

EVE HELSMOORTEL

Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1971), exp. n° 2, p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1971____A2_0

© Université Bordeaux 1, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT LOCAL DES FONCTIONS CONTINUES
SUR UN COMPACT REGULIER D'UN CORPS LOCAL

par

Eve HELSMOORTEEL

-:-:-:-

Sur un compact régulier M ([1]) contenu dans la boule unité A d'un corps local K , on définit les polynômes d'interpolation Q_n relatifs à une suite u très bien répartie dans M et bien ordonnée; puis, à toute fonction continue f de M dans A , on associe sa série d'interpolation sur la base normale (Q_n) de $\mathcal{C}(M, A)$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$$

et on peut alors, selon l'ordre de croissance des $v(a_n)$, caractériser les fonctions Lipschitziennes et en étudier la dérivabilité.

NOTATIONS

K est un corps local, π une uniformisante, A l'anneau de la valuation, et M un compact régulier contenu dans A :

$$M = \varprojlim M_k, \quad \text{où} \quad M_k = M / \pi^k A,$$

on note $N_k = \text{Card } M_k = q_1 q_2 \dots q_k$.

La suite des entiers q_i étant ainsi définie, tout entier naturel n s'exprime de manière unique sous la forme :

$$n = n_0 + n_1 N_1 + \dots + n_{h-1} N_{h-1}, \quad 0 \leq n_i < q_{i+1} \quad \text{et} \quad n_{h-1} \neq 0.$$

A partir de la suite $\tilde{q} = (q_i)$, on construit l'ensemble $\mathbb{Z}_{\tilde{q}} = \varprojlim \mathbb{Z}/N_k \mathbb{Z}$ sur lequel est défini la valuation $v_{\tilde{q}}$: pour un élément z de $\mathbb{Z}_{\tilde{q}}$:

$$z = z_0 + z_1 N_1 + \dots + z_k N_k + \dots$$

on a $v_{\tilde{q}}(z) = m$ lorsque $z_i = 0$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et $z_m \neq 0$.

Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite très bien répartie dans M (TBR cf. [1]), on dira qu'elle est bien ordonnée (TBR BO) lorsque :

$$v(u_i - u_j) = v_{\tilde{q}}(i-j) v(\pi).$$

On considère alors les polynômes d'interpolation Q_n relatifs à une telle suite u TBR BO :

$$Q_n(x) = \frac{(x-u_0)(x-u_1)\dots(x-u_{n-1})}{(u_n-u_0)(u_n-u_1)\dots(u_n-u_{n-1})} = \frac{P_n(x)}{P_n(u_n)}$$

et on associe à une fonction f continue de M dans A sa série d'interpolation :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x).$$

1. - FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

On avait démontré (cf. [3] et [4]) le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. - S'il existe C tel que $v(a_n) \geq (C+h) v(\pi)$ pour $N_{h-1} \leq n < N_h$, alors :

$$v(f(x) - f(y)) \geq (1+C) v(\pi) + v(x-y)$$

pour tout couple (x, y) de points de M .

En généralisant à $\mathcal{C}(M, A)$ une démonstration de Y. Amice et J. Fresnel [2], on obtient la proposition :

PROPOSITION 1.2. - S'il existe un entier $m > 0$ tel que :

$$v(f(x)-f(y)) \geq v(x-y) - m v(\pi), \quad \forall x, \forall y \in M,$$

alors :

$$\forall h \geq 0, \forall n \geq N_{m+h} \quad v(a_n) \geq h v(\pi).$$

Démonstration : Soit $E_0 = \mathcal{C}(M, A)$, $\bar{E} = E_0 / \pi E_0$; à tout f appartenant à E_0 on fait correspondre \bar{f} appartenant à \bar{E} : pour $x \in M$, $\bar{f}(x) = \overline{f(x)} \in A/\pi A$. On note \bar{E}_h le sous-espace vectoriel des fonctions de \bar{E} constantes sur les boules d'ordre h .

Ici, si $v(x-y) \geq (m+1) v(\pi)$, $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$, donc \bar{f} appartient à \bar{E}_{m+1} . Or $(\bar{Q}_n)_{0 \leq n < N_{m+1}}$ est une base de \bar{E}_{m+1} , donc il existe des constantes a_i^0 appartenant à A et telles que :

$$f(x) = \sum_{0 \leq i < N_{m+1}} a_i^0 Q_i(x) + \pi f_1(x),$$

où f_1 appartient à $\mathcal{C}(M, A)$.

