SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

FRANCINE DELMER

Problème de diviseurs

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 22, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A22_0>

PROBLEME DE DIVISEURS

par

Francine DELMER

-:-:-:-

§ 1. - INTRODUCTION

On considère un polynôme $f(x)$, irréductible, de degré m à coefficients entiers. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un nombre entier positif n. On supposera que $f(k) > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Le but de ce papier est d'étudier la somme

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s$$

s étant un nombre entier positif. On posera $2^s - 1 = \ell$.

Plusieurs résultats sont déjà connus :

Ramanujan [5] a montré que

$$\sum_{k \leq x} [d(k)]^s \sim K x (\operatorname{Log} x)^{\ell} .$$

Van der Corput [6] donne l'estimation suivante :

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s = O(x (\operatorname{Log} x)^{\ell^s})$$

où ℓ_s est une constante dépendant de s , non précisée.

Enfin Erdös [1] , énonce le résultat suivant :

Il existe deux constante positives c_1 et c_2 telles que

$$c_1 x(\operatorname{Log} x) < \sum_{k \leq x} d[f(k)] < c_2 x (\operatorname{Log} x) , \quad x \geq 2 .$$

La démonstration d'Erdös est cependant incomplèt e ; en effet, le lemme 5 de son article, bien que très vraisemblable, n'est pas démontré (Erdös utilise une estimation de $\rho(n)$ en dehors des limites pour lesquelles cette estimation a été démontrée) ; il est à noter que le lemme 5 impliquerait le résultat suivant (conjecturé par Nagell) : si f est un polynôme irréductible à coefficients entiers, et s'il existe un nombre entier n tel que $f(n)$ soit quadatfrei, alors il existe une infinité de tels n .

En fait il est possible de montrer ce résultat en remplaçant le lemme 5 d'Erdös par un résultat plus faible (notre lemme 5).

Il est également possible, par la même méthode, de préciser la constante ℓ_s intervenant dans le résultat de Van der Corput, en montrant que $\ell_s = 2^s - 1$, résultat à rapprocher de celui de Ramanujan relatif au cas $f(x) = x$.

THEOREME. Il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que pour $x \geq 2$

$$(1) \qquad c_1 x (\operatorname{Log} x)^{\ell} < \sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s < c_2 x (\operatorname{Log} x)^{\ell} .$$

On a posé $2^s - 1 = \ell$, et les nombres $c_1, c_2, \ldots, c_k$ qui interviendront sont des constantes positives indépendantes de x , qui peuvent dépendre de f et de s .

§ 2. - BORNE SUPERIEURE

Nous allons tout d'abord montrer l'existence de la borne supérieure, et pour cela établir un certain nombre de lemmes préliminaires.

LEMME 1.
$$\sum_{k=1}^{k=x} \{ d[f(k)]\}^{2s} < x (\operatorname{Log} x)^{c_3} .$$

Le résultat est dû à Van der Corput (1939).

LEMME 2. <u>Soient</u> $k_1, k_2, \ldots, k_t$, <u>des nombres entiers positifs distincts, inférieurs ou égaux à</u> x, <u>et supposons que</u> $t < x(\operatorname{Log} x)^{-c_3}$, <u>alors</u>

$$\sum_{i=1}^{i=t} \{d[f(k_i)]\}^{s} < x .$$

Ceci résulte du lemme 1 en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\sum_{i=1}^{i=t} \{d[f(k_i)]\}^{s} \leq t^{\frac{1}{2}} [\sum_{i=1}^{i=t} \{d[f(k_i)]\}^{2s}]^{\frac{1}{2}} < x .$$

On appelle $\rho(a)$ le nombre de solutions de $f(k) \equiv 0 \ [a]$, $0 \leq k < a$. Soit D le discriminant de $f(x)$. Si p est un nombre premier, on note $p^{\sigma} \| D$ pour exprimer que p^{σ} est la plus grande puissance de p divisant D.

