SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

ELISABETH GALLOU

Discriminants minimaux successifs pour les corps de nombres algébriques totalement réels de degré n

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 5 (1975-1977), exp. nº 5, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1975-1977__5__A5_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
25 novembre et 2 décembre 1976
Grenoble

DISCRIMINANTS MINIMAUX SUCCESSIFS POUR LES CORPS DE NOMBRES ALGEBRIQUES TOTALEMENT REELS DE DEGRE n

par

Elisabeth GALLOU

Le problème est de calculer les discriminants minimaux successifs parmi les discriminants de corps de nombres algébriques totalement réels de degré n donné sur Q .

Les résultats connus sont les suivants :

n	nombre de racines réelles de l'extension F sur Q	valeur minimale de $\|D\|$ D discriminant de F
2	0 2	3 5
3	1 3	23 49
4	0 2 4	117 275 725
5	1 3 5	1609 4511 14641
6	0 6	9747 300125
7	7	20134393

le cas $n = 3$ a été résolu par Furtwangler en 1896, $n = 4$ par Mayer en 1929, $n = 5$ par Hunter en 1956 [7], $n = 6$ par Kaur en 1970 [8] pour le cas totalement réel et par Liang et Zassenhaus en 1973 [9] pour le cas totalement complexe, $n = 7$ par Pohst pour le cas totalement réel [11]. Siegel a conjecturé que pour les corps totalement réels de degré n le discriminant minimum $a(n)$ est tel que $a(n) = (2n+1)^{n-1}$ si $2n+1$ est premier ; c'est exact pour $n = 2,3,5$. Cohn en 1952, [3] a montré que si $n+1$ et $2n+1$ sont premiers $a(n) < (2n+1)^{n-1}$. On constate que c'est exact pour $n = 6$. Pour $n = 8,9,11$, $2n+1$ est premier et $n+1$ ne l'est pas. On peut se demander si la conjecture de Siegel est exacte dans ces 3 cas.

- I -

A) Dans cette partie n sera un entier naturel supérieur ou égal à 3 quelconque. Soit $F_1 = Q(\theta)$ un corps de nombres algébriques de degré n sur Q. Les F_i, $i = 1,2,\dots,n$ sont les corps conjugués de F_1. Pour ρ_1 entier de F_1 nous appelons ρ_i, $1 \le i \le n$, les conjugués de ρ_1. Posons $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = S(\rho_1)$, $\sum_{i=1}^{n} |\rho_i| = S(|\rho_1|)$, $\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = S(\rho_1^2)$ et $\sum_{i=1}^{n} |\rho_i|^2 = S(|\rho_1|^2)$, (x) est le n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$.

THEOREME 1. - <u>Si</u> F_1 <u>est de degré</u> n <u>sur</u> Q <u>et de discriminant</u> D, <u>il existe</u> ρ_1 <u>entier algébrique de</u> F_1 <u>tel que</u> ρ_1 <u>ne soit pas un rationnel et</u>

$$|S(\rho_1)| < [n/2]$$
$$n^{n-1} \le (S|\rho_1|^2)^{n-1} \le \frac{\gamma_n^n}{n} |D| .$$

$$\gamma_n = \left(\frac{2^n p(1+\frac{n}{2})}{(p(\frac{1}{2}))^n} \right)^{2/n}$$

. Les valeurs connues de γ_n sont $\gamma_2 = \sqrt{4/3}$, $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$, $\gamma_4 = \sqrt[4]{4}$, $\gamma_5 = \sqrt[5]{8}$, $\gamma_6 = \sqrt[6]{64/3}$, $\gamma_7 = \sqrt[7]{64}$, $\gamma_8 = 2$. Pour les valeurs suivantes nous utiliserons l'inégalité $\gamma_n \le \gamma_{n-1}^{\frac{n-1}{n-2}}$.

COROLLAIRE DU THEOREME 1. - Si F_1 est un corps de nombres algébriques totalement réel de degré n sur Q, de discriminant D il existe ρ_1 entier algébrique de F_1 tel que ρ_1 ne soit pas rationnel et

$$[\frac{n}{2}] \leq S(\rho_1) \leq 0$$

$$n+1 \leq S(\rho_1^2) \leq (\frac{\gamma_n^n}{n}|D|)^{\frac{1}{n-1}} .$$

En effet si F_1 est totalement réel les ρ_i sont tous réels donc $\rho_i^2 = |\rho_i|^2$. En remplaçant éventuellement ρ_1 par $-\rho_1$ nous pouvons supposer que $S(\rho_1)$ est négatif. Supposons $S(\rho_1^2) = n$. $|\prod_{i=1}^{n} \rho_i|$ est un entier puisque c'est la valeur absolue de la norme de ρ_1 et cet entier est non nul. Par suite

$$|\prod_{i=1}^{n} \rho_i| \geq 1$$

$S(\rho_1^2) = n$ avec $\prod_{i=1}^{n} \rho_i^2 \geq 1$ entraîne $\rho_i^2 = 1$ pour tout i. Ceci est en contradiction avec le fait que ρ_1 n'est pas rationnel donc $n+1 \leq S(\rho_1^2)$.

Démonstration du théorème 1 : Soit $\omega_1 = (1, \rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{1n-1})$ une base entière de F_1 ; $\omega_i = (1, \rho_{i1}, \dots, \rho_{in-1})$ où ρ_{ij} est conjugué de ρ_{1j} est une base entière de F_i. Soit D le discriminant de F_1, $D = \det \omega_1^2$. Soit $X_i = x_1 + \rho_{i1}x_2 + \dots + \rho_{in-1}x_n$;

$$f((x)) = \sum_{i=1}^{n} |X_i|^2$$

$\prod_{i=1}^{n} |X_i|$ est la valeur absolue de la norme d'un entier algébrique non nul donc $\prod_{i=1}^{n} |X_i| \geq 1$. En appliquant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{n} |X_i|^2 \geq n$$

f est une forme quadratique définie positive à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant $|D|$. f a pour minimum n, ce minimum étant atteint en

$(x_1) = (1,0,\dots,0)$. m_2 est le minimum de f sur l'ensemble des entiers (x) non proportionnels à (x_1) . m_2 est atteint en (x_2) . m_3 est le minimum de f sur l'ensemble des (x) entiers qui ne sont pas des combinaisons linéaires de (x_1) et (x_2) . m_3 est atteint en (x_3) et ainsi de suite nous définissons $m_4,\dots,m_n$

$$n \le m_2 \le m_3 \le \dots \le m_n$$

D'après [4] , $m_1 m_2 \dots m_n \le \gamma_n^n |D|$

$$n m_2^{n-1} \le \gamma_n^n |D| \ . \tag{1}$$

Nous écrivons

$$f((x)) = n x_1^2 + 2 \sum_{\substack{i=1\,j=1\\ i\neq j}}^{i=n\,j=n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{k=2}^{k=n} b_{kk} x_k{}^2$$

$$f((x)) = n\Big(x_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} b_{1k} x_k\Big)^2 + g(x_2,\dots,x_n) \ .$$

Soit $x_2,\dots,x_n$ des entiers donnés non tous nuls , il existe x_1 entier tel que $x_1 + \sum_{k=2}^{n} b_{1k} x_k = 0$ donc $g(nx_2,\dots,nx_n) > 0$ et $g(x_2,\dots,x_n) > 0$. g est une forme quadratique définie positive à $n-1$ variables . $m_2 = f((x_2))$ posons $(x_2) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (x_2) n'étant pas proportionnel à (x_1) les α_i pour i supérieur ou égal à 2 ne sont pas tous nuls . Posons

$$\delta = \mathrm{pgcd}\{\alpha_2,\dots,\alpha_n\} \ .$$

Nous allons montrer que $\delta = 1$.

Supposons $\delta \ge 2$, $\alpha_i = \delta\beta_i$, $2 \le i \le n$,

$$m_2 = f((x_2)) = n\Big(\alpha_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} b_{1k}\alpha_k\Big)^2 + \delta^2 g(\beta_1,\dots,\beta_n) \ .$$

Il existe γ tel que

$$\Big|\gamma + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} b_{1k}\beta_k\Big| \le \frac{1}{2} \ .$$

Appelons μ_2 le minimum de f pour les (x) entiers tels que $x_i = \beta_i$ pour $i \ge 2$

$$\mu_2 \le \frac{n}{4} + g(\beta_2,\dots,\beta_n) \ .$$

$$\delta^2 g(\beta_2,\dots,\beta_n) \le m_2 = n\ \alpha_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} b_{1k}\alpha_k{}^{2} + \delta^2 g(\beta_2,\dots,\beta_n) \le \mu_2 \le \frac{n}{4} + g(\beta_2,\dots,\beta_n)$$

donc

$$(\delta^2-1)\,g(\beta_2,\dots,\beta_n) \le \frac{n}{4}$$

$$g(\beta_2,\dots,\beta_n) \le \frac{n}{12}\ .$$

Par suite, $m_2 \le \frac{n}{4} + \frac{n}{12} < n$. Il y a contradiction car $m_2 \ge n$. Nous avons bien montré que $\delta = 1$.