On avait démontré (cf. [3] et [4]) que :

$$\text{pour } N_{h-1} \leq n < N_h : v(Q_n(x) - Q_n(y)) \geq v(x-y) + (1-h) v(\pi).$$

On en déduit alors que \bar{f}_1 appartient à \bar{E}_{m+2} , et donc :

$$f_1(x) = \sum_{0 \leq i < N_{m+2}} a_i^1 Q_i(x) + \pi f_2(x), \quad f_2 \in \mathcal{C}(M, A).$$

On démontre ainsi, par récurrence sur h , que :

$$\begin{aligned} \forall h \geq 0 \quad f(x) = & \sum_{0 \leq i < N_{m+1}} a_i^0 Q_i(x) + \pi \sum_{0 \leq i < N_{m+2}} a_i^1 Q_i(x) + \dots \\ & + \pi^h \sum_{0 \leq i < N_{m+1+h}} a_i^h Q_i(x) + \pi^{h+1} f_{h+1}(x) \end{aligned}$$

où f_{h+1} appartient à $\mathcal{C}(M, A)$.

$$f_{h+1}(x) = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(x)$$

et, si $n \geq N_{m+h}$: $a_n = \pi^h \cdot a_n^h + \pi^{h+1} b_n$,

donc $v(a_n) \geq h v(\pi)$; et la proposition 1.2. est démontrée.

Si, pour un entier $n \geq 1$, on note $h(n)$ l'entier tel que :

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)}$$

on vérifie alors que, si l'hypothèse de 1.2. est réalisée :

$$v(a_n) - h(n) v(\pi) \geq -m v(\pi) \quad \forall n \geq 1,$$

et on en déduit le théorème suivant :

THEOREME 1.3. - Pour que f soit Lipschitzienne dans M , il faut et il suffit qu'il existe C tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad v(a_n) - h(n) v(\pi) \geq C,$$

où $h(n)$ est tel que :

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)}.$$

2. - DERIVABILITE DE f EN UN POINT u_i DE LA SUITE u

L'application $\varphi_i : x \rightarrow \frac{f(x) - f(u_i)}{x - u_i}$ est définie et continue dans $M - \{u_i\}$.

On remarque que :

Pour que $f'(u_i)$ existe il faut et il suffit que l'application φ_i soit prolongeable continuellement à M .

Considérons la suite $u^{i+1} = (u_n^{i+1})_{n \geq 0}$ où $u_n^{i+1} = u_{i+1+n}$. La suite u étant TBRBO il en est de même de la suite u^{i+1} . A cette suite u^{i+1} on associe les polynômes :

$$P_n^{i+1}(x) = (x-u_0^{i+1}) \dots (x-u_{n-1}^{i+1})$$

et

$$Q_n^{i+1}(x) = \frac{P_n^{i+1}(x)}{P_n^{i+1}(u_n^{i+1})}$$

les polynômes Q_n^{i+1} constituent une base normale de $\mathcal{C}(M, K)$, et on remarque que :

$$\text{pour } n \geq i+1 : Q_n(x) = \frac{P_i(x) - (x-u_i)}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} \cdot Q_{n-i-1}^{i+1}(x).$$

Pour $x \neq u_i$ on obtient :

$$\varphi_i(x) = \frac{f(x) - f(u_i)}{x - u_i} = \sum_{n=1}^i a_n \cdot \frac{Q_n(x) - Q_n(u_i)}{x - u_i} + \sum_{n \geq i+1} a_n \cdot \frac{Q_n(x)}{x - u_i}.$$

Soit :

$$\varphi_i(x) = R_i(x) + P_i(x) \cdot \sum_{n \geq i+1} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} Q_{n-i-1}^{i+1}(x)$$

en notant $R_i(x)$ le polynôme de degré au plus égal à $i-1$:

$$R_i(x) = \sum_{n=1}^i a_n \cdot \frac{Q_n(x) - Q_n(u_i)}{x - u_i}$$

$$R_i(u_i) = \sum_{n=1}^i a_n Q'_n(u_i).$$

Pour x n'appartenant pas à $\{u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i\}$, on définit la fonction ψ_i par :

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x) - R_i(x)}{P_i(x)}$$

et on a vu que :

$$\psi_i(x) = \sum_{n \geq i+1} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} Q_{n-i-1}^{i+1}(x)$$

pour $x \notin \{u_0, \dots, u_i\}$.