LEMME 3. <u>On a les résultats suivants concernant</u> ρ

α) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ <u>si</u> $(a,b) = 1$;

β) $\rho(p^{\alpha}) \leq m$ <u>si</u> $p \nmid D$

γ) $\rho(p^{\alpha}) = (p^{2\sigma+1})$ <u>si</u> $p^{\sigma} \| D$ <u>et</u> $\alpha > 2\sigma$

δ) $\rho(p^{\alpha}) \leq c_4$ <u>toujours vérifié.</u>

Les deux premiers résultats sont connus, γ) a été démontré par Nagell (1921), le dernier résultat se déduit immédiatement des trois premiers.

LEMME 4. <u>Soit</u> u <u>tel que</u> $1 \leq u \leq x$, <u>et soit</u> N <u>le nombre de nombres entiers</u> k <u>satisfaisant</u> $f(k) \equiv 0 \ [u]$, $1 \leq k \leq x$.

<u>Alors</u>

$$\frac{x}{2u} \rho(u) \leq N \leq \frac{2x}{u} \rho(u) .$$

On a évidemment $f(k+\lambda u) \equiv f(k) \ [u]$, on découpe donc l'intervalle $(1, x)$ en tranches de longueur u , le nombre de tranches est $[\frac{x}{u}]$, on a donc

$$[\frac{x}{u}] \rho(u) \leq N \leq ([\frac{x}{u}] + 1) \rho(u) ,$$

d'où le résultat.

LEMME 5. <u>Le nombre de nombres entiers</u> k , <u>tels que</u> $k \leq x$, <u>pour lesquels</u> $f(k)$ <u>est divisible par un nombre</u> p^α (p <u>nombre premier</u>), <u>avec</u> $\alpha > m$ <u>et</u>

$$(2) \qquad p^\alpha > (\text{Log } x)^{3c_3}$$

<u>est un</u> $0[x(\text{Log } x)^{-c_3}]$.

Nous considérerons les entiers naturels k vérifiant les conditions de l'énoncé, et nous appellerons A ceux pour lesquels $p^\alpha \leq x$ et B ceux pour lesquels $p^\alpha > x$.

En utilisant les lemmes 3 et 4 , on majore A de la façon suivante :

$$A \leq 2x \sum_{p,\alpha} \frac{\rho(p^\alpha)}{p^\alpha} < 2c_4 x \sum_{p,\alpha} p^{-\alpha}$$

$$< 4c_4 x \{ \sum_{p \leq (\text{Log } x)^{3c_3/2}} (\text{Log } x)^{-3c_3} + \sum_{p > (\text{Log } x)^{3c_3/2}} p^{-2} \}$$

A est donc un $0[x(\text{Log } x)^{-c_3}]$.

Si $p^\alpha > x$, on a $p^\alpha < C x^m$ car $f(x)$ est un polynôme de degré m donc $f(k) < C x^m$, pour $k \leq x$. Mais $\alpha > m$, donc $p^{m+1} \leq p^\alpha < C x^m$. On en déduit $p < C x^{m/m+1}$ et $B < c_4 x^{m/m+1}$, résultat cherché.
On pose $\bar{x} = x^{1/m} s (\text{Log Log } x)^2$.

LEMME 6. *Soit* $f(k) = \prod p^{\alpha}$ *la décomposition de* $f(k)$ *en nombres premiers, le nombre de valeurs de* k, $k \leq x$, *telles que*

$$(3) \qquad \prod_{p < \bar{x}} p^{\alpha} \geq x^{1/8s^2} \qquad \text{est un} \quad 0[x(\operatorname{Log} x)^{-c_3}] .$$

Considérons les valeurs de k pour lesquelles il existe au moins un p dans le produit tel que $p^{\alpha} \geq \bar{x}^{m}$.

Pour ces valeurs de k, on a $p^{\alpha} > (\operatorname{Log} x)^{3c_3}$ et $\alpha > m$, donc on peut appliquer le lemme 5 .

Il reste les valeurs de k pour lesquelles $p^{\alpha} < \bar{x}^{m}$.

D'après (3) , le nombre de facteurs premiers distincts est au moins

$$\frac{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^2}{8s}$$

donc :

$$\{d[f(k)]\}^{s} > 2^{\frac{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^2}{8}} > (\operatorname{Log} x)^{2c_3} .$$

D'après le lemme 1, le nombre de tels entiers est un

$$0[x(\operatorname{Log} x)^{-3c_3}] .$$

LEMME 7. *On a les résultats suivants*

$$(4) \qquad \sum_{p \leq x} \rho(p) = \frac{x}{\operatorname{Log} x} + 0\left(\frac{x}{\operatorname{Log}^2 x}\right) .$$

$$(5) \qquad \sum_{p \leq x} \frac{\rho(p)}{p} = \operatorname{Log}\operatorname{Log} x + c_5 + o(1) .$$

Ces résultats découlent du "Primideal satz" [2] .

