SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

HENRI COHEN

Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apery)

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. n° 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A6_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
5 octobre 1978
GRENOBLE

DEMONSTRATION DE L'IRRATIONALITE DE $\zeta(3)$
(d'après R. APERY)

par Henri COHEN

I. - IRRATIONALITE DE $\zeta(3)$

Le point central de la démonstration d'irrationalité de $\zeta(3)$ est la fraction continue suivante :

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 - \cfrac{1^6}{117 - \cfrac{2^6}{535 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{n^6}{34n^3+51n^2+27n+5 - \ddots}}}}}$$

Il est facile de montrer que cette fraction continue converge rapidement. Nous allons montrer qu'elle converge effectivement vers $\zeta(3)$, puis nous montrerons que les approximations de $\zeta(3)$ ainsi obtenues ont un dénominateur qui ne croit pas trop vite.

PROPOSITION 1. - *Pour* $n \geq 0$, *posons*

$$a_n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \quad \textit{et} \quad b_n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}$$

avec $c_{n,k} = \sum_{1\leq m\leq n} \frac{1}{m^3} + \sum_{1\leq m\leq k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$. *Alors* a_n *et* b_n *vérifient tous deux la relation de récurrence*

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3+51n^2+27n+5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0 .$$

<u>Démonstration</u>. - Posons

$$\lambda_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

et

$$A_{n,k} = 4(2n+1)\,(2k^2 + k - (2n+1)^2)\,\lambda_{n,k} \,.$$

Une vérification facile (mais longue) montre que

$$A_{n,k} - A_{n,k-1} = (n+1)^3 \lambda_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)\lambda_{n,k} + n^3 \lambda_{n-1,k} \,.$$

Il en résulte que

$$(n+1)^3 a_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) a_n + n^3 a_{n-1} = \sum_{0 \le k \le n+1} (A_{n,k} - A_{n,k-1})$$

$$= A_{n,n+1} - A_{n,-1} = 0 \,,$$

puisque par définition $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$. D'où la récurrence pour a_n . D'autre part, on vérifie que

$$c_{n,k} - c_{n-1,k} = \frac{1}{n^3} + \sum_{1 \le m \le k} (-1)^m \frac{(m-1)!^2 (n-m-1)!}{(n+m)!}$$

$$= \frac{1}{n^3} + \sum_{1 \le m \le k} \left\{ \frac{(-1)^m m!^2 (n-m-1)!}{n^2 (n+m)!} - \frac{(-1)^{m-1} (m-1)!^2 (n-m)!}{n^2 (n+m-1)!} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^k k!^2 (n-k-1)!}{n^2 (n+k)!} \,.$$

Il en résulte que si l'on pose

$$S_{n,k} = (n+1)^3 \lambda_{n+1,k} c_{n+1,k} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)\lambda_{n,k} c_{n,k} + n^3 \lambda_{n-1,k} c_{n-1,k}$$

on aura

$$S_{n,k} = (A_{n,k} - A_{n,k-1}) c_{n,k} + (n+1)^3 \lambda_{n+1,k} (c_{n+1,k} - c_{n,k}) - n^3 \lambda_{n-1,k} (c_{n,k} - c_{n-1,k})$$

$$= (A_{n,k} - A_{n,k-1}) c_{n,k} + (-1)^k k!^2 \Big[(n+1)^3 \lambda_{n+1,k} \frac{(n-k)!}{(n+1)^2 (n+1+k)!} - n^3 \lambda_{n-1,k} \frac{(n-k-1}{n^2 (n+k}$$

Mais d'autre part posons

$$B_{n,k} = A_{n,k} c_{n,k} + \frac{5(-1)^{k-1} k}{n(n+1)} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (2n+1) \,.$$

On a :

$$B_{n,k}-B_{n,k-1} = (A_{n,k}-A_{n,k-1})c_{n,k} + A_{n,k-1}(c_{n,k}-c_{n,k-1})$$
$$+ (2n+1)\left[\frac{5(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} - \frac{5(-1)^{k}(k-1)}{n(n+1)}\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}\right].$$

Remplaçant $c_{n,k}-c_{n,k-1}$ par $\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k^3\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}}$ une nouvelle vérification assez longue montre que $B_{n,k}-B_{n,k-1} = S_{n,k}$. On en conclut donc que

$$(n+1)^3 b_{n+1} - (34n^3+51n^2+27n+5)b_n + n^3 b_{n-1} = \sum_{0\le k\le n+1} (B_{n,k}-B_{n,k-1})$$
$$= B_{n,n+1} - B_{n,-1} = 0$$

d'où la proposition 1.

