Soit H le noyau de ρ , L le corps fixe par H . L est une extension intermédiaire stricte, car H n'est pas réduit au neutre, G étant non cyclique. Soit $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ un système exact de représentants des classes de $G \text{ mod } H$. On a :
$$e_\chi \theta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g \theta = \frac{1}{|G|} \sum_{i \leq r} \chi(g_i^{-1}) g_i h \theta .$$
 Donc
$$e_\chi \theta = \frac{1}{|G|} \sum_{i \leq r} \chi(g_i^{-1}) g_i \text{Tr}_{M/L} \theta \neq 0$$
 puisque $\text{Tr}_{M/L} \theta$ engendre une base normale de L/k .

Application. Un entier θ de K de valuation a engendre une base normale de K/k .

On note $(K_h)_{1 \leq h \leq p+1}$ les extensions intermédiaires de degré p sur k , K_1 étant le corps fixe par $G_{t'}$, T_h la trace de K/K_h . Soit σ un générateur de $G_{t'}$ et $f = \sigma - 1$. Pour tout entier i , tel que $0 \leq i \leq p-1$, on a (lemme 0) : $v_K f^i \theta = it' + a \equiv (i+1)a \pmod{p^2}$. En particulier, $v_K f^{p-1} \theta = (p-1)t' + a$. Il existe $h \in \mathbb{Z}[\sigma]$ tel que $T_1 \theta = f^{p-1} \theta + ph \theta$. Comme $v_K p = p^2 e > (p-1)t'$, on obtient :
$$v_{K_1} T_1 \theta = \frac{(p-1)t' + a}{p} \equiv a \pmod{p}$$
. Le nombre de ramification t de K_1/k

étant congru à $a \pmod p$, on sait que $T_1\theta$ engendre une base normale de K_1/k . On montre de même, pour $h > 1$, que $T_h\theta$ engendre une base normale de K_h/k (dont le nombre de ramification t^x est congru à $a \pmod p$).

LEMME 7. - Soit λ un élément de $k[G]$, λ appartient à \mathfrak{D}_m ssi, pour tout $h \leq p+1$, $\lambda \frac{T_h}{p} \in \mathfrak{D}_m$.

La condition est nécessaire puisque $\frac{T_h}{p}$ appartient à \mathfrak{D}_m . La condition suffisante résulte de l'égalité : $p = \sum_{h \leq p+1} T_h - T$.

Application. Si $t^x \leq \frac{pe}{p-1} - \beta$, $\mathfrak{U}_\theta \subset \mathfrak{D}_m$.

Soit τ un générateur de $\text{Gal}(K/K_2)$ et $g = \tau^{-1}$. Pour tout entier j , tel que $0 \leq j \leq p-1$, on a : $v_K g^j \theta = jt + a$. En particulier, $v_K g^{p-1} \theta = (p-1)t + a$. On obtient, comme ci-dessus,

$$v_{K_2} T_2 \theta = \frac{(p-1)t + a}{p} \equiv a \pmod p.$$

On en déduit que, pour tout entier $i \leq p-1$, $v_{K_2} f^i T_2 \theta = it^x + \frac{(p-1)t + a}{p}$.

Soit $\lambda = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{i,j} f^i g^j$, $a_{i,j} \in k$, un élément de \mathfrak{U}_θ . On a :

$\frac{\lambda T_2}{p} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0} f^i T_2$. On a montré que \mathfrak{D}_m est le réseau de base

$\frac{f^i g^j}{n_{i,j}}$, où $n_{i,j} = \left[\frac{(i+j)e}{p-1} \right]$. On peut remplacer les p éléments $\frac{f^i g^{p-1}}{n_{i,p-1}}$

par les éléments $\frac{f^i T_2}{p n_{i,0}}$. On obtient ainsi la condition : $\frac{\lambda T_2}{p} \in \mathfrak{D}_m$ ssi,

pour tout $i \leq p-1$, $v_K a_{i,0} + \left[\frac{ie}{p-1} \right] \geq 0$. Montrons que cette condition est satisfaite si $t^x \leq \frac{pe}{p-1} - \beta$. Puisque $\lambda \in \mathfrak{U}_\theta$, $\lambda T_2 \theta \in T_2 B = \mathfrak{P}_2^{t - \left[\frac{t}{p} \right]}$.

Or $\lambda T_2 \theta = \sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0} f^i T_2 \theta$ et $v_{K_2} f^i T_2 \theta = it^x + \frac{(p-1)t + a}{p} \equiv (i+1)a \pmod p$.

On obtient : pour tout $i \leq p-1$, $p v_K a_{i,0} + it^x + \frac{(p-1)t + a}{p} \geq t - \left[\frac{t}{p} \right]$ i.e.

$v_K a_{i,0} \geq - \frac{it^x + \beta}{p}$. La condition est satisfaite pour $i = 0$ ($a_{0,0}$ entier), elle l'est pour $i > 0$ si $\frac{t^x + \beta}{p} \leq \frac{e}{p-1}$. On montre de même que, si

$$t \leq \frac{pe}{p-1} - \beta, \quad \frac{\lambda T_1}{p} \in \mathfrak{D}_m \quad \text{si } \lambda \in \mathfrak{A}_\theta.$$

Remarque : pour $p = 3$, on peut construire une base de \mathfrak{A}_θ assez explicite pour vérifier l'inclusion $\mathfrak{A}_\theta \subset \mathfrak{D}_m$ (au moins pour $a = 1$) sans condition sur les nombres de ramification. Cette inclusion est-elle vraie pour tout p , sans condition ?

5. - EXTENSION D'ARTIN-SCHREIER

Soit t un entier positif premier à p , Δ un élément de k de valuation $-t$. Le polynôme $X^p - X - \Delta$, dit d'Artin-Schreier, est irréductible sur k . Si x est une de ses racines (dans une extension de k), l'extension $K = k(x)/k$ est ramifiée, et $v_K x = -t$. Si de plus t vérifie : $t < \frac{pe}{p-1}$, alors K/k est cyclique, de nombre de ramification t .