Cette fonction ψ^i est définie en tous les points de la suite u^{i+1} , et ses coefficients d'interpolation sur cette suite sont :

$$k \geq 0 : \quad \alpha_k^i = \frac{a_{k+i+1}}{(u_{k+i+1} - u_0) \dots (u_{k+i+1} - u_i)}$$

puisque

$$\psi_i(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^i Q_k^i(x).$$

Si $\alpha_k^i \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, alors (cf [1]) ψ_i est prolongeable continûment à M en une fonction $\tilde{\psi}_i$:

$$\tilde{\psi}_i(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^i Q_k^i(x), \quad x \in M$$

ceci est réalisé lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} = 0.$$

Or : $\varphi_i(x) = R_i(x) + P_i(x) \psi_i(x)$ si $x \notin \{u_0, \dots, u_i\}$, φ_i est donc prolongeable continûment à M , et $f'(u_i)$ existe :

$$f'(u_i) = R_i(u_i) + P_i(u_i) \tilde{\psi}_i(u_i)$$

$$P_i(u_i) \cdot \tilde{\psi}_i(u_i) = \sum_{n \geq i+1} \alpha_{n-i-1}^i P_i(u_i) \cdot Q_{n-i-1}^{(i+1)}(u_i)$$

mais :

$$\alpha_{n-i-1}^i \cdot P_i(x) \cdot Q_{n-i-1}^{(i+1)}(x) = a_n \cdot \frac{Q_n(x)}{x - u_i},$$

donc :

$$\alpha_{n-i-1}^i P_i(u_i) Q_{n-i-1}^{(i+1)}(u_i) = a_n \cdot Q'_n(u_i)$$

et :

$$f'(u_i) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot Q'_n(u_i).$$

On peut remarquer que : si $\frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, il en est de même pour

$$\frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_j)}, \quad \text{si } 0 \leq j \leq i$$

et donc les $f'(u_j)$ existent aussi.

PROPOSITION 2.1. - Si pour un entier $i \geq 0$ fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} = 0$
alors $f'(u_0), f'(u_1) \dots$ et $f'(u_i)$ existent et de plus

$$f'(u_j) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot Q'_n(u_j) \quad 0 \leq j \leq i .$$

Inversement : si $f'(u_j)$ existe pour $0 \leq k \leq i$: $f'(u_i)$ existe $\Leftrightarrow \varphi_i$ prolongea-
 ble continûment à M ; $f'(u_j)$ existe, $0 \leq j < i$, $\Leftrightarrow \varphi_i$ dérivable au point u_j .

. Donc : $\lim_{x \rightarrow u_i} \varphi_i(x)$ existe, comme $P_i(u_i)$ est non nul, on en déduit
 d'après la définition de ψ_i que $\lim_{x \rightarrow u_i} \psi_i(x)$ existe.

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x) - R_i(x)}{P_i(x)} = \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(u_j)}{(x - u_0) \dots (x - u_j) \dots (x - u_{i-1})} - \frac{R_i(x) - R_i(u_j)}{(x - u_0) \dots (x - u_j) \dots (x - u_{i-1})}$$

car $\varphi_i(u_j) = R_i(u_j)$ pour $0 \leq j < i$.

$\lim_{x \rightarrow u_j} \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(u_j)}{x - u_j}$ et $\lim_{x \rightarrow u_j} \frac{R_i(x) - R_i(u_j)}{x - u_j}$ existent, donc $\lim_{x \rightarrow u_j} \psi_i(x)$ existe

pour $0 \leq j < i$.

Par conséquent ψ_i est prolongeable continûment à M , ce qui implique
 (cf [1]) que ses coefficients d'interpolation α_k^i sur la suite u^{i+1} tendent
 vers zéro lorsque k tend vers l'infini, et ceci est équivalent à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} = 0 .$$

Conclusion :

THEOREME 2.2. - L'entier naturel i étant fixé, les deux propriétés sui-
vantes sont équivalentes :

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} = 0$$

et

$$(b) \quad f'(u_0), f'(u_1) \dots \text{ et } f'(u_i) \text{ existent.}$$

Dans ces conditions :

$$f'(u_j) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot Q'_n(u_j) \quad 0 \leq j \leq i .$$

Etudions la condition (a) :

$$v\left(\frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)}\right) = v(a_n) + v(\pi) \cdot \{v_q((n-i-1)!) + v_q(i!) - v_q(n!)\} - v_q(i!) v(\pi).$$

D'après un lemme précédemment démontré ([3] et [4]) on sait que :

$$v_q((n-i-1)!) + v_q(i!) - v_q(n!) \geq 1 - h(n).$$

Par conséquent :

PROPOSITION 2.3. - Si $v(a_n) - h(n)v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , f est dérivable en tous les points de la suite u .