COROLLAIRE. - $\zeta(3) = \lim_{n\to\infty} b_n/a_n$ <u>et la fraction continue écrite au début converge bien vers</u> $\zeta(3)$.

<u>Démonstration</u>. - On voit immédiatement que pour tout $m \le n$ on a $\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} \ge n(n+1)$. On en déduit aisément que pour tout $k \le n$ on a $|c_{n,k}-\zeta(3)| < 2/n^2$. Ceci étant une majoration uniforme en k , on en déduit immédiatement que $\zeta(3) = \lim b_n/a_n$. Puisque $a_1 = 5$ et $b_1 = 6$ la proposition 1 entraîne donc que

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 - \cfrac{1^3/2^3}{117/2^3 - \cfrac{2^3/3^3}{535/3^3 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{n^3/(n+1)^3}{(34n^3+51n^2+27n+5)/(n+1)^3 - \ddots}}}}}$$

ce qui est une autre façon d'écrire la fraction continue du début.

PROPOSITION 2. - $\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{m\ge 1} \dfrac{(-1)^{m-1}}{m^3\binom{2m}{m}}$.

<u>Démonstration</u>. - D'après ce qu'on a vu ci-dessus, on a

$$c_{n,n} - c_{n-1,n-1} = c_{n,n} - c_{n,n-1} + c_{n,n-1} - c_{n-1,n-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2n^3\binom{2n}{n}} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{n^2(2n-1)!} = \frac{5}{2}\,\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} .$$

Il en résulte que

$$\zeta(3) = \lim_{n\to\infty} c_{n,n} = \sum_{m\geq 1} (c_{m,m} - c_{m-1,m-1}) = \frac{5}{2} \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m^3\binom{2m}{m}} .$$

Remarque. - Cette proposition 2 ne sera pas utilisée dans la suite de la démonstration.

PROPOSITION 3. - Appelons d_n le plus petit commun multiple de $1,2,\ldots,n$. Alors $a_n \in \mathbb{Z}$, $2d_n^3 b_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. - Il est clair que $a_n \in \mathbb{Z}$. D'autre part :

$$2d_n^3 b_n = \sum_{0\leq k\leq n} 2d_n^3 \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k} .$$

Montrons que $2d_n^3\binom{n+k}{k}c_{n,k} \in \mathbb{Z}$, ce qui démontrera bien la proposition 3. On a

$$2d_n^3\binom{n+k}{k}c_{n,k} = 2\binom{n+k}{k} \sum_{1\leq m\leq n} \frac{d_n^3}{m^3} + \sum_{1\leq m\leq k} \frac{(-1)^{m-1} d_n^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} .$$

Il est clair que $m^3 | d_n^3$ si $m \leq n$, donc tous les termes de la première somme sont entiers. Montrons que tous les termes de la seconde somme sont aussi entiers. Pour cela, nous allons montrer que pour chaque nombre premier p , la valuation p-adique d'un terme de la somme est positive ou nulle. En effet :

$$v = v_p\left(\frac{d_n^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right) = 3v_p(d_n) - 3v_p(m) - v_p\left(\binom{n}{m}\right) + v_p\left(\binom{n+k}{k-m}/\binom{k}{m}\right)$$

$\left(\text{puisque } \binom{n+k}{k}/\binom{n+m}{m} = \binom{n+k}{k-m}/\binom{k}{m}\right)$

$$\geq 3v_p(d_n) - 3v_p(m) - v_p\left(\binom{n}{m}\right) - v_p\left(\binom{k}{m}\right) .$$

Mais d'autre part, on connait l'inégalité classique

$$v_p(\binom{n}{k}) \le v_p(d_n) - v_p(k) = \left[\frac{\mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}\, p}\right] - v_p(k) \ .$$

Il en résulte que

$$v \ge 3v_p(d_n) - 3v_p(m) - v_p(d_n) + v_p(m) - v_p(d_k) + v_p(m)$$

$$v \ge \left(v_p(d_n) - v_p(m)\right) + \left(v_p(d_n) - v_p(d_k)\right) \ge 0$$

puisque $k \le n$ et $m \le n$, d'où la proposition 3.