Réciproquement, toute extension de k , cyclique de degré p , ramifiée, dont le nombre de ramification t vérifie : $t < \frac{pe}{p-1}$, est obtenue par adjonction d'une racine d'un polynôme d'Artin-Schreier [6]. Donc K/k étant une extension de type (p, p) , totalement ramifiée, à nombres de ramification t et t' congrus mod p^2 , on peut supposer que (notations du paragraphe précédent) :

$$K_1 = k(\ell), \quad \ell \text{ racine de } X^p - X - \delta \omega^{-t}$$

$$K_2 = k(m), \quad m \text{ racine de } X^p - X - \epsilon \omega^{-t^x}, \quad \delta, \epsilon \text{ unités de } k.$$

On va construire un élément de K de valuation a . Soit n l'entier défini par $t' - t = np^2$. Puisque $v_K \omega^n m = v_K \ell = -pt$, il existe une unité μ de k telle que $v_K(\omega^n m + \mu \ell) > -pt$. Appliquant $f = \sigma - 1$ à cet élément (K_1 fixe par σ), on obtient un élément de valuation $t' - t$. Donc la valuation de $\omega^n m + \mu \ell$ ou bien est égale à $-t$, ou bien est inférieure mais multiple de p (lemme 0). Comme $v_K \ell^i = -pit$ décrit l'ensemble des multiples de p mod p^2 , le raisonnement précédent prouve l'existence d'une unité γ de k et d'éléments z et $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$

de k tels que : $x = \omega^n m + \gamma \ell + z + \sum_{i=2}^{p-1} y_i \ell^i$ soit de valuation $-t$. Alors $v_K(\ell x)^{p-1} = -(p^2-1)t \equiv t \pmod{p^2}$, et $\theta = \omega^{\frac{(p^2-1)t+a}{p^2}} (\ell x)^{p-1}$ est de valuation a .

PROPOSITION 5. - Si les nombres de ramification sont égaux, l'unité γ définie ci-dessus vérifie les conditions : $\gamma^p + \frac{\epsilon}{\delta} \equiv 0 \pmod{\omega}$ et $\gamma^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{\omega}$.

Soit y' l'élément de K_1 défini par : $x = m + \gamma \ell + y'$ ($n=0$). Puisque x est de degré p sur K_1 , son polynôme minimal est : $(X - \gamma \ell - y')^p - (X - \gamma \ell - y') - \epsilon \omega^{-t}$. En prenant sa norme, on obtient : $v_{K_1}((\gamma \ell + y')^p - (\gamma \ell + y') + \epsilon \omega^{-t}) = -t$. Si $y' = 0$, $v_{K_1}((\gamma \ell)^p - \gamma \ell + \epsilon \omega^{-t}) = v_{K_1}(\gamma(\gamma^{p-1}-1)\ell + (\gamma^p \delta + \epsilon)\omega^{-t}) = -t$. On en déduit que : $v_k(\gamma^p + \frac{\epsilon}{\delta}) > \frac{(p-1)t}{p}$ et $\gamma^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{\omega}$. Si $y' \neq 0$, $(\gamma \ell + y')^p - (\gamma \ell + y') + \epsilon \omega^{-t} = \gamma^p \ell^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} (\gamma \ell)^{p-i} y'^i + y'^p - \gamma \ell - y' + \epsilon \omega^{-t}$. Par construction, $v_{K_1} y' > -t$, donc $v_{K_1} \binom{p}{i} (\gamma \ell)^{p-i} y'^i > pe - pt > -t$. Donc $v_{K_1}(\gamma(\gamma^{p-1}-1)\ell + (\gamma^p \delta + \epsilon)\omega^{-t} + y'^p) = -t$. Par construction, $v_K y' < v_K x$, donc $v_{K_1} y'^p < -t$. On en déduit que : $v_{K_1} y'^p = v_{K_1}(\gamma^p \delta + \epsilon)\omega^{-t}$ i.e. $v_k(\gamma^p + \frac{\epsilon}{\delta}) = t + v_{K_1} y'$. En particulier : $v_k(\gamma^p + \frac{\epsilon}{\delta}) > 0$.

Posons $y'^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \ell^i$, $a_i \in k$, alors :

$$v_{K_1}(\gamma(\gamma^{p-1}-1)\ell + (\gamma^p \delta + \epsilon)\omega^{-t} + a_0 + a_1 \ell + \dots + a_{p-1} \ell^{p-1}) = -t.$$

Il suffit de montrer que $v_k(a_1) > 0$ pour prouver que $\gamma^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{\omega}$.

Or $y'^p = z^p + \sum_{i=2}^{p-1} (y_i \ell^i)^p + p \cdot \sum_{\substack{n_0 + \dots + n_{p-1} = p \\ n_j \neq 0}} \text{entier} \cdot z^{n_0} \dots (y_{p-1} \ell^{p-1})^{n_{p-1}}$.

Comme $v_{K_1} p z^{n_0} \dots (y_{p-1} \ell^{p-1})^{n_{p-1}} > pe - pt > -t$, il suffit de regarder la participation de $(y_i \ell^i)^p$ à ℓ . Or $(y_i \ell^i)^p = y_i^p (\ell + \delta \omega^{-t})^i$ a pour composante sur ℓ l'élément $i y_i^p (\delta \omega^{-t})^{i-1}$ dont la valuation est strictement

positive, puisque $v_{K_1} y_i \ell^i > -t$.

Cette proposition admet une réciproque partielle, que l'on peut énoncer ainsi :

PROPOSITION 5'. - Soit t un entier positif, premier à p , vérifiant $t < \frac{pe}{p-1}$. Soient $K_1 = k(\ell)$, ℓ racine de $X^p - X - \delta \omega^{-t}$, et $K_2 = k(m)$, m racine de $X^p - X - \epsilon \omega^{-t}$ deux extensions d'Artin-Schreier de k . On suppose qu'il existe une unité γ de k qui vérifie : $v_k(\gamma^p + \frac{\epsilon}{\delta}) > \frac{(p-1)t}{p}$ et $\gamma^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{\omega}$. Alors $K = K_1 K_2$ est une extension de degré p^2 de k , admettant t comme seul nombre de ramification, et l'élément $x = m + \gamma \ell$ est de valuation $-t$ dans K .

L'élément x vérifie : $(x - \gamma \ell)^p - (x - \gamma \ell) - \epsilon \omega^{-t} = 0$ i.e.

$$x^p + \sum_{i=1}^{p-2} \binom{p}{i} (-1)^i (\gamma \ell)^i x^{p-i} + (p(\gamma \ell)^{p-1} - 1)x - \gamma(\gamma^{p-1} - 1)\ell - (\gamma^p \delta + \epsilon)\omega^{-t} = 0.$$

Soit $\lambda_0 = \gamma(\gamma^{p-1} - 1)\ell + (\gamma^p \delta + \epsilon)\omega^{-t}$, $v_{K_1} \lambda_0 = -t$ grâce à l'hypothèse sur

γ . Donc x est racine d'un polynôme P de $K_1[X]$ de la forme :

$$P = X^p - \sum_{i=1}^p \lambda_{p-i} X^{p-i}, \text{ avec } v_{K_1} \lambda_0 = -t \text{ et } v_{K_1} \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i \geq 1$$

puisque $t < \frac{pe}{p-1}$. Or un tel polynôme est irréductible sur K_1 et, si

x est une de ses racines, l'extension $K = K_1(x)/K_1$ est ramifiée et $v_K x = -t$ (même démonstration que pour un polynôme d'Artin-Schreier).