Remarques

1) Si f est dérivable en tous les points de la suite u , les coefficients d'interpolation a'_r de f' sur cette suite sont définis :

$$a'_r = P_r(u_r) \cdot \sum_{k=r}^r \frac{f'(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}.$$

D'après ce qui précède, puisque $f'(u_k)$ existe pour tout k :

$$f'(u_k) = \sum_{n \geq 1} a_n Q'_n(u_k)$$

et

$$a'_r = \sum_{n \geq 1} a_n \beta_r^n$$

avec

$$\beta_r^n = P_r(u_r) \sum_{k=0}^r \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)},$$

β_r^n est aussi le $r+1^e$ coefficient d'interpolation sur la suite u du polynôme Q'_n de degré $n-1$, donc $\beta_r^n = 0$ si $r > n-1$ et ainsi :

$$a'_r = \sum_{n > r} a_n P_r(u_r) \sum_{k=0}^r \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}$$

$$v\left(\frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_k)}\right) = v(\pi) v_q\left(\frac{r!}{k!(r-k)!}\right) \geq 0$$

$$v(Q'_n(u_k)) = v(\pi) \{v_q(k!) + v_q((n-k-1)!) - v_q(n!)\} \geq (1-h(n))v(\pi)$$

donc :

$$v(\beta_r^n) \geq (1-h(n)) v(\pi)$$

et
$$v(a'_r) \geq \inf_{n>r} (v(a_n) + (1-h(n)) v(\pi)) . \quad 2.4$$

2) Etude de $Q'_n(x)$

Si $i < n$,

$$Q'_n(u_i) = \frac{(u_i - u_0) \dots (u_i - u_{i-1})(u_i - u_{i+1}) \dots (u_i - u_{n-1})}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_{n-1})}$$

$$v(Q'_n(u_i)) = v(\pi) \cdot \{v_q(i!) + v_q((n-i-1)!) - v_q(n!)\} \geq (1-h(n)) v(\pi)$$

et l'égalité est réalisée si et seulement si " i est bon pour n " ([3] et [4]).

Si $x \notin \{u_0, \dots, u_{i-1}\}$,

$$Q'_n(x) = Q_n(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x - u_i} .$$

On avait défini $N'(x, n) = \sup_{i < n} \frac{v(x - u_i)}{v(\pi)}$ ([3] et [4]), alors :

$$v\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x - u_i}\right) \geq -N' v(\pi) .$$

D'autre part on avait vu ([3] et [4]) que :

$$v(Q_n(x)) \geq \{N' + (1-h(n))\} v(\pi)$$

on en déduit donc que :

$$v(Q'_n(x)) \geq (1-h(n)) v(\pi) , \quad x \notin \{u_0, \dots, u_{i-1}\} ,$$

et par conséquent :

$$2.5. \quad \inf_{x \in M} \{v(Q'_n(x))\} = (1-h(n)) v(\pi) = \min_{0 \leq r \leq n-1} v(\beta_r^n) .$$

3) Si $v(x-y) \geq \{h(n)-1\} v(\pi)$, d'après [3] et [4] :

$$v\left(\frac{Q_n(x) - Q_n(y)}{x - y}\right) \geq (1-h(n)) v(\pi) ;$$

si $v(x-y) < \{h(n)-1\} v(\pi)$,

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) \geq 0 > v(x-y) + (1-h(n)) v(\pi)$$

donc :

$$2. 6. \quad \forall x \forall y \in M \quad v\left(\frac{Q_n(x) - Q_n(y)}{x - y}\right) \geq (1-h(n)) v(\pi)$$

l'égalité pouvant être réalisée ([3] et [4]), c'est-à-dire que :

$$\inf_{(x,y) \in M^2} \left(v\left(\frac{Q_n(x) - Q_n(y)}{x - y}\right) \right) = (1-h(n)) v(\pi).$$