THEOREME 1. - $\zeta(3)$ <u>est irrationnel</u>. <u>Plus précisément pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe une constante effective</u> $c(\varepsilon) > 0$ <u>telle que pour tous entiers</u> p <u>et</u> q <u>on ait</u>

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\varepsilon)}{q^{\theta+\varepsilon}}$$

<u>où</u> $\theta = \dfrac{8 \ \mathrm{Log}\,(1+\sqrt{2})}{4 \ \mathrm{Log}\,(1+\sqrt{2})-3} = 13{,}41782\ldots$

<u>Démonstration</u>. - Les formules de récurrence permettent de montrer immédiatement la relation

$$b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1} = \frac{6}{n^3} \ .$$

Puisque $b_n/a_n \to \zeta(3)$, ceci entraîne :

$$\zeta(3) - \frac{b_n}{a_n} = \sum_{k \ge n+1} \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}} \ .$$

En particulier b_n/a_n est une suite monotone, ce qui montre que pour tout n , $\zeta(3) \neq b_n/a_n$. Mais d'autre part, en utilisant soit la récurrence, soit la formule explicite, il est facile de montrer qu'il existe une constante A telle que

$$a_n \sim A\, \alpha^n n^{-3/2} \ ,$$

où $\alpha = (1+\sqrt{2})^4$ est la plus grande racine du polynôme $X^2 - 34X + 1 = 0$. (En fait, on peut montrer que $A = (1+\sqrt{2})^2 (2\pi\sqrt{2})^{-3/2}$). On déduit donc de ci-dessus que

$$\zeta(3) - \frac{b_n}{a_n} = O(\alpha^{-2n}) \ .$$

Pour obtenir d'irrationalité de $\zeta(3)$, il nous faut travailler en entiers. D'après la proposition 3, les nombres $p_n = 2d_n^3 b_n$ et $q_n = 2d_n^3 a_n$ sont entiers. De plus, d'après le théorème des nombres premiers on sait que $\operatorname{Log} d_n \sim n$, et il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$0 \neq \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} = O(q_n^{-r-\varepsilon})$$

avec $r = \dfrac{2 \operatorname{Log} \alpha}{\operatorname{Log} \alpha + 3} > 1$. Si on multiplie par q_n et que l'on fait tendre n vers l'infini, on en déduit que $q_n \zeta(3) - p_n$ tend vers zéro sans être égal à zéro, ce qui montre que $\zeta(3)$ est irrationnel. De plus, si $p/q \in \mathbb{Q}$, on peut écrire pour tout entier n :

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| ,$$

donc en excluant au plus une valeur de n pour laquelle on aurait $q_n = q$, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{c}{q_n^{r+\varepsilon}}$$

pour une certaine constante $c > 0$ (dépendant de ε). Il suffit de choisir n au voisinage de $\dfrac{\operatorname{Log} q}{\operatorname{Log} \alpha - 3}$ pour obtenir le théorème 1.

<u>Remarques sur la démonstration</u>. -

1) Le point crucial de cette dernière démonstration est que le nombre qui "gouverne" la vitesse de convergence, à savoir $\alpha = (1+\sqrt{2})^4$, est plus grand que le nombre qui "gouverne" la non intégralité de b_n, à savoir essentiellement e^3. Ceci est équivalent à la condition essentielle $r > 1$.

2) L'idée de la démonstration est due à R. Apéry. A cause de cela, il m'est difficile d'expliquer la raison pour laquelle on introduit les suites a_n et b_n. On peut toutefois remarquer que d'après la proposi-

tion 2 , $c_{n,n}$ tend vers $\zeta(3)$ de façon essentiellement géométrique, et donc en particulier le développement asymptotique en $\frac{1}{n}$ de l'expression $\zeta(3) - \sum_{1\leq m\leq n} 1/m^3$ donné par la formule d'Euler-Mac Laurin doit être le même que le développement asymptotique en $1/n$ de

$$c_{n,n} - \sum_{1\leq m\leq n} \frac{1}{m^3} = \sum_{1\leq m\leq n} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} .$$

Ceci fournit d'ailleurs en explicitant des relations combinatoires entre les nombres de Bernoulli.