Il reste à montrer que t est le seul nombre de ramification de K/k .

Il suffit de vérifier que c'est celui de K/K_1 (cf. 2). Or $v_K f_x = v_K f_m = 0$

et $v_K f_x = v_K x + t_{K/K_1} = -t + t_{K/K_1}$ (lemme 0).

Remarque : La condition γ unité telle que $\gamma^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{\omega}$ exige que le degré résiduel F de k vérifie $F > 1$. Si cette condition est vérifiée, la proposition précédente permet de construire explicitement des extensions bicycliques de degré p^2 de k avec un seul nombre de ramification.

6. - CONDITION NECESSAIRE POUR QUE $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$

6.1. Soit θ un entier de valuation a . Reprenons les notations des paragraphes précédents résumées par le schéma :

$$t' \equiv t \equiv a \pmod{p^2}, \quad t' - t = np^2$$

$$f = \sigma^{-1}, \quad g = \tau^{-1}$$

Pour tout entier i , tel que $0 \leq i \leq p-1$, on a (cf. 4) :

$$v_K f^{i\theta} = it' + a, \quad v_{K_1} T_1^\theta = \frac{(p-1)t' + a}{p}, \quad v_{K_1} g^i T_1^\theta = \frac{(p-1)t' + a}{p} + it$$

$$v_K g^i \theta = it + a, \quad v_{K_2} T_2^\theta = \frac{(p-1)t + a}{p}, \quad v_{K_2} f^i T_2^\theta = \frac{(p-1)t + a}{p} + it^x$$

Puisque $v_K T_2^\theta = v_K \frac{T_1^\theta}{\omega(p-1)n} = (p-1)t + a$, il existe une unité μ de k telle que $v_K (T_2 + \mu \frac{T_1}{\omega(p-1)n})^\theta > (p-1)t + a$. Appliquant f à cet élément, on obtient fT_2^θ , de valuation $2(p-1)t + a + t'$.

Définissons l'entier J par : $J = \text{Max}\{v_K (T_2 + \mu \frac{T_1}{\omega(p-1)n})^\theta; \mu \text{ unité de } k\}$. Il résulte du lemme 0 que, ou bien J est égal à $2(p-1)t + a$, ou bien J est multiple de p , strictement compris entre $(p-1)t + a$ et $2(p-1)t + a$, et non congru à $ap \pmod{p^2}$ (puisque $v_K T_1^\theta \equiv ap \pmod{p^2}$). Notons mp^2 le plus grand multiple de p^2 inférieur à $2(p-1)t + a$, $c(t)$ l'entier défini par : $c(t) = p - 2\alpha$ si $2\alpha < p$ et $c(t) = p - \alpha$ sinon (α reste de la division de t par p).

PROPOSITION 6. - Si $J \equiv 0 \pmod{p}$, une condition nécessaire pour que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ est : $J \geq mp^2 - pc(t)$.

On suppose donc $J \equiv 0 \pmod{p}$. On note

$$v_i = v_K g^i T_1^\theta = ipt + (p-1)t' + a \equiv (i+1)ap \pmod{p^2}, \quad i \text{ entier du segment } [0, p-1]$$

Si $J \equiv 0 \pmod{p^2}$. Il existe une unité μ de k telle que $v_K(T_2 + \mu \frac{T_1}{\omega(p-1)n})_\theta = J \equiv v_{p-1}$. Un raisonnement analogue à celui de 5 montre qu'il existe des éléments $(x_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ de k tels que :

$$v_K x_0 = 0, \quad v_K x_{p-1} = \frac{J - v_{p-1}}{p^2} \quad \text{et} \quad v_K(T_2 + x_0 \frac{T_1}{\omega(p-1)n} + \sum_{i=2}^{p-1} x_i g^i T_1)_\theta = 2(p-1)t + a.$$

Il résulte de la définition de m que l'élément φ de $k[G]$ défini par :

$$\varphi = \frac{1}{\omega m} (T_2 + x_0 \frac{T_1}{\omega(p-1)n} + \sum_{i=2}^{p-1} x_i g^i T_1)$$

appartient à \mathfrak{A}_θ . Soit \mathfrak{f} le conducteur de \mathfrak{D} dans $A[G]$, i.e. $\mathfrak{f} = \{x \in k; x\mathfrak{D} \subset A[G]\}$. On sait [5] que

c'est l'idéal TB , engendré par $\omega^{\frac{1}{p^2}} v_{p-1}$. Une condition nécessaire

pour que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ est que $\varphi \in \mathfrak{D}$, donc que $\omega^{\frac{1}{p^2}} v_{p-1} \varphi \in A[G]$, en

particulier que $\omega^{\frac{1}{p^2}} v_{p-1} \frac{x_{p-1}}{\omega m} \in A$, i.e. que $J \geq mp^2$.

Donc, si $J \equiv 0 \pmod{p^2}$, une condition nécessaire pour que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ est : $J = mp^2$.

Si $J \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Soit r l'entier compris entre 2 et $p-1$ tel que $J \equiv rap \pmod{p^2}$. Il existe une unité μ de k telle que

$$v_K(T_2 + \mu \frac{T_1}{\omega(p-1)n})_\theta = J \equiv v_{r-1} \pmod{p^2}.$$

Comme ci-dessus, on montre qu'il existe des éléments $(x_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ de k tels que :

$$v_K x_0 = 0, \quad v_K x_{r-1} = \frac{J - v_{r-1}}{p^2}, \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{1}{\omega m} (T_2 + x_0 \frac{T_1}{\omega(p-1)n} + \sum_{i=1}^{p-1} x_i g^i T_1) \in \mathfrak{A}_\theta.$$

Une condition nécessaire pour que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ est que $\varphi \in \mathfrak{D}$, en particulier que $\varphi \theta_1 \theta - \theta_1 \varphi \theta \in B$ quel que soit l'entier θ_1 de K_1 (la condition relative au conducteur est satisfaite).