4) On peut aussi étudier $Q_n^{(k)}(x)$:

si $x \notin \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$,

$$Q_n^{(k)}(x) = Q_n(x) \cdot \Sigma_k \quad \text{où} \quad \Sigma_k = \sum_{\substack{\text{pour } (x-u_{i_1}) \dots (x-u_{i_k}) \\ i_1 \dots i_k \\ \text{tous différents} \in \{0, \dots, n-1\}}} \frac{1}{(x-u_{i_1}) \dots (x-u_{i_k})}$$

$$v(\Sigma_k) \geq -k N' v(\pi)$$

$$v(Q_n(x)) \geq (N'+1-h(n)) v(\pi).$$

On avait posé $\rho = \inf \{j, v(x-u_j) = N' v(\pi)\}$ ([3] et [4]) si $N' = h(n)-1$,

$$v(Q_n^{(k)}(x)) \geq k(1-h(n)) v(\pi);$$

si $N' \geq h(n)$, alors :

$$v(x-u_\rho) = N' v(\pi)$$

$$\text{et} \quad \forall i \neq \rho, \quad v(x-u_i) \leq (h-1) v(\pi) \\ 0 \leq i < n$$

$$\text{et :} \quad v((x-u_\rho)(x-u_{i_1}) \dots (x-u_{i_{k-1}})) \leq \{N'+(k-1)(h-1)\} v(\pi)$$

$$i_j \neq \rho : \quad v((x-u_{i_1}) \dots (x-u_{i_k})) \leq k(h-1) v(\pi).$$

D'où :

$$v(\Sigma_k) \geq \{-N' + (k-1)(1-h(n))\} v(\pi)$$

et
$$v(Q_n^{(k)}(x)) \geq k(1-h(n)) v(\pi).$$

Cette inégalité est conservée en $x = u_i$. Donc :

$$2.7. \quad \inf_{x \in M} v(Q_n^{(k)}(x)) \geq k(1-h(n)) v(\pi).$$

On déduit de ces remarques que :

2.8. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $v(a_n) - h(n) v(\pi) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$;
- (ii) $a_n Q'_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, uniformément par rapport à x appartenant à M ; c'est-à-dire que la série $\sum_{n \geq 1} a_n Q'_n(x)$ est uniformément convergente sur M ;
- (iii) la famille $(a_n Q'_n(u_i))_{\substack{n, i \\ i < n}}$ est sommable ;
- (iv) la famille $(a_n \beta_r^n Q_r(x))_{r < n}$ est uniformément sommable sur M .

(i) \Leftrightarrow (ii) d'après 2.5.

Comme $v(Q'_n(u_i)) = (1-h(n)) v(\pi)$ lorsque " i est bon pour n ", (i) \Leftrightarrow (iii).

(i) \Leftrightarrow (iv) car :
$$\inf_{\substack{r < n \\ x \in M}} v(a_n \beta_r^n Q_r(x)) = v(a_n) + (1-h(n)) v(\pi)$$

en raison de 2.5. et du fait que $\inf_{x \in M} Q_r(x) = 0$ ([3] et [4]).

3. - DERIVABILITE DE f EN UN POINT x_0 DE M , $x_0 \notin u$

L'application $\Phi_{x_0} : z \rightarrow \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$ est définie et continue dans

$M - \{x_0\}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f'(x_0)$ existe est que l'application Φ_{x_0} soit prolongeable continûment à M .

Cette application Φ_{x_0} est définie en tous les points de la suite u ; on peut donc construire les coefficients d'interpolation $a_n(x_0)$ de $\Phi(x_0)$ sur la suite u :

$$a_n(x_0) = P_n(u_n) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{f(u_k) - f(x_0)}{(u_k - x_0) P'_{n+1}(u_k)} .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_{x_0} soit prolongeable continûment à M est que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x_0) = 0$ ([1]) ; et c'est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $f'(x_0)$ existe.

$$a_n(x_0) = \sum_{i \geq 1} a_i \cdot P_n(u_n) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{Q_i(u_k) - Q_i(x_0)}{(u_k - x_0) \cdot P'_{n+1}(u_k)}$$

$a_n^i(x_0) = P_n(u_n) \sum_{k=0}^n \frac{Q_i(u_k) - Q_i(x_0)}{(u_k - x_0) P'_{n+1}(u_k)}$ est le $n+1^e$ coefficient d'interpolation

sur la suite u du polynôme $\frac{Q_i(u_k) - Q_i(x_0)}{u_k - x_0}$ de degré $i-1$, donc $a_n^i(x_0) = 0$ si $n \geq i$, et par suite :

$$a_n(x_0) = \sum_{i > n} a_i a_n^i(x_0)$$

mais d'après 2.6.

$$v(a_n^i(x_0)) \geq (1 - h(i)) v(\pi) ,$$

donc :

$$v(a_n(x_0)) \geq \text{Inf} \{ v(a_i) + (1 - h(i)) v(\pi) \} .$$

Conclusion :

3.1. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable au point x_0 est que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x_0) = 0$.

Une condition suffisante est que $v(a_i) - h(i) v(\pi)$ tende vers l'infini avec i .