Nous trouvons une matrice entière $n-1 \times n-1$ de déterminant 1 :

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n-1} \\ \alpha_3 & \lambda_{32} & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn-1} \end{pmatrix}$$

les α_i sont toujours définis par $(x_2) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$. Posons

$$x_1 = x'_1 + \alpha_1 x'_2$$

$$x_i = \alpha_i x'_2 + \lambda_{i2}x'_3 + \dots + \lambda_{in-1}x'_n\ .$$

Il s'agit d'une substitution unimodulaire entière. Appliquons-la à $f((x))$

$$f((x)) = \sum_{i=1}^{n} |x'_1 + p_{i1}x'_2 + p_{i2}x'^{3} + \dots + p_{i\,n-1}x'_n|^2$$

avec $p_{i1} = \alpha_1 + \rho_{i1}\alpha_2 + \dots + \rho_{i\,n-1}\alpha_n$ et $p_{ij} = \lambda_{2j}\rho_{ij} + \lambda_{3j}\rho_{i2} + \dots + \lambda_{nj}\rho_{i\,n-1}$ pour $j \ge 2$. La substitution étant entière et unimodulaire $(1,p_{11},\dots,p_{1\,n-1})$ est une base entière de F_1 et $(1,p_{i1},\dots,p_{i\,n-1})$ en est une de F_i . Posons $\rho_1 = p_{11}$ et montrons qu'il vérifie les conclusions du théorème 1.

$$f((x)) = \sum_{i=1,\,j=1}^{i=n,\,j=n} b_{ij}x'_i x'_j$$

avec $b_{11} = n$, $b_{22} = S(|\rho_1|^2)$ et $2b_{12} = S(\rho_1 + \bar\rho_1) = 2S(\rho_1)$, $(x_2) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ se transforme en $(x'_2) = (0,1,0,\dots,0)$ dans la substitution entière unimodulaire considérée, donc $m_2 = f((x_2)) = b_{22} = S(|\rho_1|^2)$.
Par suite, en utilisant (1) nous obtenons

$$n(S(|\rho_1|^2))^{n-1} \leq \gamma_n^n|D| \ .$$

Il reste à montrer que $|S(\rho_1)| \leq [n/2]$ pour terminer la démonstration du théorème 1.

Dans la transformation entière unimodulaire considérée $(x) = (x_1,\dots,x_n)$ est tel que pour tout i supérieur ou égal à 2, $x_i = 0$, si et seulement si son image $(x') = (x'_1,\dots,x'_n)$ possède cette propriété. Par suite (x') égal à $(1,1,0,\dots,0)$ ou à $(1,-1,0,\dots,0)$ est l'image d'un (x) non proportionnel à $(1,0,0,\dots,0)$ et donc tel que $f((x)) \geq m_2$. m_2 est égal à b_{22}, nous obtenons par conséquent :

$$b_{11} + 2b_{12} + b_{22} \geq b_{22}$$

et

$$b_{11} - 2b_{12} + b_{22} \geq b_{22}$$

donc

$$|b_{12}| \leq \frac{1}{2}\, b_{11} \ .$$

Comme $|b_{12}| = |S(\rho_1)|$ et $b_{11} = n$ nous avons montré que $|S(\rho_1)| \leq \frac{n}{2}$ $|S(\rho_1)|$ est un entier. Il est donc inférieur ou égal à la partie entière de $n/2$. Le théorème 1 est démontré.

B) Soit F_1 un corps de nombres algébriques totalement réel, de degré n sur $\mathbb{Q}$, de discriminant D. D'après le corollaire du théorème 1, il existe ρ_1 entier algébrique de F_1 non rationnel tel que

$$-[n/2] \leq S(\rho_1) \leq 0 \tag{2}$$

et

$$n+1 \leq S(\rho_1^2) \leq \left(\frac{\gamma_n^n}{n}\,|D|\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{3}$$

ρ_1 engendre un sous-corps de degré d de F_1 sur $\mathbb{Q}$ où d est un diviseur de n avec éventuellement $d = n$. Il existe donc un polynôme $g(X)$ de $Z[X]$, irréductible dans $Q[X]$, de degré d, ayant d racines réelles distinctes et admettant ρ_1 pour une de ses racines. Le terme de plus haut degré de ce polynôme est X^d.

Notons $g(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i}$. Les a_i sont des entiers relatifs,

$a_o = 1$ et les inégalités (2) et (3) nous donnent une majoration et une minoration de a_1 et a_2 en fonction de d et D. Nous allons montrer que les conditions sur $g(X)$ nous permettent de calculer pour chaque a_i une majoration et une minoration en fonction de d et de D. Nous établissons d'abord un théorème valable pour un polynôme de degré d à coefficients entiers.

THEOREME 2. - $g(X)$ <u>polynôme de</u> $Z[X]$ <u>de degré</u> d <u>a</u> d <u>racines réelles distinctes si et seulement si</u> Mg <u>est la matrice d'une forme quadratique définie positive</u>

$$g(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^{d-i} .$$

Mg <u>est la matrice carrée d'ordre</u> $d-1$ <u>et de coefficients</u> :

$$Mg = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le d-1 \\ 1\le j\le d-1}}$$

$$m_{ij} = i(d-j)a_i a_j + \sum_{t=1}^{t=i} d(i-j-2t)a_{j+t}\, a_{i-t} \quad \underline{\text{si}} \quad i+j \le d$$

$$m_{ij} = i(d-j)a_i a_j + \sum_{t=1}^{t=d-j} d(i-j-2t)a_{j+t}\, a_{i-t} \quad \underline{\text{si}} \quad j+i > d .$$

<u>Démonstration du théorème 2</u> : D'après [5], p. 199, $g(X)$ a d racines réelles distinctes si et seulement si les déterminants s_o, $\begin{vmatrix} s_o & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}$, ..., $\begin{vmatrix} s_o & s_1 \cdots s_{d-1} \\ \vdots & \\ s_{d-1} & s_d \cdots s_{2d-2} \end{vmatrix}$ sont tous strictement positifs. $s_p = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^p$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ étant les racines de $g(X)$. Posons

$$S_d((x)) = \sum_{i=0,k=0}^{i=d-1,k=d-1} s_{i+k} x_i x_k = \sum_{j=1}^{j=d} (x_o + \alpha_j x_1 + \ldots + \alpha_j^{d-1} x_{d-1})^2 .$$

S_d est une forme quadratique à d variables. S_d est définie positive si et seulement si les déterminants s_o, $\begin{vmatrix} s_o & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}$, ..., $\begin{vmatrix} s_o s_1 \cdots s_{d-1} \\ \vdots \\ s_{d-1} s_d \cdots s_{2d-2} \end{vmatrix}$ sont strictement positifs.

$$d\, S_d((x)) = (dx_o + s_1 x_1 + \ldots + s_{d-1} x_{d-1})^2 + h(x_1, \ldots, x_{d-1}) .$$

S_d est une forme quadratique définie positive si et seulement si la forme quadratique à $d-1$ variables h est définie positive. En effet, soit $x_1,\dots,x_{d-1}$ non tous nuls, il existe x_o tel que $x_o+s_1x_1+\dots+s_{d-1}x_{d-1} = 0$. Alors $d\,S_d(x_o,dx_1,\dots,dx_{d-1}) = d^2h(x_1,\dots,x_{d-1})$ ce qui entraîne $h(x_1,\dots,x_{d-1}) > 0$.

Soit A la matrice entière de déterminant 1 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

les a_i sont définis par $g(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i}$. Considérons la substitution entière unimodulaire qui à $(x_1,\dots,x_{d-1})$ associe $(\zeta_1,\dots,\zeta_{d-1})$ tel que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{d-1} \end{pmatrix}$. Nous définissons une nouvelle forme quadratique à $d-1$ variables h' par $h'(\zeta_1,\dots,\zeta_{d-1}) = h(x_1,\dots,x_{d-1})$. La forme quadratique à $d-1$ variables h est définie positive si et seulement si h' est une forme quadratique définie positive. Appelons M_g la matrice de la forme quadratique h' . Nous avons montré que $g(X)$ a d racines réelles distinctes si et seulement si M_g est la matrice d'une forme quadratique définie positive.