Or $\frac{1}{\omega m} (T_2 \theta_1 \theta - \theta_1 T_2 \theta) \in B$. On montre en effet, par récurrence, que, pour $i \leq p-1$, $g^i \theta_1 \theta \equiv \theta_1 g^i \theta \pmod{\theta_1 \pi^{(p+i-1)t+a}}$ (π uniformisante de K). On en déduit que $T_2 \theta_1 \theta \equiv \theta_1 T_2 \theta \pmod{\theta_1 \pi^{2(p-1)t+a}}$. Donc

$\varphi \in \mathfrak{D}$ exige : $\frac{1}{w^m} \sum_{i=1}^{p-1} x_i (g^i T_1 \theta_1 \theta - \theta_1 g^i T_1 \theta) \in B$. Or

$v_K(g^i T_1 \theta_1 \theta - \theta_1 g^i T_1 \theta) \geq v_K \theta_1 + v_i$ et on peut choisir θ_1 tel qu'il y ait

égalité pour $i = r-1$. En effet, $v_K \theta_1 g^i T_1 \theta = v_K \theta_1 + v_i$,

$v_K g^i T_1 \theta_1 \theta = p v_{K_1} g^i \theta_1 T_1 \theta$, $v_{K_1} \theta_1 \cdot T_1 \theta = v_{K_1} \theta_1 + \frac{v_0}{p} \equiv v_{K_1} \theta_1 + \alpha \pmod{p}$

donc $v_{K_1} g^i \theta_1 \cdot T_1 \theta \geq v_{K_1} \theta_1 + \frac{v_0}{p} + it$ avec inégalité stricte si $v_{K_1} \theta_1$

est congrue mod p à l'un des entiers $-\alpha, -2\alpha, \dots, -i\alpha$. Choisissons

un tel entier θ_1 , alors : $v_K \frac{1}{w^m} x_{r-1} (g^{r-1} T_1 \theta_1 \theta - \theta_1 g^{r-1} T_1 \theta) = J + v_K \theta_1 - mp^2$,

et pour $i \neq r-1$, $v_K \frac{1}{w^m} x_i (g^i T_1 \theta_1 \theta - \theta_1 g^i T_1 \theta) \geq v_K x_i + v_K \theta_1 + v_i - mp^2 >$

$J + v_K \theta_1 - mp^2$, car $v_K x_i g^i T_1 \theta > J$. Donc $\varphi \in \mathfrak{D}$ exige : $J \geq mp^2 - p v_{K_1} \theta_1$.

Si $r = 2$, toute uniformisante vérifie la condition :

$v_K(g T_1 \theta_1 \theta - \theta_1 g T_1 \theta) = v_K \theta_1 + v_1$, car $g \theta_1 T_1 \theta = \theta_1 \cdot g T_1 \theta + g \theta_1 \cdot T_1 \theta + g \theta_1 \cdot g T_1 \theta$.

Si $r > 2$, tout entier de K_1 dont la valuation dans K_1 est congrue mod p à l'un des entiers $-\alpha, -2\alpha, \dots, -(r-1)\alpha$ vérifie la condition : $v_K(g^{r-1} T_1 \theta_1 \theta - \theta_1 g^{r-1} T_1 \theta) = v_K \theta_1 + v_{r-1}$.

Notons $d(r)$ l'entier défini pour $2 \leq r \leq p-1$ par : $d(2) = 1$ et $d(r) = \text{Min}\{d; 0 < d \leq p-1, d \equiv -\alpha, -2\alpha, \dots, -(r-1)\alpha \pmod{p}\}$ si $r > 2$.

Alors si $J \equiv rap \pmod{p^2}$, une condition nécessaire pour que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ est : $J \geq mp^2 - pd(r)$.

Pour obtenir une condition nécessaire indépendante de r , on introduit l'entier $c(t)$ défini précédemment : $c(t) = 1$ si $p = 3$, $c(t) = d(3)$ si $p > 3$.

6.2. On va désormais évaluer l'entier J lorsque θ est l'entier de valuation a construit en 5 , et utiliser la proposition précédente pour obtenir :

PROPOSITION 7. - Soit θ l'entier de K de valuation a construit en 5 . Si les nombres de ramification de K/k vérifient

$$\frac{pt+t'}{p} \geq \frac{pe}{p-1} + \frac{p+c(t)}{p-1} \quad (I)$$

alors $\mathfrak{u}_\theta \neq \mathfrak{O}$.

COROLLAIRE. - Si $\mathfrak{u}_\theta \subset \mathfrak{O}_m$, par exemple si $\frac{(p-1)t+t'}{p} \leq \frac{pe}{p-1} - \beta$, la condition (I) entraîne que l'anneau des entiers B n'est pas libre sur son ordre \mathfrak{O} .

L'entier θ de K de valuation a construit en 5 est de la

forme $\theta = \omega \frac{(p^2-1)t+a}{p^2} (\ell x)^{p-1}$, où $x = \omega^n m + \gamma \ell + z + \sum_{i=2}^{p-1} y_i \ell^i$ est de valuation $-t$. On pose $y = \sum_{i=2}^{p-1} y_i \ell^i$ et $\ell^x = \gamma \ell + z + y$. Pour les calculs de trace, on utilise le lemme suivant :

LEMME 8. - Soit ℓ une racine d'un polynôme d'Artin-Schreier sur k : $X^p - X - \Delta$. Soit T la trace dans l'extension $k(\ell)/k$. Soit i un entier > 0 écrit sous la forme $i = (p-1)h + r$, $0 \leq r < p-1$. Alors, si $h \leq p-1$,

$$T \ell^i = \begin{cases} p-1 & \text{si } r = 0 \\ c \Delta^r, c \text{ entier de } k, & \text{si } 0 < r < h \\ p \Delta^r & \text{si } r = h \\ 0 & \text{si } r > h . \end{cases}$$

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier h .

Puisque $x = \omega^n m + \ell^x$, $x^{p-1} = (\omega^n m + \ell^x)^{p-1}$ et, d'après le lemme,

$$T_1 x^{p-1} = (p-1) \omega^{n(p-1)} + p (\ell^x)^{p-1} .$$

$$\text{Donc } \frac{T_1 (\ell x)^{p-1}}{\omega^{(p-1)n}} = (p-1) \ell^{p-1} + \frac{p \ell^{p-1}}{\omega^{(p-1)n}} (\gamma \ell + z + y)^{p-1}$$

$$(\ell x)^{p-1} = \ell^{p-1} (\omega^n m + z + \gamma \ell + y)^{p-1} = \ell^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (\omega^n m + z)^{p-1-k} (\gamma \ell + y)^k$$

$$T_2(\ell x)^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (\omega^n m + z)^{p-1-k} T_2 \ell^{p-1} (\gamma \ell + y)^k .$$

D'après le lemme, $T_2 \ell^{p-1} (\gamma \ell + y) = \gamma p \Delta + y_{p-1} (p-1)$, où $\Delta = \ell^p - \ell$.