En comparant avec 2.3. on en déduit que :

3.2. Si $v(a_n) - h(n) v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , ou si l'une des conditions 2.8. est réalisée, f est dérivable dans M .

4. - FONCTIONS UNIFORMEMENT DERIVABLES DANS M

DEFINITION. - f uniformément dérivable dans M : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ tel que
 $\forall x \in M \forall z \in M$ tels que $|z-x| < \delta(\varepsilon)$, on ait :

$$\left| \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - f'(x) \right| < \varepsilon .$$

Si f est uniformément dérivable dans M , alors f' est continue dans M .

En effet :

$$|z-x| < \delta(x), z, x \in M \Rightarrow |f'(z) - f'(x)| < \varepsilon .$$

Soit alors $f \in \mathcal{C}(M, A)$. L'application φ :

$$(z, x) \rightarrow \varphi(z, x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

est définie et continue dans $M \times M - \Delta$, si $\Delta = \{(x, x), x \in M\}$.

La propriété : f est dérivable au point x est équivalente à :
la limite de $\varphi(z, x)$ lorsque z tend vers x existe.

PROPOSITION 4.1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément dérivable dans M est que l'application φ

$$x \neq z, (z, x) \rightarrow \varphi(z, x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

soit prolongeable continûment à $M \times M$.

- Si f est uniformément dérivable dans M , considérons le prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ à $M \times M$ défini par :

$$\tilde{\varphi}(z, x) = \varphi(z, x) \quad z \neq x$$

$$\tilde{\varphi}(x, x) = f'(x)$$

$\tilde{\varphi}$ est continue dans $M \times M - \Delta$. En un point (x_0, x_0) de Δ :

$$\tilde{\varphi}(z, x) - \tilde{\varphi}(x_0, x_0) = \tilde{\varphi}(z, x) - f'(x) + f'(x) - f'(x_0)$$

si $z = x$ on obtient $f'(x) - f'(x_0)$.

Si $|x-x_0| < \delta(\varepsilon)$ et si $|z-x_0| < \delta(\varepsilon)$, alors $|\tilde{\varphi}(z, x) - \tilde{\varphi}(x_0, x_0)| < \varepsilon$.

$\tilde{\varphi}$ est donc continue dans $M \times M$.

- Si φ est prolongeable continûment à $M \times M$; alors $\tilde{\varphi}(x, x) = f'(x)$
 f' est alors définie et continue dans M :

$$\tilde{\varphi}(z, x) - \tilde{\varphi}(x, x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - f'(x)$$

$\tilde{\varphi}$ est uniformément continue sur $M \times M$ et donc f est uniformément dérivable dans M .

Recherche de conditions pour que f soit uniformément dérivable

La suite $(u_n, u_r)_{\substack{n \geq 0 \\ r \geq 0}}$ est TBR dans $M \times M$ et les polynômes $Q_n(x), Q_r(z)$ constituent une base normale de $\mathcal{C}(M \times M, K)$ ([1]); c'est-à-dire que :

$$\text{si } F \in \mathcal{C}(M \times M, K), \quad F(z, x) = \sum_{n, r} \lambda_{n, r} Q_n(x) Q_r(z)$$

$$\text{où : } \lambda_{n, r} = P_n(u_n) \cdot P_r(u_r) \cdot \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{F(u_k, u_m)}{P'_{r+1}(u_k) P'_{n+1}(u_m)}$$

L'application φ est en particulier définie aux points (u_i, u_j) pour $i \neq j$.
Elle est prolongeable continûment aux points (u_i, u_i) , $i \geq 0$, si et seulement si f est dérivable en tous les points u_i , c'est-à-dire si et seulement si :

$$\text{pour chaque } i \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} = 0.$$

Supposons qu'il en soit ainsi; φ est alors définie en tous les points (u_k, u_m) et on peut considérer ses coefficients d'interpolation $\lambda_{n, r}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,r} &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \cdot \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_k)} \cdot \frac{f(u_k) - f(u_m)}{u_k - u_m} \\
&= \sum_{j \geq 1} a_j \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \cdot \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_k)} \cdot \frac{Q_j(u_k) - Q_j(u_m)}{u_k - u_m} \right) \\
&= \sum_{j \geq 1} a_j \lambda_{n,r}^j.
\end{aligned}$$

$\lambda_{n,r}^j$ est le coefficient d'interpolation de rang (n, r) relativement à la suite (u_n, u_r) pour le polynôme :

$$(z, x) \rightarrow \frac{Q_j(z) - Q_j(x)}{z - x}$$

avec $(x, x) \rightarrow Q'_j(x)$.