<u>Calcul de</u> M_g . Notons H la matrice de la forme quadratique h ,

$$H = (h_{ij})_{\substack{1\le i\le d-1 \\ 1\le j\le d-1}}$$

$$h_{ij} = ds_{i+j} - s_i s_j \ .$$

Posons

$$M_g = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le d-1 \\ 1\le j\le d-1}}$$

$$M_g = {}^tAHA \ .$$

Donc

$$m_{ij} = \sum_{t=1}^{t=i} \sum_{k=1}^{k=j} (ds_{t+k}\, a_{i-t}\, a_{j-k} - s_t s_k a_{i-t} a_{j-k}) \ .$$

Nous utilisons les formules de Newton

$$\left.\begin{array}{lll} s_p = -a_1 s_{p-1} \dots -pa_p & \text{si} & p > d \\ s_p = -a_1 s_{p-1} \dots -a_d s_{p-d} & \text{si} & p \le d \end{array}\right. . \qquad (4)$$

Posons

$$B = \sum_{t=1}^{t=i} \sum_{k=1}^{k=j} s_t s_k \, a_{i-t} \, a_{j-k}$$

$$B = \sum_{t=1}^{t=i} s_t a_{i-t} \quad \sum_{k=1}^{k=j} s_k a_{j-k}$$

$$B = ij \, a_i \, a_j \; .$$

Posons

$$C = \sum_{t=1}^{t=i} \sum_{k=1}^{k=j} s_{t+k} \, a_{i-t} \; a_{j-k} \; .$$

Supposons $i+j \le d$:

Posons

$$C_t = \sum_{k=1}^{k=j} s_{t+k} \, a_{j-k}$$

$$C = \sum_{t=1}^{t=i} C_t \, a_{i-t} \; .$$

$$\begin{aligned} C = & - a_j(a_{i-1} s_1 + a_{i-2} s_2 + \dots + s_i) \\ & - a_{j+1}(a_{i-2} s_1 + a_{i-3} s_2 + \dots + s_i - 1) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & - a_{j+i-1} \, a_o s_1 \\ & - a_{i-1}(j+1)a_{j+1} - a_{i-2}(j+2)a_{j+2} \dots - a_o(j+i)a_{j+i} \; . \end{aligned}$$

$$C = \sum_{t=1}^{t=i} (i-t+1)a_{j+t-1} \, a_{i-t+1} - \sum_{t=1}^{t=i} a_{i-t}(j+t)a_{j+t}$$

$$C = \sum_{t=1}^{t=i-1} (i-j-2t)a_{j+t} \, a_{i-t} + ia_i a_j - (j+i)a_{j+i} \, a_o \; .$$

$m_{ij} = dC - B$ ce qui donne l'expression de m_{ij} écrite dans l'énoncé du théorème 2 .

Supposons $i+j > d$:

Nous posons $C'_t = -a_j s_t \dots - a_d \, s_{t+j} - d$ et nous effectuons les calculs de façon analogue. Le théorème 2 est démontré.

THEOREME 3. - Soit $g(X)$ un polynôme de degré d, de $Z[X]$ avec $d \geq 3$. $g(X)$ est unitaire, a d racines réelles distinctes et

$$g(X) = \sum_{i=0}^{i=d} a_i x^{d-i} \quad \text{avec} \begin{cases} A_2 \leq a_1 \leq A_1 \\ B_2 \leq a_2 \leq B_1 \end{cases},$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des entiers relatifs donnés. Alors

$$\forall p \ , \ 3 \leq p \leq d \ , \ \exists (L_{1p}, L_{2p}) \ , \ (L_{1p}, L_{2p}) \in \mathbb{Z}^2 \ , \ L_{2p} < a_p < L_{1p} \ .$$

Démonstration du théorème 3 : Soit p un entier compris entre 2 et d. Appelons $\mathcal{P}(p)$ la propriété suivante :

$$\forall i \ , \ 1 \leq i \leq p \ , \ \exists (L_{1i}, L_{2i}) \ , \ (L_{1i}, L_{2i}) \in \mathbb{Z}^2 \ , \ L_{2i} < a_i < L_{1i} \ .$$

$\mathcal{P}(2)$ est vraie par hypothèse.

Montrons que $\mathcal{P}(p)$ entraîne $\mathcal{P}(p+1)$ si $p+1 \leq d$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie et $p+1 \leq d$. Notons $g_{p+1}(x)$ la dérivée d'ordre $d-p-1$ de $g(x)$. $g_{p+1}(x)$ est un polynôme de $Z[X]$, de degré $p+1$ ayant $p+1$ racines réelles distinctes. Appliquons le théorème 2

$$g_{p+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=p+1} a'_i x^{p+1-i}$$

avec $a'_i = (d-i) \ldots (p+2-i)a_i$ en particulier $a'_{p+1} = (d-p-1)!\, a_{p+1}$

$$Mg_{p+1} = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$$

si $i+j \leq p+1$, $m_{ij} = i(p+1-j)a'_i a'_j + \sum_{t=1}^{t=i} (p+1)(i-j-2t)a'_{j+t} a'_{i-t}$

si $i+j > p+1$, $m_{ij} = i(p+1-j)a'_i a'_j + \sum_{t=1}^{t=p+1-j} (p+1)(i-j-2t)a'_{j+t} a'_{i-t}$.

Alors, Mg_{p+1} est la matrice d'une forme quadratique définie positive.

1) Supposons p pair :

Posons

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} m_{\frac{p}{2}\,\frac{p}{2}} & m_{\frac{p}{2}\,\frac{p}{2}+1} \\ m_{\frac{p}{2}\,\frac{p}{2}+1} & m_{\frac{p}{2}+1\,\frac{p}{2}+1} \end{vmatrix}$$

Δ_{p+1} est strictement positif

$$m_{\frac{p}{2}\frac{p}{2}} = \frac{p}{2}(\frac{p}{2}+1)a'^{2}_{\frac{p}{2}} - 2(p+1)a'_{\frac{p}{2}+1}\ a'_{\frac{p}{2}-1} \ldots - (p+1)pa'_p a'_o$$

$$m_{\frac{p}{2}\ \frac{p}{2}+1} = (\frac{p}{2})^2\ a'_{\frac{p}{2}}\ a'_{\frac{p}{2}+1} - 3(p+1)a'_{\frac{p}{2}+2}\ a'_{\frac{p}{2}-1} \ldots - (p+1)^2\ a'_{p+1}\ a'_o$$

$$m_{\frac{p}{2}+1\ \frac{p}{2}+1} = (\frac{p}{2}+1)\frac{p}{2}a'^{2}_{\frac{p}{2}+1} - 2(p+1)\ a'_{\frac{p}{2}+2}\ a'_{\frac{p}{2}} \ldots - (p+1)pa'_{p+1}a'_1$$

Δ_{p+1} est un polynôme du second degré en a'_{p+1} tel que le coefficient de a'_{p+1} soit $-(p+1)^4\ a'^{2}_o$ et tel que le coefficient de a'_{p+1} et le terme constant soient des polynômes en $(a'_o, a'_1, \ldots, a'_p)$ à coefficients entiers. Pour que Δ_{p+1} soit strictement positif, il faut et il suffit qu'il ait 2 racines réelles et que a'_{p+1} soit compris strictement entre ces racines. Si les racines ne sont pas réelles, il n'existe pas de valeur possible de $\mathbb{Z}$ pour a'_{p+1}. Nous posons $L_{1\,p+1} = L_{2\,p+1} = 0$. Si les racines sont des réels x_1 et x_2 avec $x_2 \leq x_1$ nous avons $L_{2\,p+1} < a_{p+1} < L_{1\,p+1}$ avec

$$L_{1\,p+1} = E(\frac{x_1}{(d-p-1)!})+1 \quad \text{si} \quad \frac{x_1}{(d-p-1)!} \notin \mathbb{Z}$$

$$L_{1\,p+1} = \frac{x_1}{(d-p-1)!} \quad \text{si} \quad \frac{x_1}{(d-p-1)!} \in \mathbb{Z}$$

$$L_{2\,p+1} = E(\frac{x_2}{(d-p-1)!}) .$$

2) <u>Supposons p impair</u> :

$$\Delta'_{p+1} = \begin{vmatrix} m_{\frac{p+1}{2}\ \frac{p+1}{2}} & m_{\frac{p+1}{2}\ \frac{p+3}{2}} \\ m_{\frac{p+1}{2}\ \frac{p+3}{2}} & m_{\frac{p+3}{2}\ \frac{p+3}{2}} \end{vmatrix} \quad \text{doit être strictement positif}$$

$$m_{\frac{p+1}{2}\ \frac{p+1}{2}} = (\frac{p+1}{2})^2\ a'^{2}_{\frac{p+1}{2}} - 2(p+1)a'_{\frac{p+3}{2}}\ a'_{\frac{p-1}{2}} \ldots - (p+1)^2 a'_{p+1}a'_o$$

$$m_{\frac{p+1}{2}\ \frac{p+3}{2}} = (\frac{p+1}{2})(\frac{p-1}{2})a'_{\frac{p+1}{2}}\ a'_{\frac{p+3}{2}} - 3(p+1)a'_{\frac{p+5}{2}}\ a'_{\frac{p-1}{2}} \ldots - p(p+1)a'_{p+1}a'_1$$

$$m_{\frac{p+3}{2}\,\frac{p+3}{2}} = (\frac{p+3}{2})(\frac{p-1}{2})a'_{\frac{p+3}{2}} - 2(p+1)a'_{\frac{p+5}{2}}\,a'_{\frac{p+1}{2}} - \ldots - (p-1)(p+1)a'_{p+1}a'_2$$

Δ'_{p+1} est un polynôme du second degré en a'_{p+1} tel que le coefficient de a'_{p+1} soit $(p-1)(p+1)^3a'_2a'_o - p^2(p+1)^2a'^2_1$ et tel que le coefficient de a'_{p+1} et le terme constant soient des polynômes en $(a'_o, a'_1, \ldots, a'_p)$ à coefficients entiers. Le coefficient m_{11} de Mg_{p+1} est strictement positif. Or $m_{11} = p\,a'^2_1 - 2(p+1)a'_2\,a'_o$. A fortiori $p^2a'^2_1 - (p-1)(p+1)a'_2\,a'_o$ est strictement positif donc le coefficient de a'_{p+1} dans Δ'_p est strictement positif. La fin de la démonstration est analogue à celle du cas p pair.