Donc $T_2(\ell x)^{p-1} = (p-1)(\gamma \ell + y - x)^{p-1} - (p-1)(\gamma \ell + y - x)^{p-2} (\gamma p \Delta + y_{p-1} (p-1)) + \sum_{k=2}^{p-1} u_k$,

où $u_k = (-1)^k \binom{p-1}{k} (\gamma \ell + y - x)^{p-1-k} T_2 \ell^{p-1} (\gamma \ell + y)^k$. Définissons u_0 et u_1

par : $u_0 = (p-1)(\gamma \ell + y - x)^{p-1} - (p-1)(\gamma \ell)^{p-1}$,

$$u_1 = -(p-1)(\gamma \ell + y - x)^{p-2} (\gamma p \Delta + y_{p-1} (p-1)) - \frac{p(\gamma \ell)^{p-1}}{\omega^{(p-1)n}} (\gamma \ell + z + y)^{p-1} .$$

Alors :

$$(T_2 - \gamma^{p-1} \frac{T_1}{\omega^{(p-1)n}})(\ell x)^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} u_k .$$

Etudions d'abord le cas particulier où $y = 0$

$$u_0 = (p-1)((\gamma \ell - x)^{p-1} - (\gamma \ell)^{p-1}) , \quad v_K u_0 = v_K \ell^{p-2} x = -(p-1)^2 t$$

$$u_1 = \gamma^{p-1} p \ell^{2p-2} (1 - \frac{\gamma^{p-1}}{\omega^{(p-1)n}}) + \text{termes de valuation} .$$

$v_K u_1 = v_K \frac{p \ell^{2p-2}}{\omega^{(p-1)n}}$, même lorsque $n = 0$ (i.e. $t' = t$) puisque

$$\gamma^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{\omega} \text{ (cf. 5)} ; \quad v_K u_1 = p^2 e - (p-1)(pt+t') - (p-1)^2 t .$$

$$u_k = 0 \text{ si } 2 \leq k < p-1 \text{ et } u_{p-1} = \gamma^{p-1} (p-1) .$$

On obtient donc pour $\theta = \omega \frac{(p^2-1)t+a}{p^2} (\ell x)^{p-1}$:

$$v_K (T_2 - \gamma^{p-1} \frac{T_1}{\omega^{(p-1)n}}) \theta = \text{Min} \left(2(p-1)t+a, 2(p-1)t+a+p^2 e - (p-1)(pt+t') \right) .$$

D'où le résultat dans ce cas particulier :

$$\text{si } pt+t' < \frac{p^2 e}{p-1} , \quad J = 2(p-1)t+a$$

$$\text{si } pt+t' > \frac{p^2 e}{p-1} , \quad J = 2(p-1)t+a+p^2 e - (p-1)(pt+t') \equiv 2 \pmod{p^2} .$$

Une condition nécessaire pour que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$ est alors : $J \geq mp^2 - p$.

Cette condition n'est pas satisfaite si $\beta+1 \leq 2\alpha < p-1$ ou si $2\alpha \geq \beta+p+1$,

car le segment $[mp^2 - p, 2(p-1)t+a]$ ne contient alors pas d'entier congru

à $2ap \pmod{p^2}$.

Plus généralement, elle n'est pas satisfaite si $J \leq 2(p-1)t+a-p^2-p$

$$\text{i.e. si } \frac{pt+t'}{p} \geq \frac{pe}{p-1} + \frac{p+1}{p-1} .$$

Etudions maintenant le cas où $y \neq 0$.

$$k \geq 2, \quad v_K u_k \equiv v_K \ell^{p-1-k} \equiv (k+1)ap \pmod{p^2}$$

$$u_1 = \gamma^{p-1} p \ell^{2p-2} - (\gamma \ell)^{p-2} y_{p-1} - \frac{p(\gamma \ell)^{2p-2}}{\omega(p-1)n} + \text{termes de valuation}$$

$v_K y_{p-1} \ell^{p-1} > v_K \ell$ par construction de x , donc $v_K y_{p-1} \ell^{p-2} > 0$. On suppose désormais qu'est réalisée la condition suivante :

$$v_K \frac{p(\gamma \ell)^{2p-2}}{\omega(p-1)n} < 0, \quad \text{i.e. } \frac{pt+t'}{p} > \frac{pe}{p-1} - \frac{(p-1)t}{p} . \quad (\text{II})$$

Alors, comme dans le cas particulier,

$$v_K u_1 = p^2 e - (p-1)(pt+t') - (p-1)^2 t \equiv 2ap \pmod{p^2} .$$

$$u_0 = (p-1)^2 (\gamma \ell)^{p-2} (y-x) + \text{termes de valuation} .$$

Soit ν l'entier, compris entre 2 et $p-1$, tel que $v_K y = v_K y_\nu \ell^\nu$.

$$\text{Alors } v_K u_0 = v_K \ell^{p-2} y_\nu \ell^\nu \equiv (p-\nu+2)ap \equiv v_K u_{p-\nu+1} \pmod{p^2}$$

($2 \leq p-\nu+1 \leq p-1$). On pose $u_0 + u_{p-\nu+1} = u'_0 + u'_{p-\nu+1}$, avec

$$u'_0 = -(p-1)^2 (\gamma \ell)^{p-2} x .$$

$$\text{LEMME 9. - } v_K u'_{p-\nu+1} = v_K u_{p-\nu+1} .$$

Montrons que ce lemme entraîne la proposition 7 .

$$v_K (T_2^{-\gamma} p^{p-1} \frac{T_1}{\omega(p-1)n}) (\ell x)^{p-1} = \text{Min}(v_K u'_0, v_K u'_i, i > 0) .$$

Supposons que $\frac{pt+t'}{p} > \frac{pe}{p-1}$, alors la condition (II) est vérifiée,

$$v_K u_1 < v_K u'_0, \quad \text{et on obtient pour } \theta = \omega \frac{(p^2-1)t+a}{p^2} (\ell x)^{p-1} :$$

$$v_K (T_2^{-\gamma} p^{p-1} \frac{T_1}{\omega(p-1)n}) \theta = \text{Min}((p^2-1)t+a + v_K u'_i, i > 0) .$$

Donc l'entier J est congru à 0 mod p et au plus égal à

$$2(p-1)t + a + p^2 e - (p-1)(pt+t') . \quad \text{Une condition nécessaire pour que}$$

$u_\theta = \mathfrak{O}$ est alors : $J \geq mp^2 - pc(t)$. Elle n'est pas satisfaite si
 $(p-1)(pt+t') \geq p^2e + p^2 + pc(t)$ i.e. $\frac{pt+t'}{p} \geq \frac{pe}{p-1} + \frac{p+c(t)}{p-1}$.