LEMME 8. *Pour* y *assez grand, on a la majoration :*

$$\sum_{\substack{p,\alpha \\ y < p < y^2 \\ \alpha \leq t}} \frac{\rho(p^{\alpha})}{p^{\alpha}} < 1 .$$

D'après le lemme 7, on peut écrire

$$\sum_{y<p<y^2} \frac{\rho(p)}{p} = \mathrm{Log}\, 2 + o(1) \ .$$

D'autre part, pour $2 \leq i \leq t$, on a

$$\sum_{y<p^i<y^2} \frac{\rho(p^i)}{p^i} < c_4 \sum_{y<p^i<y^2} \frac{1}{p^i} < \frac{1 - \mathrm{Log}\, 2 - o(1)}{t} \ .$$

On regroupe ces deux résultats et l'on obtient la majoration.

LEMME 9. On a le résultat suivant :

(6) $$\prod_{p\leq x} \left(1 + \frac{y\,\rho(p)}{p} \quad \frac{y^2\,\rho(p^2)}{p^2} + \ldots\right) < c_6 \,(\mathrm{Log}\, x)^y$$

On appelle A le produit et on prend son logarithme

$$\mathrm{Log}\, A = \sum_{p\leq x} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{y\,\rho(p)}{p} + \ldots\right) \leq \sum_{p\leq x} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{y\,\rho(p)}{p} + \frac{A}{p^2}\right)$$

$$= \sum_{p\leq x} \frac{y\,\rho(p)}{p} + 0(1) \ .$$

On applique le lemme 7 et on en déduit :

$$A < c_6 \,(\mathrm{Log}\, x)^y \ .$$

LEMME 10. Le nombre de manières d'écrire le nombre entier n comme p p c m de s nombres, est M tel que

$$\ell^{\omega(n)} \leq M \leq \ell^{\Omega(n)} \ , \qquad \ell = 2^s - 1 \ .$$

On montre tout d'abord le résultat pour n "quadrat-frei", par récurrence sur s . Soit $n = p_1\, p_2 \ldots p_m$, choisissons le produit $p_{k+1} \ldots p_m$, il est p p c m des nombres de $(2^s - 1)^{m-k}$ façons, d'après l'hypothèse de récurrence. Il y a $\binom{m}{k}$ façons de choisir k facteurs premiers parmi les m , et étant donné le produit $p_{k+1} \ldots p_m$, il y a $(2^k)^s$ façons de répartir les nombres $p_1 , p_2 , \ldots , p_k$ pour que n soit p p c m de $(s+1)$ nombres, d'où :

$$M = \sum_k \binom{m}{k} (2^s - 1)^{m-k} (2^s)^k = (2^{s+1} - 1)^m .$$

Pour $s = 1$ la relation est bien vérifiée.

Il est alors clair que si n n'est pas "quadrat-frei", on a les inégalités.

LEMME 11. <u>Si</u> $\frac{x}{k} < \frac{1}{2}$, <u>on a</u>

$$\sum_{t=k}^{\infty} \frac{x^t}{t!} \leq 2 \frac{x^k}{k!} .$$

En effet, $(k+1)! > k\ k!$ et

$$\sum_{t=k}^{\infty} \frac{x^t}{t!} \leq \frac{x^k}{k!} (1 + \frac{x}{k} + \ldots + \frac{x^n}{k^n} + \ldots) \leq 2 \frac{x^k}{k!} .$$

Nous allons maintenant, à l'aide de ces lemmes, montrer l'existence de la borne supérieure.

$$\sum_{k \leq s} \{ d[f(k)] \}^s < c_2\, x (\mathrm{Log}\, x)^{\ell} .$$

Tout d'abord :

$$\sum_{k \leq x} \{ d[f(k)] \}^s = \Sigma_1 \{ d[f(k)] \}^s + 0(x)$$

où Σ_1 est la sommation étendue aux nombres positifs $k \leq x$ satisfaisant les deux conditions :

(7) $\qquad f(k) \not\equiv 0\ [p^{\alpha}]$, $\alpha > m$, $p^{\alpha} > (\mathrm{Log}\, x)^{3c_3}$

(8) $\qquad \prod_{p < \bar{x}} p^{\alpha} < x^{(\frac{1}{8s^2})}$ où $f(k) = \prod p^{\alpha}$.