II. - IRRATIONALITE DE $\zeta(2)$

Bien que l'irrationalité de $\zeta(2) = \pi^2/6$ soit bien connue, il est intéressant de voir qu'il existe une démonstration en tout point analogue à celle qui précède, et qui de plus fournit la meilleure mesure d'irrationalité connue pour π^2 . La démarche étant la même, je ne fais qu'esquisser les étapes.

La fraction continue est la suivante :

$$\zeta(2) = \cfrac{5}{3 + \cfrac{1^4}{25 + \cfrac{2^4}{69 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{n^4}{11n^2 + 11n + 3 + \ddots}}}}}$$

On pose $a'_n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}$ et $b'_n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} c'_{n,k}$ avec

$$c'_{n,k} = 2 \sum_{1\leq m\leq n} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2} + \sum_{1\leq m\leq k} \frac{(-1)^{n+m-1}}{m^2 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} .$$

On démontre que a'_n et b'_n satisfont à la récurrence

$(n+1)^2 u_{n+1} - (11n^2+11n+3)u_n - n^2 u_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1)$ en utilisant

$$A'_{n,k} = (k^2+3(2n+1)k - 11n^2 - 9n - 2)\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}$$

et

$$B'_{n,k} = A'_{n,k} c'_{n,k} + 3(-1)^{n+k-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

et l'identité

$$c'_{n,k} - c'_{n-1,k} = 2(-1)^{k+n-1} \frac{k!^2 (n-k-1)!}{n(n+k)!} \quad .$$

De plus a'_n et $d_n^2 b'_n$ sont entiers et $a'_n \sim A' \alpha'^n n^{-1}$ où $\alpha' = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5$,

$$A' = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 \left(2\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^{-1} \quad .$$

On en déduit de la même façon :

THEOREME 2. - $\zeta(2)$ <u>est irrationnel et pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une constante effective</u> $c'(\varepsilon) > 0$ <u>telle que pour tous entiers</u> p <u>et</u> q , <u>on ait</u>

$$\left|\zeta(2) - \frac{p}{q}\right| > \frac{c'(\varepsilon)}{q^{\theta'+\varepsilon}}$$

<u>où</u> $$\theta' = \frac{10 \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{5 \operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 2} = 11,85078\ldots$$

Comme il a été dit plus haut, ceci donne la meilleure mesure d'irrationalité connue pour π^2 . On déduit immédiatement de ce qui précède que

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c''(\varepsilon)}{q^{\theta''+\varepsilon}}$$

où $\theta'' = 2\theta' = 23,70156\ldots$, ce qui est meilleur que le résultat de Mahler [2] , mais légèrement moins bon que le meilleur résultat connu, dû à Mignotte [3] , et qui est de l'ordre de 20.

Signalons enfin qu'une méthode inspirée des mêmes principes permet de trouver des mesures d'irrationalité pour certains nombres tels que $\mathrm{Log}(\frac{a+1}{a})$ (a entier) et $\mathrm{Arctg}\frac{1}{a}$ ($a \geq 3$ entier), améliorant sensiblement les résultats antérieurs (voir Cohen [1]). Par exemple on montre qu'il existe une constante explicite c telle que pour tout rationnel p/q on ait

$$|\mathrm{Log}\, 2 - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^{4,623}}$$

alors que le précédent résultat, dû à Baker, donnait 12,5 comme exposant de q .

Remerciements. - Une partie du travail ci-dessus a été faite en collaboration avec A. Van der Poorten et D. Zagier que je remercie bien sincèrement. En particulier, c'est Zagier qui a eu l'idée de démontrer les relations de récurrence en utilisant des "séries télescopantes" du type $\sum_k (A_{n,k} - A_{n,k-1})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN H. - On irrationality measures for $\mathrm{Log}(\frac{a+1}{a})$ and related numbers, (en préparation).

[2] MAHLER K. - On the approximation of π . Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, A, 56 (= Indag Math. 15) (1953), 29-42.

[3] MIGNOTTE M. - Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres, mémoire n°37 du Bull. Soc. Math. France (1974), 121-132.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)