LEMME 10. -

$$T_2 e^{p-1} (\gamma \ell + y)^{p-\nu+1} = T_2 e^{p-1} (p-\nu+1)(\gamma \ell)^{p-\nu} y_\nu e^\nu + \text{termes de valuation} \rangle .$$

Montrons que ce lemme entraîne le précédent.

$$u_{p-\nu+1} = (-1)^\nu \binom{p-1}{\nu-2} (\gamma \ell + y - x)^{\nu-2} T_2 e^{p-1} (\gamma \ell + y)^{p-\nu+1} . \text{ Utilisons le lemme 9 .}$$

$$u_{p-\nu+1} = (-1)^\nu \binom{p-1}{\nu-2} (\gamma \ell)^{\nu-2} (p-\nu+1) \gamma^{p-\nu} y_\nu T_2 e^{2p-1} + \text{termes de val.} \rangle$$

$$u_{p-\nu+1} = (-1)^\nu \binom{p-1}{\nu-2} (p-\nu+1) \gamma^{p-2} y_\nu (2p-1) e^{p+\nu-2} + \text{termes de val.} \rangle$$

$$\text{Or } u_{\mathfrak{O}} - u'_{\mathfrak{O}} = (\gamma \ell)^{p-2} y_\nu e^\nu + \text{termes de val.} \rangle . \text{ Donc}$$

$$u'_{p-\nu+1} = \gamma^{p-2} y_\nu e^{p+\nu-2} (1 + (-1)^{\nu+1} \binom{p-1}{\nu-2} (p-\nu+1)) + \text{termes de val.} \rangle \text{ où}$$

$$1 + (-1)^{\nu+1} \binom{p-1}{\nu-2} (p-\nu+1) \equiv \nu \pmod{p} .$$

Il reste à démontrer le lemme 10.

$$(\gamma \ell + \sum_{i=2}^{p-1} y_i \ell^i)^{p-\nu+1} = \sum_{\substack{a_i \geq 0 \\ \sum a_i = p-\nu+1}} \binom{p-\nu+1}{a_1, \dots, a_{p-1}} (\gamma \ell)^{a_1} \dots (y_{p-1} \ell^{p-1})^{a_{p-1}}$$

$$T_2 e^{p-1} (\gamma \ell + y)^{p-\nu+1} = \sum_{\substack{a_i \geq 0 \\ \sum a_i = p-\nu+1}} \epsilon y_2^{a_2} \dots y_{p-1}^{a_{p-1}} T_2 e^{p-1+j}$$

avec ϵ unité de k (dépendant de a_1, \dots, a_{p-1}) et $j = \sum_{i=1}^{p-1} i a_i$.

On privilégie le terme associé à : $a_1 = p-\nu$ et $a_\nu = 1$, i.e.

$$(p-\nu+1) \gamma^{p-\nu} \cdot y_\nu T_2 e^{2p-1} , \text{ dont la valuation est celle de } y_\nu e^p$$

$(T_2 e^{2p-1} = (2p-1)\Delta)$. On montre que tous les autres termes de la somme ont une valuation strictement supérieure. Pour cela, on écrit $p-1+j$ sous la forme $(p-1)q+r$, $0 \leq r < p-1$ et on utilise les résultats du lemme 8 .

On remarque que $2p-\nu \leq p-1+j \leq (p-1)(p-\nu+2)$.

Si $r = 0$.

Ou bien $q < p$, alors $T_2 \ell^{(p-1)q} = p-1$. Il faut montrer que $vy_2^{a_2} \dots y_{p-1}^{a_{p-1}} > vy_\nu \ell^p$. Or $vy_i \ell^i > v\ell$, donc $pv_k y_i > (i-1)t > 0$ et $vy_\nu \ell^\nu < vx$, donc $p^2 v_k y_\nu < (\nu p-1)t$, $vy_\nu \ell^p < 0$.

Ou bien $q = p$. Cela n'est possible que si $\nu = 2$ et pour le terme associé à : $a_{p-1} = p-1$. Alors $T_2 \ell^{(p-1)p} = p-1+p\Delta^{p-1}$. Il faut montrer que $vy_{p-1}^{p-1} p \ell^{p(p-1)} > vy_2 \ell^p$ i.e. $(p-1)pv_k y_{p-1} + pe - p(p-2)t - pv_k y_2 > 0$. Or $vy_{p-1} \ell^{p-1} \geq vy_2 \ell^2$ et $pe > (p-1)t$, donc

$$(p-1)pv_k y_{p-1} + pe > (p-1)pv_k y_2 + (p-1)(p-2)t .$$

L'inégalité est donc satisfaite si : $(p-2)(pv_k y_2 - t) \geq 0$, et cette dernière l'est.

Si $r = q$.

Alors $T_2 \ell^{pq} = p\Delta^q$. Il faut montrer que $vy_2^{a_2} \dots y_{p-1}^{a_{p-1}} p \ell^{pq} > vy_\nu \ell^p$ i.e. $\sum_{i=2}^{p-1} a_i pv_k y_i + pe - p(q-1)t - pv_k y_\nu > 0$. Or $vy_i \ell^i \geq vy_\nu \ell^\nu$ donc $pv_k y_i \geq pv_k y_\nu + (i-\nu)t$. Soit $s = \sum_{i=2}^{p-1} a_i$, alors

$$\sum_{i=2}^{p-1} a_i pv_k y_i \geq spv_k y_\nu + (j-a_1)t - s\nu t .$$

L'inégalité est donc satisfaite si : $(s-1)pv_k y_\nu + (j-a_1)t - s\nu t + (p-1)t - p(q-1)t \geq 0$ i.e. $(s-1)pv_k y_\nu + (p-a_1 - s\nu)t \geq 0$, soit $(s-1)(pv_k y_\nu - (\nu-1)t) \geq 0$. Cette dernière l'est car $pv_k y_\nu > (\nu-1)t$ et $s > 0$.

Si $r < q$.

Alors $T_2 \ell^{(p-1)q+r} = c\Delta^r$, c entier de k . Il faut montrer que : $vy_2^{a_2} \dots y_{p-1}^{a_{p-1}} \ell^{pr} > vy_\nu \ell^p$ i.e. $\sum_{i=2}^{p-1} a_i pv_k y_i - p(r-1)t - pv_k y_\nu > 0$. Comme précédemment, l'inégalité est satisfaite si $(s-1)pv_k y_\nu + (j-a_1)t - s\nu t - p(r-1)t > 0$, soit $(s-1)(pv_k y_\nu - (\nu-1)t) + (p-1)(q-r-1)t > 0$. Cette dernière l'est si $s > 1$, et $s = 1$ n'est obtenu que pour le terme privilégié.

7. - CONCLUSION, SOUS FORME DE REMARQUES

7.1. Pour $p = 2$ et $t \equiv t' \equiv 1 \pmod{4}$ par exemple, on sait que B (anneau des entiers d'une extension biquadratique d'un corps 2-adique) n'est pas libre sur son ordre \mathfrak{D} ssi $2t+t' \geq 4e+7$ [7]. L'analogie avec la condition (I) de la proposition 7 est claire.