Cette restriction résulte des lemmes 2, 5, 6.

On peut d'autre part évidemment se restreindre aux valeurs de k pour lesquelles $f(k) > x^{1/s}$.

Soit $f(k) = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_i^{\alpha_i}$, la décomposition de $f(k)$ en facteurs premiers.

On définit j par :

$$(9) \qquad p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_j^{\alpha_j} \leq x^{1/s} < p_1^{\alpha_1} \cdots\cdots p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} .$$

On pose

$$(10) \qquad a_k = p_1^{\alpha_1} \cdots\cdots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{f(k)}{a_k} .$$

On décompose alors Σ_1 de la façon suivante :

$$(11) \qquad \sum_{k \leq x}{}_1 \{d[f(k)]\}^s = \sum_{k\leq x}{}_2 \{d[f(k)]\}^s + \sum_{k \leq x}{}_3 \{d[f(k)]\}^s .$$

Où Σ_2 est la sommation sur les k satisfaisant les conditions (7) et (8) et la condition supplémentaire

$$p_{j+1} \leq x^{1/32\, m\, s} .$$

Σ_3 est la sommation sur les satisfaisant (7) et (8) et la condition $p_{j+1} > x^{1/32\, m\, s}$.

Evaluons d'abord Σ_3 .

Tout facteur premier de b_k est supérieur à $x^{1/32\, m\, s}$ d'après la condition sur b_{j+1} , et comme $f(x) < x^{m+1}$, le nombre total des facteurs premiers de b_k avec leurs multiplicités est inférieur à $[32\,(m+1)\, m\, s]$.

On a donc

$$(12) \qquad d(b_k) < 2^{[32(m+1)\, m\, s]} .$$

Comme $\qquad a_k \leq x^{1/s}$,

on peut écrire :

$$(13) \qquad d(a_k) \leq d_{x^{1/s}} [f(k)]$$

où $d_{x^{1/s}}[f(k)]$ est le nombre de diviseurs de $f(k)$ qui sont inférieurs à $x^{1/s}$.

D'après (12) et (13) et en remarquant que $d[f(k)] = d(a_k)\, d(b_k)$, on a

$$\Sigma_3 \{d[f(k)]\}^s < 2^{32(m+1) m\, s^2} \sum_{k \leq s} \{d_{x^{1/s}}[f(k)]\}^s .$$

Evaluation de la somme

$$S = \sum_{k \leq x} \{d_{x^{1/s}}[f(k)]\}^s$$

$$\sum_{k\le x}\{d_{x^{1/s}}[f(k)]\}^s = \sum_{k\le x}\Big[\sum_{\substack{d_1\mid f(k)\\ d_1\le x^{1/s}}} 1\Big]^s = \sum_{k\le x}\ \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s\\ d_i\mid f(k)\\ d_i\le x^{1/s}}} 1$$

$$= \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s\\ d_i\le x^{1/s}}}\ \sum_{\substack{k\\ [d_1,\dots,d_s]\mid f(k)}} 1 \le \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s\\ d_i\le x^{1/s}}} \frac{2\rho[d_1,\dots,d_s]}{[d_1,\dots,d_s]}\, x$$

$$\le 2x \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s\\ [d_1,\dots,d_s]\le x}} \frac{\rho[d_1,\dots,d_s]}{[d_1,\dots,d_s]} \le 2x \sum_{n\le x} \ell^{\Omega(n)}\,\frac{\rho(n)}{n}$$

$[d_1,\dots,d_s]$ désigne le p p c m des nombres $d_1,\dots,d_s$, et on utilise le lemme 10.