C)

1) Nous cherchons maintenant les corps de nombres algébriques totalement réel, de degré n sur Q de discriminant D inférieur à un nombre K donné. Soit F_1 un de ces corps de nombres algébriques. D'après le théorème 1, il existe ρ_1 entier algébrique de F_1 , ρ_1 n'étant pas un rationnel, tel que :

$$-[n/2] \leq S(\rho_1) \leq 0 \tag{2}$$

et

$$n+1 \leq S(\rho_1^2) \leq (\frac{\gamma_n^n}{n}|D|)^{\frac{1}{n-1}} \tag{3}$$

ρ_1 engendre un sous-corps de degré d de F_1 sur Q . Il existe un polynôme $g(X)$ de $Z[X]$ de degré d unitaire, irréductible dans $Q(X)$, admettant d racines réelles distinctes dont l'une est ρ_1 . Nous notons $g(X) = \sum_{i=0}^{i=d} a_iX^{d-i}$ avec $a_o = 1$. Soit $s'_1, \ldots, s'_d$ les homomorphismes de $Q(\rho_1)$ dans $\mathbb{C}$. Notons $\rho'_i = s'_i(\rho_1)$. Il y a n homomorphismes de F_1 dans $\mathbb{C}$ et leurs restrictions à $Q(\rho_1)$ sont $s'_1, \ldots, s'_d$. Chaque s'_i se prolonge en n/d homomorphismes de F_1 dans $\mathbb{C}$. Par suite

$$S(\rho_1) = \frac{n}{d}(\rho'_1 + \ldots + \rho'_d) \quad , \quad S(\rho_1^2) = \frac{n}{d}(\rho'^2_1 + \ldots + \rho'^2_d)$$

comme $a_1 = -(\rho'_1 + \ldots + \rho'_d)$ et $a_2 = \dfrac{a_1^2 - (\rho'^2_1 + \ldots + \rho'^2_d)}{2}$. Nous déduisons de cela

$$\text{et} \qquad \begin{array}{c} 0 \le a_1 \le [\frac{d}{2}] \\ -\frac{1}{2}[\frac{d}{n}(\frac{\gamma_n^n}{n}K)^{\frac{1}{n-1}} - a_1^2] \le a_2 \le -\frac{1}{2}[(n+1)\frac{d}{n} - a_1^2] \end{array} \qquad (4)$$

Utilisons maintenant le théorème 3 : pour chaque a_i nous calculons un majorant et un minorant qui sont exprimés en fonction de d, n, K, $a_o,\dots,a_{i-1}$. Tout corps de nombres algébriques F totalement réel de degré n sur Q de discriminant inférieur ou égal à K est tel qu'il existe d divisant n, tel que F contienne un sous corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par une racine d'un polynôme unitaire $g(X)$ de $Z[X]$ de degré d, irréductible dans $Q[X]$, ayant d racines réelles distinctes et dont les coefficients sont compris entre les bornes calculées à partir de (4) par la méthode indiquée dans le théorème 3.

2) Nous supposons pour cette partie que n est un nombre premier. Alors tout corps de nombres algébriques F de degré n sur Q de discriminant inférieur ou égal à K est engendré par une racine d'un polynôme unitaire de $Z[X]$, de degré n, ayant n racines réelles distinctes, et dont les coefficients sont compris entre les bornes calculées à partir de (4) par la méthode indiquée dans le théorème 3. Soit un polynôme $g(X) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i X^{n-i}$ avec $a_o = 1$.

Supposons que les a_i soient des entiers compris entre les bornes calculées à partir de (4) pour les corps de nombres algébriques totalement réels de degré n de discriminant inférieur ou égal à K.

Nous indiquons comment nous vérifions si une racine de $g(X)$ définit une extension de degré n, totalement réelle, de Q de discriminant inférieur ou égal à K : nous cherchons si $g(X)$ est irréductible dans $Q[X]$. S'il l'est nous formons M_g dont l'expression en fonction des a_i est donnée dans l'énoncé du théorème 2. Nous vérifions que tous les mineurs principaux ont des déterminants strictement positifs. Notons Δ le déterminant de M_g. Nécessairement Δ doit être strictement positif. Si $g(X)$ n'a été éliminé par aucune des vérifications précédentes une racine ρ de $g(X)$ définit une extension totalement réelle de degré n sur Q

de discriminant D . $\frac{\Delta}{n-2} = D_\rho$ et $D_\rho = d^2 D$ avec $d \in \mathbb{Z}$. Il reste à vérifier si on a effectivement $D \leq K$. D est supérieur à la minoration de Minkowski pour les extensions totalement réelles de degré n sur Q que nous notons D_o donc

$$\frac{D_\rho}{K} \leq d^2 \leq \frac{D_\rho}{D_o} \quad \text{si } D \leq K$$

Si p est un nombre premier tel que pour un k , $\frac{D_\rho}{K} \leq (pk)^2 \leq \frac{D_\rho}{D_o}$, et si p^2 divise D_ρ nous cherchons la décomposition de l'idéal (p) dans $Q(\rho)$ par la méthode de Berwick [1] et nous appliquons ensuite le lemme suivant

LEMME. - <u>Soit</u> p <u>un nombre premier de</u> $\mathbb{Z}$, $p = p_1^{e_1} \ldots p_s^{e_s}$ <u>dans un corps</u> F <u>sur</u> Q , <u>les</u> p_i <u>étant des idéaux premiers distincts de</u> F , <u>alors la puissance</u> D_p <u>de</u> p <u>contenue dans le discriminant de</u> K <u>sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>est</u>

$$D_p = \prod_{i=1}^{i=s} p^{f_i(\bar{e}_i - 1)}$$

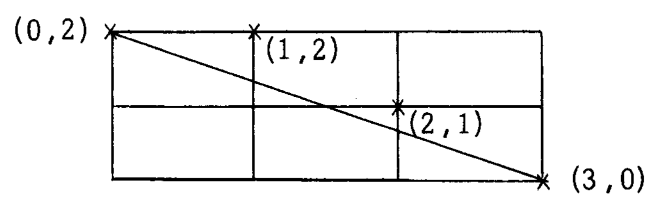
<u>avec</u> $\bar{e}_i = e_i$ <u>si</u> $p \not| \, e_i$, $e_i + 1 \leq \bar{e}_i \leq (\Omega_i + 1) e_i$ <u>si</u> p / e_i <u>et</u> p^{Ω_i} <u>est la puissance maximum de</u> p <u>contenu dans</u> e_i

Prenons par exemple $n = 3$ et $K = 150$. Considérons le polynôme $g(X) = X^3 + X^2 - 5X - 1$. Il est bien irréductible dans $Q[X]$ et M_g est la matrice d'une forme quadratique définie positive. Appelons ρ une racine de $g(X)$

$$D_\rho = \frac{\Delta}{3} = 592 = d^2 D \quad , \quad D \text{ discriminant de } Q(\rho) \ .$$

Nous avons a priori comme possibilité $d = 1$ ou $d = 2$ donc $D = 592$ ou $D = 148$. Cherchons la décomposition de l'idéal (2)

$$g(X) = (X+1)^3 - 2[(X+1)^2] - 4[(X+1)-1] \quad \text{mod}.8$$



donc $(2) = p_1^3$; en utilisant le lemme nous trouvons <u>$D = 148$</u> .

3) Recherche des discriminants minimaux successifs pour les extensions totalement réelles de degré 3 sur Q

a) Le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré 3 sur $\mathbb{Q}$ est 49 . Nous allons chercher le plus petit parmi les discriminants suivants , ensuite nous chercherons le plus petit parmi les discriminants supérieurs aux deux premiers et nous continuerons ainsi.

Une extension totalement réelle de degré 3 sur Q de discriminant inférieur ou égal à K est engendrée par une racine d'un polynôme g(X) tel que

$$g(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 \ , \ (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{Z}^3$$

$$0 \le a_1 \le 1 \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}[(\frac{\gamma_3^3}{3}K)^{1/2} - a_1^2 \le a_2 \le -\frac{1}{2}[4-a_1^2]$$

$$-27a_3^2 + a_3(18a_1a_2 - 4a_1^3) + a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 > 0$$

De plus si ces 3 conditions sont vérifiées, nous appelons ρ une racine de $g(X)$, D le discriminant de $Q(\rho)$. Alors

$$D = \frac{\Delta}{3d^2} \quad \text{avec} \quad d \in \mathbb{Z}$$

et

$$\Delta = -27a_3^2 + a_3(18a_1a_2 - 4a_1^3) + a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 \ .$$

Pour $a_1 = 0$, (5) devient $-\frac{1}{2}(\frac{2K}{3})^{1/2} \le a_2 \le -2$ et $\Delta = -27a_3^2 - 4a_2^3$.