On en déduit d'abord que $\lambda_{n,r}^j = 0$ si $j \leq n+r$.

Si $j > n+r$, pour $k \neq m$, $0 \leq k \leq r$ $Q_j(u_k) = 0$ car $j > k$
 $0 \leq m \leq n$ $Q_j(u_m) = 0$ car $j > n$,

donc, pour $j > n+r$:

$$\lambda_{n,r}^j = \sum_{0 \leq m \leq \inf(r, n)} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_m)} Q'_j(u_m)$$

et ainsi :

$$\lambda_{n,r} = \sum_{j > n+r} a_j \lambda_{n,r}^j.$$

Pour que φ soit prolongeable continûment à $M \times M$, il faut et il suffit ([1]) que : $\lambda_{n,r} \rightarrow 0$ quand $\sup(n, r) \rightarrow +\infty$.

Conclusion :

4. 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément dérivable dans M est que :

(1) pour chaque $i \geq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(u_n - u_0) \dots (u_n - u_i)} = 0$

et

(2) $\lambda_{n,r} \rightarrow 0$ quand $\sup(n,r) \rightarrow +\infty$.

$$\lambda_{n,r} = \sum_{j > n+r} a_j \left(\sum_{0 \leq m \leq \inf(r,n)} \frac{P_n(u_n)}{P'_{n+1}(u_m)} \cdot \frac{P_r(u_r)}{P'_{r+1}(u_m)} Q'_j(u_m) \right)$$

$$v(\lambda_{n,r}^j) \geq \inf_{m \leq \inf(n,r)} v(Q'_j(u_n)) \geq \{1-h(j)\} v(\pi)$$

Si l'une des conditions 2.8. est réalisée, f est uniformément dérivable dans M . Dans ce cas étudions la dérivée $f'(x)$; on a vu que les coefficients d'interpolation a'_r de f' sur la suite u sont :

$$a'_r = \sum_{n > r} a_n \beta_r^n, \quad \beta_r^n = P_r(u_r) \sum_{k=0}^r \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}$$

avec $Q'_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_r^n Q_r(x)$, et :

$$f'(x) = \sum_{r \geq 0} a'_r Q_r(x) = \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{n > r} a_n \beta_r^n \right) \cdot Q_r(x)$$

Les conditions 2.8. étant réalisées la famille $(a_n \beta_r^n Q_r(x))_{n,r}$ est uniformément sommable et donc :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n Q'_n(x)$$

THEOREME 4.3. - Soit $f \in \mathcal{C}(M,A)$ et $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$ sa série d'interpolation sur une suite TBR BO dans M , si pour $n \geq 1$ on note $h(n)$ l'entier tel que :

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)}$$

Si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- 2.8. (i) $v(a_n) - h(n) v(\pi) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$
- (ii) $a_n Q'_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, uniformément par rapport à $x \in M$

(iii) la famille $(a_n Q'_n(u_i))_{0 \leq i < n}$ est sommable

(iv) la famille $(a_n \beta_r^n Q_r(x))_{r < n}$ est uniformément sommable sur M ,

$$\beta_r^n = P_r(u_r) \sum_{k=0}^r \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)}$$

alors f est uniformément dérivable dans M , et :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n Q'_n(x) = \sum_{r \geq 0} a'_r Q_r(x)$$

$$a'_r = \sum_{n > r} a_n \beta_r^n = \sum_{n > r} a_n \cdot \left(\sum_{k=0}^r \frac{Q'_n(u_k)}{P'_{r+1}(u_k)} \right).$$

5. - DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

$$v(a'_r) \geq \inf_{n > r} \{v(a_n) - h(n) v(\pi)\}.$$

si $v(a_n) - mh(n)v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , pour m entier ≥ 2 , alors $v(a'_r) - (m-1)h(r)v(\pi)$ tend vers l'infini avec r et f' est uniformément dérivable dans M .

Par récurrence sur m on obtient le résultat suivant :

5.1. Si $v(a_n) - mh(n)v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , alors f est m fois dérivable, et $f, f', \dots, f^{(m-1)}$ sont uniformément dérivables dans M .