D'après le lemme 3, α), tous les termes de la dernière somme sont inclus dans le produit suivant

$$\prod_{p\le x}\Big(1+\frac{\ell\,\rho(p)}{p}+\frac{\ell^2\,\rho(p^2)}{p^2}+\dots\Big).$$

D'où, en utilisant le lemme 9, une majoration de S , et de Σ_3 :

$$(14)\qquad \Sigma_3\{d[f(k)]\}^s < c_7\, x\,(\mathrm{Log}\, x)^{\ell} .$$

Evaluation de la somme Σ_2 . On montre que

$$(15)\qquad p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \le x^{1/16 s} .$$

En effet, si ce n'était pas vrai, on aurait $\alpha_{j+1} > 2m$, ce qui contredit la condition (7) .

D'après les conditions (9), (10), (15), on a

$$(16)\qquad a_k > \frac{x^{1/s}}{p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}} > x^{1/2s} .$$

Pour que la condition (8) soit vérifiée, on doit avoir, étant donné (16)

$$(17)\qquad \bar{x} \le p_{j+1} \le x^{1/32 m s} .$$

On décompose alors Σ_2 de la façon suivante :

(18) $$\Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s = \sum_r \Sigma_2^{(r)} \{d[f(k)]\}^s .$$

Où dans $\Sigma_2^{(r)}$ les facteurs p_{j+1} satisfont
$$x^{1/(r+1)s} \leq p_{j+1} < x^{1/rs} .$$

Les valeurs de r, sont, étant donné les conditions sur p_{j+1}, telles que
$$32\,m \leq r \leq m\,(\mathrm{Log\,Log}\,x)^2 .$$

Comme dans le cas de Σ_3, on peut facilement évaluer les diviseurs de b_k. Pour tout k dans $\Sigma_2^{(r)}$ le nombre total de facteurs premiers de b_k est inférieur à $(m+1)(r+1)s$ et on a donc

(19) $$\Sigma_2^{(r)} \{d[f(k)]\}^s < 2^{(m+1)(r+1)s^2}\, \Sigma_2^{(r)} \{d(a_k)\}^s .$$

Comme au plus la moitié des diviseurs de a_k sont supérieurs ou égaux à $\sqrt{a_k}$, il résulte de (16) que

(20) $$d(a_k) \leq 2d^+(a_k)$$

où $d^+(m)$ est le nombre de diviseurs de m qui sont supérieurs ou égaux à $x^{1/4s}$.

Il résulte de (7) et (8) que tous les diviseurs de a_k qui sont supérieurs ou égaux à $x^{1/4s}$ sont inclus dans un ensemble de nombres $n_j^{(r)}$ satisfaisant :

i) $x^{1/4s} \leq n_j^{(r)} \leq x^{1/s}$,

ii) si $p \mid n_j^{(r)}$, $p < x^{1/rs}$, $\rho(p) > 0$,

iii) si $p^\alpha \| n_j^{(r)}$ et $\alpha > m$, $p^\alpha \leq (\mathrm{Log}\,x)^{3c_3}$,

iv) $\displaystyle\prod_{\substack{p^\alpha \| n_j^{(r)} \\ p < \bar{x}}} p^\alpha < x^{1/8s^2}$.

La somme $\Sigma_2^{(r)}\ d^+(a_k)$ est inférieure au nombre de solutions en k et j de l'équation

$$f(k) \equiv 0\ [\ n_j^{(r)}\ ]\ .$$

Les inéquations (19) et (20) donnent

$$(21) \qquad \Sigma_2^{(r)}\ \{d[f(k)]\}^s < 2^{(m+1)(r+1)s^2}\ \Sigma_2^{(r)}\ \{d(a_k)\}^s$$
$$\leq 2^{s^2(m+1)(r+1)+s}\ \Sigma_2^{(r)}\{d^+(a_k)\}^s\ .$$

Regardons la somme $\Sigma_2^{(r)}\{d^+(a_k)\}^s$

$$\Sigma_2^{(r)}\{d^+(a_k)\}^s \leq \Sigma_2^{(r)}\{\sum_{\substack{r \\ n_j^{(r)} \mid f(k)}} 1\}^s = \Sigma_2^{(r)} \sum_{\substack{n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)} \\ n_j^{(r)} \mid f(k)}} 1$$

$$= \sum_{n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)}}\ \sum_{\substack{k \\ n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)} \mid f(k)}} 1 \leq \sum_{n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)}} \frac{2\rho[n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)}]}{[n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)}]}x\ .$$