7.2. Pour $p = 3$ et $t = t' \equiv 1 \pmod{9}$, la proposition 7 s'énonce : si $8t > 9e+8$, B n'est pas libre sur \mathfrak{D} (car $\mathfrak{A}_\theta \subset \mathfrak{D}_m$). Or il existe des extensions qui vérifient : $8t < 9e+8$ et B libre sur \mathfrak{D} .

PROPOSITION. - Soit t un entier qui vérifie $t \equiv 1 \pmod{9}$ et $t < \frac{3e}{2}$, soit $K_1 = k(\ell)$, ℓ racine de $X^3 - X - \delta\omega^{-t}$ (δ unité de k), soit $K_2 = k(m)$, m racine de $X^3 - X - \epsilon\omega^{-t}$. On suppose qu'il existe une unité γ de k telle que : $v_k(\gamma^3 + \frac{\epsilon}{\delta}) > \frac{2t}{3}$ et $\gamma^2 \not\equiv 1 \pmod{\omega}$. Alors $K = K_1K_2$ est une extension de degré 9 de k , admettant t comme seul nombre de ramification, et telle que B soit libre sur \mathfrak{D} si $8t < 9e$.

On sait que K/k est de degré 9, admet t comme seul nombre de ramification, et que $x = m + \gamma\ell$ est de valuation $-t$ dans K (cf. 5). Soit $\theta = \omega^{\frac{8t+1}{9}} (\ell x)^2$, c'est une uniformisante de K . Lorsque $8t < 9e$, on va construire une A -base de \mathfrak{A}_θ et montrer que $\mathfrak{A}_\theta = \mathfrak{D}$. $g\ell = (\tau-1)\ell$ est racine du polynôme primitif de $K_1[X] : X^2 + 3\ell X + 3\ell^2 - 1$. On peut supposer que $g\ell$ est une unité principale de K_1 et poser $g\ell = 1+r$. La méthode de Newton montre que $v_{K_1} r = v_{K_1} 3\ell^2$. On pose de même $fm = 1+s$, $v_{K_2} s = v_{K_2} 3m^2$. Des calculs simples montrent, sous l'hypothèse $9e-8t > 0$, que l'on a, modulo des termes de valuation strictement supérieure à $-5t$:

$$f(\ell x)^2 \equiv 2\ell^2 x + \ell^2$$

$$g(\ell x)^2 \equiv 2\gamma\ell^2 x + \gamma^2\ell^2 + 2\ell x^2$$

$$T_1(\ell x)^2 \equiv 2\ell^2.$$

Donc $v_K(\gamma f - g + \gamma(1-\gamma)T_1)(\ell x)^2 = -5t$. Soit $\varphi = \gamma f - g + \gamma(1-\gamma)T_1$. Posons $t = 9\lambda + 1$, alors $v_K \frac{\varphi^\theta}{\omega^{3\lambda}} = 4$ et $v_K \frac{f\varphi^\theta}{\omega^{4\lambda}} = 5$. De même, sous l'hypothèse $9e - 8t > 0$, on a, modulo des termes de valuation strictement supérieure à $-2t$:

$$T_1(\ell x)^2 \equiv 2\ell^2 + 3\gamma^2 \ell^4$$

$$T_2(\ell x)^2 \equiv 2\gamma^2 \ell^2 + 3\gamma^2 \ell^4 - 4\gamma \ell x + 2x^2$$

$$fg(\ell x)^2 \equiv 2\gamma \ell^2 + 2\gamma \ell^2(r+s) + 4\ell x + 2(1-\gamma)\ell$$

$$gT_1(\ell x)^2 \equiv 4\ell.$$

Donc $(\gamma^2 T_1 + T_2 + \gamma fg + \gamma(1-\gamma)gT_1)(\ell x)^2 \equiv \gamma^2 \ell^2(3(\gamma^2+1)\ell^2 - (r+s)) + 2x^2$.

La méthode de Newton montre que $r \equiv 3\ell^2 + 3\ell \pmod{(3\ell^2)^2}$, on en déduit, sous l'hypothèse $9e - 8t > 0$, que $v_K(3(\gamma^2+1)\ell^2 - (r+s)) = v_K 3\ell x$.

Soit $\psi = \gamma^2 T_1 + T_2 + \gamma fg + \gamma(1-\gamma)gT_1$, alors $v_K \psi(\ell x)^2 = -2t$, donc

$v_K \frac{\psi^\theta}{\omega^{6\lambda}} = 7$ et $v_K \frac{f\psi^\theta}{\omega^{7\lambda}} = 8$. On peut choisir comme A-base de \mathfrak{u}_θ les éléments : $1, \frac{f}{\omega^\lambda}, \frac{T_1}{\omega^{2\lambda}}, \frac{\varphi}{\omega^{3\lambda}}, \frac{f\varphi}{\omega^{4\lambda}}, \frac{gT_1}{\omega^{5\lambda}}, \frac{\psi}{\omega^{6\lambda}}, \frac{f\psi}{\omega^{7\lambda}}, \frac{T}{\omega^{8\lambda+1}}$. Comme

les éléments $1, \frac{f}{\omega^\lambda}, \frac{T_1}{\omega^{2\lambda}}, \frac{gT_1}{\omega^{5\lambda}}, \frac{T}{\omega^{8\lambda+1}}$ appartiennent à l'ordre \mathfrak{D} ,

pour démontrer l'inclusion de \mathfrak{u}_θ dans \mathfrak{D} , il suffit de montrer que

$\frac{\varphi}{\omega^{3\lambda}}$ et $\frac{\psi}{\omega^{6\lambda}}$ appartiennent à \mathfrak{D} . On vérifie pour cela que $\frac{\varphi^{2\theta}}{\omega^{6\lambda}}$,

$\frac{\varphi\psi^\theta}{\omega^{9\lambda}}$, $\frac{\psi^{2\theta}}{\omega^{12\lambda}}$ sont des entiers.

7.3. Pour $p=3$ et $t=t' \equiv 1 \pmod{9}$, il existe des extensions qui vérifient : $10t > 9e+10$ et B n'est pas libre sur \mathfrak{D} .

PROPOSITION. - Soit t un entier tel que : $t \equiv 1 \pmod{9}$ et $t < \frac{3e}{2}$. On suppose que k contient les racines cubiques de 1.

Soit $K_1 = k(\sqrt[3]{a})$, $a = 1 + \alpha\omega^{\frac{3e}{2}-t}$ (α unité de k), soit $K_2 = k(\sqrt[3]{b})$,

$b = 1 + \beta\omega^{\frac{3e}{2}-t}$. On suppose qu'il existe une unité γ de k qui vérifie : $v_k(\gamma^3 + \frac{\beta}{\alpha}) > \frac{2t}{3}$ et $\gamma^2 \not\equiv 1 \pmod{\omega}$. Alors $K = K_1 K_2$ est

une extension de degré 9 de k admettant t comme seul nombre de ramification ; si $10t > 9e + 10$, l'anneau B n'est pas libre sur son ordre.