Pour $a_1 = 1$, (5) devient $-\frac{1}{2}((\frac{2K}{3})^{1/2} - 1) \le a_2 \le -2$ et

$$\Delta = -27a_3^2 + a_3(18a_2 - 4) + a_2^2 - 4a_2^3 \ .$$

Considérons $g(X) = X^3 - 3X + 1$. $g(X)$ est irréductible, a 3 racines réelles distinctes et $\Delta/3 = 81$. Une racine ρ de $g(X)$ définit une extension de degré 3 totalement réelle de Q de discriminant D tel que

$$D = \frac{81}{d^2} \ , \ d \in \mathbb{Z}$$

comme nécessairement $D \geq 49$, cela entraîne $d = 1$ et $D = 81$.

b) Cherchons les extensions totalement réelles de degré 3 sur Q de discriminant inférieur à 81 . Une telle extension est engendrée par une racine ρ d'un polynôme $g(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ -3 \leq a_2 \leq -2 \\ 0 \leq a_3 \leq 2\sqrt{-a_2^3/27} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ -3 \leq a_2 \leq -2 \\ -27a_3^2 + a_3(18a_2 - 4) + a_2^2 - 4a_2^3 > 0 \end{cases}$$

nous étudions tous les polynômes $g(X)$ possibles. D désignera le discriminant de $Q(\rho)$ quand $g(X)$ vérifie les conditions imposées et est irréductible dans $Q(X)$.

<u>$a_1 = 0$, $a_2 = -2$</u> . Alors $0 \leq a_3 \leq 1$, $X^3 - 2X$ et $X^3 - 2X + 1$ ne sont pas irréductibles dans $Q(X)$ ayant comme racines évidentes respectivement 0 et 1 .

<u>$a_1 = 0$, $a_2 = -3$</u> . Alors $0 \leq a_3 \leq 2$, $X^3 - 3X$ et $X^3 - 3X + 2$ ne sont pas irréductibles dans $Q(X)$ ayant comme racines évidentes respectivement 0 et 1 . $X^3 - 3X + 1$ définit l'extension cyclique de $\mathbb{Q}$ non ramifiée en dehors de 3 , de degré 3 . C'est une extension totalement réelle de degré 3 de Q , de discriminant 81 ainsi que nous l'avons calculé à la fin du a) .

<u>$a_1 = 1$, $a_2 = -2$</u> . $-27a_3^2 - 40a_3 + 36 > 0$ entraîne $-2 \leq a_3 \leq 0$, $X^3 + X^2 - 2X$ et $X^3 + X^2 - 2X - 2$ ne sont pas irréductibles dans $Q[X]$. Etudions $g(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$, $\Delta/3 = D = 49$. Une racine de ce polynôme engendre l'extension de degré 3 sur Q totalement réelle de discriminant minimum.

<u>$a_1 = 1$, $a_2 = -3$</u> . Alors $-3 \leq a_3 \leq 1$. $X^3 + X^2 - 3X + 1$, $X^3 + X^2 - 3X$, $X^3 + X^2 - 3X - 2$, $X^3 + X^2 - 3X - 3$ ne sont pas irréductibles dans $Q[X]$, $g(X) = X^3 + X^2 - 3X - 1$, $g(X)$ est bien irréductible dans $Q[X]$, $\Delta/3 = 148$ donc $D = 148/d^2$ nécessairement $D \geq 49$; donc $d = 1$ et $D = 148$.

Il n'y a pas d'extension totalement réelle de degré 3 sur Q dont le discriminant soit compris strictement entre 49 et 81 . Il existe une extension de degré 3 sur Q totalement réelle de discriminant 49 et une extension de degré 3 sur Q totalement réelle de discriminant 81 . Ce sont toutes deux des extensions cycliques de Q .

c) Nous allons chercher maintenant le discriminant minimum parmi les discriminants d'extensions totalement réelles de degré 3 sur Q non cycliques ainsi que le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré 3 sur Q de discriminant strictement supérieur à 81 . Dans l'étude précédente nous avons rencontré le polynôme X^3+X^2-3X-1 . Une racine de ce polynôme engendre une extension totalement réelle de degré 3 sur Q de discriminant $148 = 37 \times 2^2$.

Une extension F de degré 3 sur Q non cyclique a pour clôture galoisienne N une extension de Q dont le groupe de Galois est S_3 . N a 3 sous-extensions de degré 3 sur Q conjuguées et une seule sous-extension quadratique k de discriminant d . Notons D le discriminant de F . Alors $D = df^2$ avec $f \in \mathbb{Z}$ (voir [10]) . Une racine de X^3+X^2-3X-1 engendre une extension de degré 3 sur Q totalement réelle non cyclique dont la clôture galoisienne N est l'extension de degré 3 de $Q(\sqrt{37})$ non ramifiée en dehors de 2 . Il y a 3 extensions de degré 3 de Q conjuguées totalement réelles de discriminant 148 .

Nous allons montrer que 148 est le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré 3 sur Q non cycliques et que c'est le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré 3 sur Q de discriminant strictement supérieur à 81 .

<u>Recherche des extensions totalement réelles de degré</u> 3 <u>sur</u> Q <u>de discriminant supérieur à</u> 81 <u>et inférieur à</u> 148 . Elles sont engendrées par une racine ρ d'un polynôme $g(X) = X^3+a_1X^2+a_2X+a_3$, $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{Z}^3$ avec $\begin{pmatrix} a_1 = 0 \\ -4 \le a_2 \le -2 \\ -27a_3^2-4a_2^3 > 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_1 = 1 \\ -4 \le a_2 \le -2 \\ -27a_3^2+a_3(18a_2-4)+a_2^2-4a_2^3 > 0 \end{pmatrix}$. Les

cas $(a_1 = 0$ et $-3 \leq a_2 \leq -2)$ et $(a_1 = 1$ et $-3 \leq a_2 \leq -2)$ ont été étudiés pendant la recherche des extensions de discriminant inférieur à 81 .

$\underline{a_1 = 0 \ , \ a_2 = -4}$; alors $0 \leq a_3 \leq 3$. $X^3 - 4X$ et $X^3 - 4X + 3$ ne sont pas irréductibles dans $Q[X]$, $g(X) = X^3 - 4X + 1$ est irréductible dans $Q[X]$ $\Delta/3 = d^2D = 229$. 229 est premier donc $a = 1$ et $D = 229$.
$g(X) = X^3 - 4X + 2$, $\Delta/3 = 148$. Une racine de $g(X)$ engendre une des 3 extensions conjuguées de degré 3 totalement réelles sur Q sous-extensions de l'extension de degré 3 de $Q(\sqrt{37})$ non ramifiée en dehors de 2 . Ces sous-extensions sont de discriminant 148 .

$\underline{a_1 = 1 \ , \ a_2 = -4}$; alors $-3 \leq a_3 \leq 2$. $X^3 + X^2 - 4X + 2$, $X^3 + X^2 - 4X$ ne sont pas irréductibles dans $Q[X]$. $g(X) = X^3 + X^2 - 4X + 1$ donne une extension cyclique de degré 3 sur Q totalement réelle de discriminant $169 = 13^2$. $g(X) = X^3 + X^2 - 4X - 1$ donne des extensions de degré 3 sur Q totalement réelles non cycliques de discriminant 321. $g(X) = X^3 + X^2 - 4X - 2$ donne des extensions de degré 3 sur Q totalement réelles non cycliques de discriminant 4×79 . $g(X) = X^3 + X^2 - 4X - 3$ donne des extensions de degré 3 sur Q totalement réelles non cycliques de discriminant 257 .

Nous avons montré qu'il n'existe pas d'extension totalement réelle de degré 3 sur Q dont le discriminant soit strictement compris entre 81 et 148 .

- II -

Dans cette partie, nous allons chercher les discriminants minimaux successifs pour les extensions totalement réelles de degré n sur Q où n n'est pas un nombre premier. Nous allons étudier particulièrement les cas $n = 4$ et $n = 9$. Nous utiliserons les théorèmes 1, 2, 3 de la partie I et le théorème suivant du à Godwin [6] que j'énonce, dans le cas totalement réel sous le nom de théorème 4.

THEOREME 4. - <u>Soit</u> K <u>un corps totalement réel de degré</u> $N = n\nu$ <u>sur</u> Q <u>de discriminant</u> D <u>ayant un sous-corps</u> k <u>de degré</u> n <u>sur</u> Q <u>de discriminant</u> d . <u>Alors</u> K <u>est engendré sur</u> k <u>par une racine d'un polynôme</u> $\Phi_1(X)$ <u>tel que</u> :

$$\Phi_1(X) = X^\nu + \lambda_{11}X^{\nu-1} + \ldots + \lambda_{1\nu} \ , \ \lambda_{1i} \text{ entier de } k \ .$$

<u>Notons</u> $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1\nu}$ <u>les racines de</u> Φ_1. <u>Elles sont nécessairement réelles</u>. <u>Notons</u> $\Phi_1 \ldots \Phi_n$ <u>les conjugués de</u> Φ_1 <u>pour les homomorphismes de</u> k <u>dans</u> $\mathbb{C}$ <u>et</u> $\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{j\nu}$ <u>les racines de</u> Φ_j .

$$0 < \sum_{j=1}^{j=n} \left\{ \sum_{i=1}^{i=\nu} \alpha_{ji}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=\nu} \alpha_{ji}\right)^2 \Big/ \nu \right\} \leq \gamma_{N-n} \left\{ \frac{|D|^{1/2}}{|d|^{1/2}\nu^{n/2}} \right\}^{\frac{2}{N-n}} . \qquad (6)$$

γ_ℓ pour ℓ entier est la constante de Minkowski dont la définition est donnée dans le théorème 1.