En appliquant encore le lemme 10, et si l'on note $m_j^{(r)} = [n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)}]$ le p p c m des nombres $n_1^{(r)},\dots,n_s^{(r)}$, on obtient

$$(22) \qquad \Sigma_2^{(r)}\{d^+(a_k)\}^s \leq 2\,x \sum_j \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}}\ \ell^{\Omega(m_j^{(r)})}\ .$$

Etant donné la définition des $m_j^{(r)}$ et les relations vérifiées par les $n_j^{(r)}$ l'ensemble des nombres $m_j^{(r)}$ vérifie les relations :

i)' $\quad x^{1/4s} \leq m_j^{(r)} \leq x$,

ii)' si $p \mid m_j^{(r)} \quad p < x^{1/r\,s} \quad \rho(p) > 0$,

iii)' si $p^\alpha \,\|\, m_j^{(r)}$ et $\alpha > m$, $p^\alpha \leq (\mathrm{Log}\ x)^{3c_3}$

iv)' $\quad \displaystyle\prod'_{\substack{p^\alpha \| m_j^{(r)} \\ p < \bar{x}}} p^\alpha < x^{1/8\,s}$.

Estimons la somme

$$\Sigma \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \ell^{\Omega m_j^{(r)}} = T .$$

Soit $I_t^{(r)}$ l'intervalle $[x^{1/s\, r\, 2^{t+1}}, x^{1/s\, r\, 2^t}]$ t varie de 0 à Z , avec Z plus grand nombre entier tel que

$$r\, 2^Z \leq (\mathrm{Log\, Log}\, x)^2\, m .$$

Tout nombre $m_j^{(r)}$ a au moins $N_t^{(r)}$ facteurs premiers dans au moins un de ces intervalles avec

$$N_t^{(r)} = [\frac{r\,(t+1)}{32\, m}] + 1 .$$

En effet :

Un nombre premier dans ces intervalles est au moins égal à $x^{1/2s\, m\, (\mathrm{Log\, Log}\, x)^2}$ et divise $m_j^{(r)}$ à la puissance au plus m à cause de la condition iii)'.

D'autre part tout facteur premier de $m_j^{(r)}$ supérieur à $\bar{x}$ est dans un de ces intervalles.

Si tout nombre $m_j^{(r)}$ n'avait pas au moins $N_t^{(r)}$ facteurs premiers dans au moins un des intervalles $I_t^{(r)}$ on aurait

$$m_j^{(r)} < (\prod{}' p^\alpha) \prod_t (x^{1/sr\, 2^t})^{\frac{r(t+1)m}{32\, m}} .$$

Comme $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{t+1}{2^t} = 4$, on aurait $m_j^{(r)} < x^{1/4\, s}$.

Ceci contredirait la condition i)' .

On définit maintenant w comme plus petit nombre entier tel que $m_j^{(r)}$ ait au moins $N_w^{(r)}$ facteurs premiers dans l'intervalle $I_w^{(r)}$. On a

$$(23) \qquad \sum_j \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} = \sum_w \sum_{j(w)} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} .$$

Posons

$$m_j^{(r)} = u\, v$$

où u est composé des facteurs premiers de $m_j^{(r)}$ qui sont dans $I_w^{(r)}$, v est composé des autres facteurs de $m_j^{(r)}$.

D'après les hypothèses, u est $(m+1)$ "frei", et possède au moins $N = N_w(r)$ facteurs premiers. D'autre part ρ est multiplicative et $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b)$, on a donc :

$$(24) \qquad \sum_{j(w)} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \leq [\sum_u \ell^{\Omega(u)} \frac{\rho(u)}{u}] [\sum_v \ell^{\Omega(v)} \frac{\rho(v)}{v}]$$

et aussi

$$\sum_u \ell^{\Omega(u)} \frac{\rho(u)}{u} \leq \frac{\ell^{Nm}}{N!} \{ \sum_{p, \alpha} \frac{\rho(p^\alpha)}{p^\alpha} \}^N$$

dans la dernière somme, la sommation est faite sur les p^α qui appartiennent à $I_w^{(r)}$ et $\alpha \leq m$.