6. - CAS PARTICULIER : SI M EST TEL QUE $q_i = q \quad \forall i \geq 1$

Alors pour un entier positif n : $h(n) - 1 = \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } q} \right]$; posons :

$$D = - \frac{\text{Log } |\pi|}{\text{Log } q}$$

$$|x| = |\pi|^{v(x)/v(\pi)}$$

$$v(a_n) - h(n) \cdot v(\pi) \geq c \cdot v(\pi) \Leftrightarrow v(a_n) - \frac{\text{Log } n}{\text{Log } q} v(\pi) \geq c' v(\pi)$$

$$\Leftrightarrow |a_n| \cdot n^D \leq K'.$$

On en déduit l'expression suivante des résultats précédents :

$${}_n^D |a_n| \leq K' \Leftrightarrow f \text{ Lipschitzienne dans } M$$

$${}_n^D |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow f \text{ uniformément dérivable}$$

$${}_n^{mD} |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow f \text{ m fois uniformément dérivable.}$$

Exemples :

1) Si K est une extension algébrique de \mathbb{Q}_p de degré S , et si on normalise la valeur absolue par :

$$|\pi| = \left(\frac{1}{p}\right)^{1/e} \quad e \text{ indice de ramification}$$

$$q = p^f, \quad D = -\frac{\text{Log } |\pi|}{\text{Log } q} = \frac{1}{ef} = \frac{1}{S}.$$

2) Si $K = \mathbb{Q}_p$ et si la valuation est normalisée par $|\pi| = \frac{1}{p}$, alors pour $M = \mathbb{Z}_p$, $q = p$, $D = 1$.

Lorsqu'on prend comme suite u la suite des entiers naturels : $u_n = n$ on retrouve les résultats de K. Mahler ([8]) :

$$a'_r = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a_{n+r}.$$

D'autre part d'après [5] et J. Hily ([7]) :

$$\frac{f(x+y+1) - f(x)}{y+1} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ r \geq 0}} \frac{a_{n+1+r}}{n+1} Q_r(x) \cdot Q_n(y);$$

une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément dérivable est que l'application :

$$(x, y) \rightarrow \frac{f(x+y+1) - f(x)}{y-1}$$

soit continûment prolongeable à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, et pour cela il faut et il suffit que :

$$\frac{a_{n+r}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \sup(n, r) \rightarrow +\infty.$$

Si $v(a_n) - h(n) \rightarrow +\infty$ ceci est réalisé.

Si $\frac{a_{n+r}}{n} \rightarrow 0$ quand $\sup(n, r) \rightarrow +\infty$, considérons :

$$n(h) = \inf \{n, p^{h-1} \leq n < p^h, v(a_{n(h)})_{p^{h-1} \leq n < p^h} = \inf_{p^{h-1} \leq n < p^h} v(a_n)\},$$

alors :

$$\frac{a_{n(h)}}{p^{h-1}} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty,$$

$$v(a_{n(h)}) - h \rightarrow +\infty \text{ avec } h,$$

et par conséquent $v(a_n) - h(n) \rightarrow +\infty$ avec n ; ce qui est équivalent à :

$$n |a_n| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

En récapitulant les résultats obtenus pour \mathbb{Z}_p :

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p), f(x) = \sum a_n \binom{x}{n},$$

$$n |a_n| \leq K \Leftrightarrow f \text{ Lipschitzienne dans } \mathbb{Z}_p,$$

$$n |a_n| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow f \text{ uniformément dérivable dans } \mathbb{Z}_p,$$

$$m \geq 2, n^m |a_n| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow f \text{ } n \text{ fois uniformément dérivable dans } \mathbb{Z}_p.$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. AMICE. - Bull. Soc. Math. Fr., 92, 1964, p. 117-180.
(Thèse Math, Paris, 1963).
- [2] Y. AMICE et J. FRESNEL. - Fonctions zêta p-adique des corps de nombres abéliens et formule des résidus pour le nombre de classes d'idéaux (Acta Arithmetica 20, n° 4).
- [3] E. HELSMOORTEL. - Module de continuité de polynômes d'interpolation. Application à l'étude du comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C.R.A.S., 268, série A, 1969, p. 1168-1171.

- [4] E. HELSMOORTEL. - Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1968/69, n° 10.
- [5] E. HELSMOORTEL. - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C. R. A. S. 271, série A, 1970, p. 546.
- [6] E. HELSMOORTEL. - Module de continuité des polynômes binomiaux dans \mathbb{Z}_p , application aux fonctions continues sur \mathbb{Z}_p . Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, exposé^pn° 5, 1968-69.
- [7] J. HILY. - Comptes Rendus Académie des Sciences, 256, 1963, p. 2985.
- [8] K. MAHLER. - J. Reine Angew. Math. 199, 1958, p. 23-34.

-:-:-