A) Supposons que F_1 soit une extension totalement réelle de degré n sur Q de discriminant D inférieur ou égal à K . D'après le théorème 1 il existe ρ_1 entier algébrique de F_1 , ρ_1 n'étant pas un rationnel tel que

$$|S(\rho_1)| \leq [n/2]$$

et

$$(n+1)^{n-1} \leq (S(|\rho_1|^2))^{n-1} \leq \frac{\gamma_n^n}{n}|D|$$

$Q(\rho_1)$ est une extension de degré d sur Q avec d diviseur de n . Nous avons démontré dans la partie I que $Q(\rho_1)$ est engendrée par une racine d'un polynôme unitaire g(X) de Z[X] , de degré d , ayant d racines réelles distinctes, irréductible dans Q[X] et tel que

$$g(X) = \sum_{i=0}^{i=d} a_i X^{d-i} \quad \text{avec} \quad 0 \leq a_1 \leq [d/2]$$

et

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{d}{n}\left(\frac{\gamma_n^n}{n}K\right)^{\frac{1}{n-1}} - a_1^2\right] \leq a_2 \leq -\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)d}{n} - a_1^2\right]$$

d'après le théorème 3 ceci entraîne que pour tout i compris entre 1 et d il existe un couple d'entier (L_{1i},L_{2i}) tels que $L_{2i} < a_i < L_{1i}$. Supposons que d est un diviseur strict de n , d'après le théorème 4, F_1 est engendré sur $Q(\rho_1)$ par une racine θ_1 d'un polynôme $\Phi_1(X)$ tel que :

$$\Phi_1(X) = X^{\frac{n}{d}} + \lambda_{11} X^{\frac{n}{d}-1} + \ldots + \lambda_{1\nu} \ , \ \lambda_{1i} \text{ entier de } Q(\rho_1) \ .$$

Si $\Phi_1, \ldots, \Phi_d$ sont les conjugués de Φ_1, notons $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j\frac{n}{d}}$ les racines de Φ_j. Alors

$$0 < \sum_{j=1}^{j=n} \left\{ \sum_{i=1}^{i=\frac{n}{d}} \alpha_{ji}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=\frac{n}{d}} \alpha_{ji} \right)^2 \Big/ \frac{n}{d} \right\} \leq \gamma_{n-d} \left(\frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{|\delta|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{n}{2}}} \right)^{\frac{2}{n-d}} \qquad (7)$$

avec D discriminant de F_1, δ discriminant de $Q(\rho_1)$.

$\psi(X) = \Phi_1(X)\Phi_2(X)\ldots\Phi_{\frac{n}{d}}(X)$ est le polynôme minimal de θ_1 sur Q si $Q(\theta_1) = F_1$. Alors $\psi(X)$ a nécessairement n racines réelles distinctes, est de degré n, est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, est unitaire et irréductible dans $Q(X)$. Montrons qu'il existe une majoration et une minoration en fonction de K, n et d des coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2}. Le coefficient de X^{n-1} est $\operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}) = a'_1$. Le coefficient de X^{n-2} est

$$\operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{12}) + \frac{1}{2}(\operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}))^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2) = a'_2$$

(7) donne

$$0 < (1 - \frac{d}{n})\operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2) - 2 \operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{12}) < \gamma_{n-d} \left(\frac{D^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{n}{2}}} \right)^{\frac{2}{n-d}} \ . \quad (8)$$

$D \leq K$ par hypothèse et δ est minoré par le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré d sur Q que nous notons k donc (8) donne

$$0 < (1 - \frac{d}{n})\operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2) - 2 \operatorname{Tr} Q(\rho_1)/Q(\lambda_{12}) < \gamma_{n-d} \left(\frac{K^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{n}{2}}} \right)^{\frac{2}{n-d}} \ . \quad (9)$$

Si on ajoute à θ_1 un entier relatif (9) ne change pas. Par suite, en remplaçant éventuellement θ_1 par sa somme avec un entier, on peut supposer

$$\lambda_{11} = \alpha_o + \alpha_1 \rho_1 + \ldots + \alpha_{d-1} \rho_1^{d-1}$$

avec les α_i éléments de Q , $-[\frac{n}{2d}] < \alpha_i \le [\frac{n}{2d}]$ pour $i \ge 1$ et α_o tel que $-d[\frac{n}{2d}] < Tr\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}) \le d[\frac{n}{2d}]$. Si on change θ_1 en $-\theta_1$ (9) ne change pas donc nous pouvons supposer

$$\lambda_{11} = \alpha_o + \alpha_1 \rho_1 + \ldots + \alpha_{d-1} \rho_1^{d-1} \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}$$

$$\forall i \ge 1 \quad , \quad -[\frac{n}{2d}] < \alpha_i \le [\frac{n}{2d}) \quad \text{et} \quad 0 \le Tr\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}) \le [\frac{n}{2}] \ .$$

Pour un entier j donné $Tr\, Q(\rho_1)/Q(\rho_1^j)$ s'exprime en fonction des a_i coefficients de $g(X)$. Les a_i étant tous majorés et minorés en fonction de n , d et K . $Tr\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2)$ est par suite majoré en fonction de n , d et K . Cette majoration et (9) entraînent que a'_1 et a'_2 sont majorés et minorés en fonction de n , d et K .

Pour démontrer cela, nous avons dû supposer $F_1 = Q(\theta_1)$. Si $n = pq$ où p et q sont deux nombres premiers non nécessairement distincts et si nous sommes dans le cas $Q(\rho_1) \neq F_1$ alors nécessairement $F_1 = Q(\theta_1)$ ou F_1 est une extension composée d'une extension de degré p sur Q et d'une extension de degré q sur Q . La recherche des extensions totalement réelles de degré $n = pq$ sur Q , avec p et q premiers non nécessairement distincts, de discriminant inférieur ou égal à K consiste d'une part à chercher les extensions composées d'une extension totalement réelle de degré p sur Q et d'une extension totalement réelle de degré q sur Q et d'autre part à calculer pour $d = p$, pour $d = q$ les majorations et minorations de a'_1 et a'_2 et ensuite à chercher les polynômes qui vont convenir parmi les polynômes unitaires de degré n de $Z[X]$, ayant n racines réelles distinctes, irréductibles dans $Q[X]$ et tels que les coefficients de X^{n-1} et X^{n-2} soient majorés et minorés. Cette dernière partie se fait par la méthode indiquée dans I pour le cas n premier.

B) <u>Recherche des discriminants minimaux successifs pour les extensions totalement réelles de degré</u> 4 <u>sur</u> Q .

Nous savons que le discriminant minimum pour de telles extensions est 725 et que l'extension correspondante est cyclique. Le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré 4 sur Q qui sont composées de 2 extensions quadratique est $(5\times 8)^2 = 1600$ qui est le discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{2})$. Une extension de degré 4 sur Q galoisienne est soit cyclique, soit la composée de 2 extensions quadratiques. Nous chercherons le discriminant minimum pour les extensions totalement réelles de degré 4 sur Q non galoisiennes.

D'après le théorème 1 pour une extension F_1 de degré 4 sur Q de discriminant inférieur ou égal à 5000 il existe ρ_1 tel que ρ_1 ne soit pas rationnel et $0 \le -S(\rho_1) \le 2$ avec $5 \le S(\rho_1^2) \le (\frac{\gamma_4^4}{4}\ 5000)^{1/3}$ donc $5 \le S(\rho_1^2) \le 17$.

1) <u>Si $F_1 = Q(\rho_1)$</u> . ρ_1 a pour polynôme minimal

$$g(X) = X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 \quad , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

g irréductible dans $Q[X]$, ayant 4 racines réelles distinctes et

$$\begin{pmatrix} a_1 = 0 \\ -8 \le a_2 \le -3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_1 = 1 \\ -8 \le a_2 \le -3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_1 = 2 \\ -6 \le a_2 \le -1 \end{pmatrix} .$$

2) <u>Si</u> $Q(\rho_1)$ <u>est une extension de degré</u> 2 <u>de</u> Q . ρ_1 a pour polynôme minimal

$$g(X) = X^2 + a_1X + a_2 \quad , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

avec $a_1^2 - 4a_2 > 0$, $a_1^2 - 4a_2$ n'étant pas un carré de $\mathbb{Z}$, $0 \le a_1 \le 1$ et $\frac{a_1^2 - 17/2}{2} \le a_2 \le \frac{a_1^2 - 5/2}{2}$. Ces 2 dernières conditions donnent ($a_1 = 0$ et $-4 \le a_2 \le -2$) ou ($a_1 = 1$ et $-3 \le a_2 \le -1$) . $Q(\rho_1)$ est par suite engendré par une racine ρ_1 de l'un des polynômes suivants : $X^2 - 2$, $X^2 - 3$, $X^2 + X - 1$, $X^2 + X - 3$. $Q(\rho_1)$ est donc l'une des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$ suivantes : $Q\sqrt{2}$, $Q\sqrt{3}$, $Q\sqrt{5}$, $Q\sqrt{13}$.