En utilisant le lemme 8, on a donc

$$(25) \qquad \sum_u \ell^{\Omega(u)} \frac{\rho(u)}{u} \leq \frac{\ell^{Nm}}{N!} .$$

Pour majorer la somme sur v on peut écrire

$$(26) \qquad \sum_v \ell^{\Omega(v)} \frac{\rho(v)}{v} \leq \prod_{p \leq x} (1 + \frac{\ell \rho(p)}{p} + \dots) < c_6 (\text{Log } x)^\ell .$$

On avait vu que $r \geq 32m$, donc d'après la définition de $N_w^{(r)}$, on a

$$[\frac{r}{32m}] < N_o^{(r)} < N_1^{(r)} \dots$$

Les équations (24), (25), (26) nous donnent

$$(27) \qquad \sum_{j(w)} \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \leq c_6 \frac{\ell^{Nm}}{N!} (\text{Log } x)^\ell$$

et enfin

$$(28) \qquad \sum_j \ell^{\Omega(m_j^{(r)})} \frac{\rho(m_j^{(r)})}{m_j^{(r)}} \leq c_6 (\text{Log } x)^\ell \sum_{w=0}^{\infty} \frac{\ell^{N_w^{(r)} m}}{(N_w^{(r)})!} .$$

Posons $\ell^m = L$ et regardons la somme

$$(29) \qquad \sum_{w=0}^{\infty} \frac{L^{(N_w^{(r)})}}{(N_w^{(r)})!} .$$

Nous allons appliquer le lemme 11 à (29).

Lorsque $\dfrac{L}{\dfrac{r}{32m}} \leq \dfrac{1}{2}$, soit $r \geq 64mL$. On peut majorer (29) de la façon suivante :

$$(30) \qquad \sum_{w=0}^{\infty} \frac{L^{N_w^{(r)}}}{(N_w^{(r)})\,!} \leq 2\, \frac{L^{[\frac{r}{32m}]}}{[\frac{r}{32m}]\,!} \; .$$

Autrement on a $r < 64mL$, il n'y a alors qu'un nombre fini de r vérifiant cette condition, et la somme (29) est alors majorée par une constante que nous notons c_8 .

On peut donc regrouper les résultats obtenus, concernant Σ_2 , (18), (21), (22), (28) et (30).

$$\Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s < 2\, c_6 (\text{Log}\, x)^{\ell} x \Big(\sum_{r=64mL}^{\infty} 2^{(m+1)(r+1)s^2+s} \frac{L^{[\frac{r}{32m}]}}{[\frac{r}{32m}]!} + c_8 \Big) \, .$$

La série sommée en r est convergente, et l'on a donc le résultat

$$\Sigma_2 \{d[f(k)]\}^s < c_9 \, x \, (\text{Log } x)^{\ell} \, .$$

Finalement, d'après (11), (14) et (31) on obtient

$$\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s < c_2 \, x \, (\text{Log } x)^{\ell} \, .$$

§ 3. - BORNE INFERIEURE

On utilisera le résultat suivant :

LEMME 12. Il existe une constante c_{10} telle que

$$\sum_{k \leq x} \ell^{\omega(k)} \rho(k) > c_{10} \, x \, (\text{Log } x)^{\ell - 1} \, .$$

Ce résultat sur la fonction ρ , demande une étude analytique que nous verrons ensuite.

Il s'agit de montrer que l'on a une constante c_1 , telle que

$$\sum_{k\le x} \{d[f(k)]\}^s > c_1\, x\, (\mathrm{Log}\, x)^{\ell} .$$

Il suffit de montrer que

$$\sum_{k\le x} \{d_x\, 1/s\, [f(k)]\}^s > c_1\, x\, (\mathrm{Log}\, x)^{\ell} ,$$

car

$$\sum_{k\le x} \{d[f(k)]\}^s > \sum_{k\le x} \{d_x\, 1/s\, [f(k)]\}^s$$

$$\sum_{k\le x} \{d_x\, 1/s\, [f(k)]\}^s = \sum_{k\le x} \{ \sum_{\substack{d_1 | f(k) \\ d_1 \le x^{1/s}}} 1\}^s = \sum_{k\le x} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s \\ d_i | f(k) \\ d_i \le x^{1/s}}} 1$$