Les extensions K_1/k et K_2/k sont cycliques de degré 3 , et de nombre de ramification t . Soit $\ell = \sqrt[3]{a} - 1$, il vérifie :

$$\ell^3 + 3\ell^2 + 3\ell = \alpha \omega^{\frac{3e}{2} - t} \quad \text{et} \quad v_{K_1}(\ell) = \frac{3e}{2} - t .$$

Définissons c par $\gamma^3 + \frac{\beta}{\alpha} = c$; on a :

$$b = 1 + \frac{\beta}{\alpha}(\ell^3 + 3\ell^2 + 3\ell) = 1 + (c - \gamma^3)(\ell^3 + 3\ell^2 + 3\ell) =$$

$$= (1 - \gamma\ell)^3 + 3\ell(\gamma(1 - \gamma^2) + c) - 3\ell^2(\gamma^2(1 + \gamma) - c) + c\ell^3 = (1 - \gamma\ell)^3 \lambda , \quad \text{avec}$$

$$v_{K_1} \lambda = \frac{9e}{2} - t \quad \text{grâce à l'hypothèse faite sur } \gamma .$$

On en déduit que $K = K_1(\sqrt[3]{\lambda})$ est une extension cyclique de degré 3 , et de nombre de ramification t . De plus $\sqrt[3]{\lambda} - 1$ est de valuation $\frac{9e}{2} - t$ dans K . Soit $m = \sqrt[3]{b} - 1$ et $x = m + \gamma\ell$, alors $v_K x = \frac{9e}{2} - t$. Il reste à montrer que B n'est pas libre sur son ordre si $10t > 9e + 10$. Soit

$$\theta = \omega^{\frac{8t+1}{9}} \left(\frac{\ell x}{3}\right)^2 , \quad \text{c'est une uniformisante de K . Des calculs de trace}$$

donnent : $T_1(\ell x)^2 = 3\ell^2(1 - \gamma\ell)^2$, $T_2(\ell x)^2 \equiv 3(m^2 - \gamma^2\ell^3 - \gamma m\ell^3) \pmod{9}$,
 $(T_2 - \gamma^2 T_1)(\ell x)^2 \equiv 3((m - \gamma\ell)x - \gamma^2(\gamma + 1)\ell^3 - \gamma\ell^3(m + \gamma^3\ell))$. On en déduit que
 $v_K(T_2 - \gamma^2 T_1)\theta = \text{Min}(4t + 1, 4t + 1 + \frac{9e}{2} - 5t)$. Si $10t > 9e$, l'entier J défini en 6 vérifie $J \equiv \frac{9e}{2} - t + 1 \equiv 0 \pmod{9}$. Si $10t > 9e + 10$, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{A}_\theta$ et B n'est pas libre sur \mathfrak{D} .

Cet exemple et le précédent montrent qu'il ne dépend pas que des seuls nombres de ramification que B soit libre sur son ordre ou non.

7.4. Pour p quelconque et $t < p$, la condition nécessaire de la proposition 3' est satisfaite, la condition (I) de la proposition 7 ne l'est pas. Peut-on spéculer que B est libre sur son ordre ? On a le résultat suivant :

PROPOSITION. - Lorsque $t = 1$, B est un \mathfrak{D} -module libre.

Posons $t' = \lambda'p^2 + 1$. Soit θ une uniformisante de K et soient i et j des entiers du segment $[0, p-1]$. On a : $v_K f^i g^j \theta \geq it' + j + 1$ avec égalité si $i + j \leq p-1$ (lemme 0), et $v_K f^i g^{p-1} \theta = pit' + p$. On montre que les entiers $\left(\frac{f^i g^j \theta}{\omega^{i\lambda'}}\right)_{(i,j) \neq (p-1, p-1)}$ et $\frac{f^{p-1} g^{p-1} \theta}{\omega^{(p-1)\lambda'+1}}$ forment une A -base de B .

On utilise le lemme suivant : des éléments de B forment une A -base ssi leurs images dans $B/\omega B$ forment une $A/\omega A$ -base.

Supposons que $\sum'_{i,j} a_{ij} \frac{f^i g^j \theta}{\omega^{i\lambda'}} + a_{p-1, p-1} \frac{f^{p-1} g^{p-1} \theta}{\omega^{(p-1)\lambda'+1}} \in \omega B$, $a_{ij} \in A$.

Comme $\frac{f^{p-1} g^{p-1} \theta}{\omega^{(p-1)\lambda'+1}}$ est la seule unité parmi les entiers considérés,

$a_{p-1, p-1} \in \omega A$. On montre ensuite, par récurrence sur j , que $a_{i,j} \in \omega A$.

Pour $j=0$ par exemple, on fait agir g^{p-1} , on obtient :

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0} \frac{f^i g^{p-1} \theta}{\omega^{i\lambda'}} + g^p \sum_{i=0}^{p-1} \frac{f^i g^{j-1} \theta}{\omega^{i\lambda'}} \in \omega g^{p-1} B.$$

Or $v_K \frac{f^i g^{p-1} \theta}{\omega^{i\lambda'}} = (i+1)p$, $g^p = pgh$, $h \in Z[g]$, et $v_K \omega g^{p-1} x \geq p^2 + p$ pour tout $x \in B$. On en déduit que $a_{i,0} \in \omega A$ pour tout $i \in [0, p-1]$.

On obtient donc comme A -base de \mathfrak{A}_θ : $\left(\frac{f^i g^j \theta}{\omega^{i\lambda'}}\right)_{(i,j) \neq (p-1, p-1)}$ et $\frac{f^{p-1} g^{p-1} \theta}{\omega^{(p-1)\lambda'+1}}$. Or ces éléments appartiennent à \mathfrak{D} .

[1] A.M. BERGE - Ann. Inst. Fourier, (1978), 4, p.17.

[2] F. BERTRANDIAS et M.J. FERTON - Comptes rendus 274, série A (1972), p. 1330.

[3] N. BOURBAKI - Algèbre, Ch.8, Hermann.

[4] M.J. FERTON - Comptes rendus 274, série A (1972), p.1529 et 276, série A (1973), p.1483.

- [5] H. JACOBINSKI - Jour. reine angew Math. 213 (1964), p.151.
- [6] R.E. MAC KENZIE and G. WHAPLES - Amer. J. of Maths 78 (1956),
p.473.
- [7] B. MARTEL - Comptes rendus 278, série A (1974), p.117.
- [8] E. NOETHER - Jour. reine angew Math. 167 (1932), p.147.
- [9] J.P. SERRE - Corps locaux, Hermann.