Appliquons maintenant le théorème 4 . F_1 est engendré sur $Q(\rho_1)$ par θ_1 racine de $\Phi_1(X) = X^2 + \lambda_{11}X + \lambda_{12}$ avec λ_{11} et λ_{12} entiers de

$Q(\rho_1)$ et $0 < \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2) - 2\, \mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{12}) \leq 9$ (10)

a) <u>Supposons</u> $Q(\theta_1)$ <u>extension quadratique de</u> $\mathbb{Q}$. Alors λ_{11} et λ_{12} sont des éléments de $\mathbb{Z}$. (10) ne change pas si on ajoute à θ un entier. Nous pouvons donc supposer $0 \leq \lambda_{11} \leq 1$ on a $0 < \lambda_{11}^2 - 4\lambda_{12} \leq 9$ donc ($\lambda_{11} = 0$ et $-2 \leq \lambda_{12} \leq -1$) ou ($\lambda_{11} = 1$ et $-2 \leq \lambda_{12} \leq -1$) . $\Phi_1(X)$ est par suite l'un des polynômes suivants $X^2 - 1$, $X^2 - 2$, $X^2 + X - 1$, $X^2 + X - 2$. $X^2 - 1$ et $X^2 + X - 2$ ont des racines entières et ne définissent donc pas d'extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Par suite $\Phi_1(X)$ est $X^2 - 2$ ou $X^2 + X - 1$ et $Q(\theta_1)$ est $Q(\sqrt{2})$ ou $Q(\sqrt{5})$. Nous obtenons ainsi les extensions totalement réelles de degré 4 sur Q de discriminant inférieur ou égal à 5000 suivantes : $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ de discriminant 1600 , $(Q\sqrt{3},\sqrt{5})$ de discriminant 3600 , $Q(\sqrt{13},\sqrt{5})$ de discriminant 4225 .

b) <u>Supposons</u> $Q(\theta_1)$ <u>extension de degré</u> 4 <u>sur</u> Q . Le polynôme minimal de θ_1 sur Q est $\psi(X)$ tel que

$$\psi(X) = (X^2 + \lambda_{11}X + \lambda_{12})(X^2 + \overline{\lambda}_{11}X + \overline{\lambda}_{12}) .$$

Pour un élément λ de $Q(\rho_1)$, $\overline{\lambda}$ désigne son conjugué.

$$\psi(X) = X^4 + a'_1X^3 + a'_2X^2 + a'_3X + a'_4 .$$

Pour tout i , a'_i est un élément de $\mathbb{Z}$

$$a'_1 = \mathrm{Tr}(Q(\rho_1)/Q)(\lambda_{11})$$

$$a'_2 = \mathrm{Tr}(Q(\rho_1)/Q)(\lambda_{12}) + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(Q(\rho_1)/Q)(\lambda_{11}))^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Q(\rho_1)/Q)(\lambda_{11}^2) .$$

Nous continuons la démonstration par la méthode indiquée dans la partie A de II .

$\lambda_{11} = \alpha_o + \alpha_1\rho_1$ avec (α_o,α_1) élément de $\mathbb{Q}^2$, $-1 \leq \alpha_1 \leq 1$ et $0 \leq \mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q\, (\lambda_{11}) \leq 2$. $\mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q\, (\lambda_{11})$ est un élément de $\mathbb{Z}$ égal à $2\alpha_o + \alpha_1\, \mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q\, (\rho_1)$.

<u>Si $Q(\rho_1) = Q\sqrt{2}$</u> . $\mathrm{Tr}(Q(\rho_1)/Q)\, (\rho_1) = 0$ et $\mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q\, (\rho_1^2) = 4$ donc $0 \leq \alpha_o \leq 1$ et $\mathrm{Tr}(Q(\rho_1)/Q)\, (\lambda_{11}^2) \leq 6$.

<u>Si $Q(\rho_1) = Q\sqrt{3}$</u> . $\mathrm{Tr}\, Q((\rho_1)/Q)\ (\rho_1) = 0$ et $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\rho_1^2) = 6$ donc $0 \le \alpha_o \le 1$ et $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\lambda_{11}^2) \le 8$.

<u>Si $Q(\rho_1) = Q\sqrt{5}$</u> . $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q)\ (\rho_1) = -1$ et $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\rho_1^2) = 3$ donc $-\frac{1}{2} \le \alpha_o \le \frac{3}{2}$ et $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\lambda_{11}^2) \le \frac{15}{2}$.

<u>Si $Q(\rho_1) = Q\sqrt{13}$</u> . $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\rho_1) = -1$ et $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\rho_1^2) = 7$ donc $-\frac{1}{2} \le \alpha_o \le \frac{3}{2}$ et $\mathrm{Tr}\ Q(\rho_1)/Q\ (\lambda_{11}^2) \le \frac{23}{2}$.

Nous obtenons $0 \le a'_1 \le 2$ et $a'_2 \ge -\frac{9}{2} - \frac{23}{4} + \frac{a'^2_1}{2}$. Par ailleurs, $\psi(X)$ devant avoir 4 racines réelles distinctes, $a'^2_1 - 8a'_2 > 0$ car c'est le premier coefficient de la matrice $M_{\psi(X)}$ définie dans l'énoncé du théorème 2 .

Donc F_1 est engendré sur $\mathbb{Q}$ par une racine d'un polynôme unitaire $\psi(X)$ de $Z[X]$, irréductible dans $Q[X]$, ayant 4 racines réelles distinctes et tel que $\psi(X) = X^4 + a'_1X^3 + a'_2X^2 + a'_3X + a'_4$ avec $(a'_1 = 0$ et $-10 \le a'_2 \le -1)$ ou $(a'_1 = 1$ et $-10 \le a'_2 \le 0)$ ou $(a'_1 = 2$ et $-9 \le a'_2 \le 0)$.

THEOREME 5.- <u>Une extension</u> F_1 <u>totalement réelle de degré</u> 4 <u>sur</u> Q <u>de discriminant inférieur à</u> 5000 <u>est soit</u> $Q(\sqrt{5},\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$, $Q(\sqrt{5},\sqrt{13})$, <u>soit engendrée par une racine d'un polynôme de</u> $Z[X]$, $g(X) = X^4 + a'_1X^3 + a'_2X^2 + a'_3X + a'_4$, <u>irréductible dans</u> $\mathbb{Q}[X]$, <u>ayant</u> 4 <u>racines réelles distinctes et tel que</u> $(a'_1 = 0\ ,\ -10 \le a'_2 \le -1)$ <u>ou</u> $(a'_1 = 1\ ,\ -10 \le a'_2 \le 0)$ <u>ou</u> $(a'_1 = 2\ ,\ -9 \le a'_2 \le 0)$.

Parmi les polynômes tels que $a'_1 = 0$, nous remarquons : $X^4 - 4X^2 + 2$ qui donne l'extension $F_1 = Q(\sqrt{2+\sqrt{2}})$, extension cyclique de degré 4 sur $\mathbb{Q}$, totalement réelle, non ramifiée en dehors de 2 qui a pour discriminant 2048; $X^4 - 5X^2 + 5$ qui donne une extension cyclique de degré 4 sur $\mathbb{Q}$, $F_1 = Q\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)$, de discriminant 2000 ; $X^4 - 7X^2 + X + 9$ qui donne des extensions de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ totalement réelles non galoisiennes de discriminant 4705 .

C) Nous cherchons le discriminant minimum pour les extensions de degré 9 totalement réelles sur Q . Nous connaissons l'extension $Q(\cos\frac{2\pi}{19})$ de discriminant 19^8 . Nous allons donc chercher les corps F_1 dont le discriminant est inférieur à 19^8 , F_1 étant une extension totalement réelle de degré 9 sur Q .

Appliquons le théorème 1 : il existe ρ_1 entier de F_1 , ρ_1 n'appartenant pas à Q tel que

$$0 \leq S(\rho_1) \leq 4$$

et

$$10 \leq S(\rho_1^2) \leq (\frac{\gamma}{9})^{9\ 1/8} \times 19 .$$

Il y a 2 cas possibles : ρ_1 engendre F_1 ou ρ_1 engendre une sous-extension de degré 3 de F_1 .

1) ρ_1 <u>engendre</u> F_1 . Soit $g(X)$ le polynôme minimal de ρ_1 . $g(X)$ est de degré 9 , est unitaire, a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ est irréductible dans $Q(X)$, a 9 racines réelles distinctes et

soit $\begin{cases} a_1 = 0 \\ -17 \leq a_2 \leq -5 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a_1 = 1 \\ -17 \leq a_2 \leq -5 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a_1 = 2 \\ -15 \leq a_2 \leq -3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a_1 = 3 \\ -13 \leq a_2 \leq -1 \end{cases}$

soit $\begin{cases} a_1 = 4 \\ -9 \leq a_2 \leq 3 \end{cases}$.

2) ρ_1 <u>engendre une sous-extension de degré</u> 3 <u>de</u> F_1 . Soit $g(X)$ le polynôme minimal de ρ

$$g(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$$

a_1 , a_2 , a_3 éléments de $\mathbb{Z}$. $g(X)$ irréductible dans $Q[X]$, ayant 3 racines réelles distinctes et

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ -5 \leq a_2 \leq -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ -5 \leq a_2 \leq -2 \end{cases} .$$

D'après le théorème 2, $g(X)$ a 3 racines réelles distinctes si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a_1^2 - 6a_2 & a_1a_2 - 9a_3 \\ a_1a_2 - 9a_3 & 2a_2^2 - 6a_3a_1 \end{vmatrix} > 0$$

alors $\Delta/3 = d^2 S$ avec d entier et S discriminant de $Q(\rho_1)$ sur Q

les cas $\begin{matrix} a_1 = 0 \\ -4 \leq a_2 \leq -2 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} a_1 = 1 \\ -4 \leq a_2 \leq -2 \end{matrix}$ ont été étudiés dans la partie I .

Les résultats sont contenus dans la liste suivante :

polynôme $g(X)$	discriminant de l'extension $Q(\rho_1)$ engendrée par une racine de g
X^3-3X+1	81 cyclique
X^3-4X+1	229
X^3-X^2-2X-1	49 cyclique
X^3+X^2-3X-1	$148 = 4 \times 37$
X^3-4X+2	$148 = 4 \times 37$
X^3+X^2-4X+1	169 cyclique
X^3+X^2-4X-1	321
X^3+X^2-4X-2	4×79
X^3+X^2-4X-3	257
X^3-5X+1	473
X^3-5X+3	257
X^3+X^2-5X+2	229
X^3+X^2-5X+1	$404 = 4 \times 101$
X^3+X^2-5X-1	$148 = 4 \times 37$
X^3+X^2-5X-3	4×141
X^3+X^2-5X-4	469

Quand nous n'avons rien indiqué à droite, $Q(\rho_1)$ est non cyclique sur Q . Nous avons indiqué à droite la décomposition en puissances de nombres premiers distincts. Si G_1 est une extension non cyclique de degré 3 sur Q de clôture galoisienne N , si k est le sous-corps quadratique de N , d le discriminant de k , D le discriminant de G_1

$$D = df^2$$

pour les discriminants de la liste ci-dessus, il y a une seule décomposition possible donc un seul k et un seul N .

Par suite, quand dans la liste précédente 2 polynômes nous donnent le même discriminant, il suffit de garder un seul de ces deux polynômes. Si F_1 est tel que $Q(\rho_1)$ soit engendré par une racine d'un polynôme de la liste précédente, d'après le théorème 4, F_1 est engendré par une racine θ d'un polynôme $\Phi_1(X)$

$$\Phi_1(X) = X^3 + \lambda_{11}X^2 + \lambda_{12}X + \lambda_{13}$$

tel que

$$0 < \frac{2}{3}\,\mathrm{Tr}\,Q(\rho_1)/Q\,(\lambda_{11}^2) - 2\,\mathrm{Tr}\,Q(\rho_1)/Q\,(\lambda_{12}) < \gamma_6\left(\frac{19^4}{3\sqrt{3}\times 7}\right)^{1/3} . \qquad (10)$$

a) <u>Si</u> $Q(\theta)$ <u>est de degré</u> 3 <u>sur</u> Q . Si $Q(\rho_1) = Q(\cos\frac{2\pi}{7})$ nécessairement pour que $Q(\theta,\rho_1)$ soit de degré 9 sur Q le discriminant de $Q(\theta)$ est supérieur ou égal au 2e discriminant minimum pour les extensions de degré 3 totalement réelles, soit 81 . Donc si nous appelons D le discriminant de F_1

$$D \geq (49\times 81)^3 > 19^8$$

si $Q(\rho_1) \neq Q(\cos\frac{2\pi}{7})$ le discriminant de $Q(\rho_1)$ est supérieur ou égal à 81 . Celui de $Q(\theta)$ est supérieur ou égal à 49 et on a le même résultat.

b) <u>Si</u> $Q(\theta)$ <u>est de degré</u> 9 <u>sur</u> Q .

$$\psi(X) = (X^3+\lambda_{11}X^2+\lambda_{12}X+\lambda_{13})(X^3+\lambda_{21}X^2+\lambda_{22}X+\lambda_{23})(X^3+\lambda_{31}X^2+\lambda_{32}X+\lambda_{33})$$

où λ_{ji} est conjugué de $\lambda_{j'i}$ par un endomorphisme de $Q(\rho_1)$ dans $\mathbb{C}$. $\psi(X)$ est le polynôme minimal de θ . $\psi(X)$ est de degré 9, unitaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, irréductible dans $Q[X]$, a 9 racines réelles distinctes

$$\psi(X) = X^9 + a'_1X^8 + a'_2X^7 + a'_3X^6 + a'_4X^5 + a'_5X^4 + a'_6X^3 + a'_7X^2 + a'_8X + a'_9$$

$$a'_1 = \mathrm{Tr}\,Q(\rho_1)/Q\,(\lambda_{11})$$

$$a'_2 = \mathrm{Tr}\,Q(\rho_1/Q)(\lambda_{12}) + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,Q(\rho_1)/Q\,(\lambda_{11}))^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\;Q(\rho_1)/Q\,(\lambda_{11}^2) .$$

Pour que ψ ait 9 racines réelles distinctes, il faut que $a_1'^2 - 18\,a'_2 > 0$. Nous savons que, en remplaçant éventuellement θ par sa somme avec un entier de $\mathbb{Z}$ et par son opposé, on peut supposer que

$$\lambda_{11} = \alpha_o + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_1^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_o, \alpha_1, \alpha_2 \quad \text{élément de} \quad Q$$

$$-\frac{3}{2} < \alpha_1 \leq \frac{3}{2} \quad , \quad -\frac{3}{2} < \alpha_2 \leq \frac{3}{2}$$

et α_o tel que

$$0 \leq \mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}) \leq 4 \ .$$

Pour chaque polynôme $g(X)$ de notre liste, dont une racine définit $Q(\rho_1)$ nous calculons une majoration de $\mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2)$. Avec (10) nous obtenons donc une minoration de a'_2 .

Les résultats sont dans le tableau suivant :

polynôme dont une racine définit $Q(\rho_1)$	discriminant de $Q(\rho_1)$	majoration de $\mathrm{Tr}\, Q(\rho_1)/Q(\lambda_{11}^2)$	minoration de $a'_2 - a'^2_1/2$
$X^3 - 3X + 1$	81	12	-23,95
$X^3 + X^2 - 2X - 1$	49	10	-23,35
$X^3 + X^2 - 3X - 1$	4×37	18	-29,39
$X^3 + X^2 - 4X + 1$	169	36	-46,54
$X^3 + X^2 - 4X - 1$	321	28	-38,04
$X^3 + X^2 - 4X - 2$	4×79	24	-36,20
$X^3 + X^2 - 4X - 3$	257	21	-30,89
$X^3 - 5X + 1$	473	25	-34,44
$X^3 - 4X + 1$	229	18	-28,05
$X^3 + X^2 - 5X + 1$	4×101	47	-56,39
$X^3 + X^2 - 5X - 3$	4×141	32	-43,49
$X^3 + X^2 - 5X - 4$	469	28	-37,44

La majoration de a'_2 est donnée par $a'^2_1 - 18a'_2 > 0$ car $a'^2_1 - 18a'_2$ est le premier coefficient de la matrice M_ψ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERWICK - Integral Bases. Camb. Tracts on Maths, n°22.

[2] CASSELS - An introduction to the geometry of numbers.

[3] COHN - Note on fields of small discriminant. Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), pp. 713-714.

[4] DAVENPORT - The product of n homogeneous linear forms. Indag Math. 8 (1946), pp. 524-541.

[5] GANTMACHER - Théorie des matrices, t.2, Dunod.

[6] GODWIN - The determination of fields of small discriminant with a given subfield. Math. Scand. 6 (1958), pp. 40-46.

[7] HUNTER - The minimum discriminant of quintic fields. Proc. Glasgow Math. Association, vol. III (1957).

[8] KAUR - The minimum discriminant of sixth degree totally real algebric number fields. Journal of the Indian Math. Soc. (1970), pp. 123-134.

[9] LIANG et ZASSENHAUS - The minimum discriminant of sixth degree totally complex algebraic number fields. Journal of number theory, 9 (1977), pp. 16-35.

[10] MARTINET - Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre 2p .

[11] POHST - The minimum discriminant of seventh degree totally real algebraic number fields. Journal of number theory (à paraître).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)