$$= \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s \\ d_i \le x^{1/s}}} \sum_{\substack{k \\ [d_1,\dots,d_s] | f(k)}} 1 \ge \sum_{\substack{d_1,\dots,d_s \\ d_i \le x^{1/s}}} \frac{\rho[d_1,\dots,d_s]}{[d_1,\dots,d_s]} \frac{x}{2}$$

$$\ge \frac{x}{2} \sum_{n\le x} \ell^{\omega(n)} \frac{\rho(n)}{n} .$$

Par une sommation d'Abel, on transforme la somme en ρ :

$$\frac{x}{2} \sum_{n\le x} \ell^{\omega(n)} \frac{\rho(n)}{n} > \frac{x}{2} \sum_{y\le x} y^{-2} \sum_{k\le y} \ell^{\omega(n)} \rho(n) .$$

On applique alors le lemme et on obtient :

$$\frac{x}{2} \sum_{n\le x} \ell^{\omega(n)} \frac{\rho(n)}{n} > \frac{x}{2} c_{10} \sum_{y\le x} y^{-1} (\mathrm{Log}\, y)^{\ell-1} .$$

Soit le résultat :

$$\sum_{k\le x} \{ d[f(k)]\}^s > c_1\, x\, (\mathrm{Log}\, x)^{\ell} .$$

§ 4. - FIN DE LA DEMONSTRATION

Montrons à présent le lemme 12.

Il existe une constante c_{10} , telle que

$$\sum_{k\le x} \ell^{\omega(k)} \rho(k) > c_{10}\, x\, (\mathrm{Log}\, x)^{\ell-1} .$$

On montrera, en utilisant les propriétés de la fonction ζ, du corps de nombres $\mathbb{Q}(\theta)$ (où $f(\theta) = 0$), le résultat suivant :

$$\sum_{k \le x} \mu^2(k)\, \ell^{\omega(k)}\, \rho(k) \sim c_{11}\, x\, (\operatorname{Log} x)^{\ell-1} .$$

μ est la fonction de Möbius, il est clair que

$$\sum_{k \le x} \ell^{\omega(k)}\, \rho(k) \ge \sum_{k \le x} \mu^2(k)\, \ell^{\omega(k)}\, \rho(k) ,$$

il en résulte la minoration espérée.

LEMME 13. <u>On montre que</u>

$$\sum_{k=1} \frac{\mu^2(k)\, \ell^{\omega(k)}\, \rho(k)}{k^s}$$

<u>converge absolument si</u> $\operatorname{Re}(s) > 1$.

En effet, soit s un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$.

ρ étant multiplicative, on peut alors écrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k)\, \ell^{\omega(k)}\, \rho(k)}{k^s} = \prod_p \left(1 + \frac{\ell\, \rho(p)}{p^s}\right) =$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{\ell\, \rho(p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\ell\, \rho(p)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\ell\, \rho(p)} .$$

Le résultat γ du lemme 3 dû à Nagell, nous permet de dire que le premier produit converge absolument si $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$; en effet, le produit s'écrit

$$\prod_p \left(1 + \frac{A_p}{p^{2s}}\right)$$

où les A_p sont bornés, les termes en p^s s'étant éliminés.

Pour le second produit, on utilise le résultat suivant [4] :

Soit $\zeta(s)$ la fonction ζ du corps de nombres $\mathbb{Q}(\theta)$ (où $f(\theta) = 0$). Alors

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\rho(p)} = H_1(s)\, \zeta(s)$$

avec $H_1(s)$ est absolument convergente si $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

De la même façon

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\ell\, \rho(p)} = (H_1(s))^{\ell} (\zeta(s))^{\ell} .$$

On en déduit que l'on peut écrire la somme sous la forme :

$$(31) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k)\, \ell^{\omega(k)}\, \rho(k)}{k^s} = H(s)\, (\zeta(s))^{\ell}$$

avec $H(s)$ absolument convergente si $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ car $H(s)$ est un produit fini de fonctions absolument convergentes pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

LEMME 14. <u>Si l'on a</u>

$$\sum \frac{c(k)}{k^s} = \sum \frac{a(k)}{k^s} \sum \frac{b(k)}{k^s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

<u>avec</u>

$$\sum \frac{c(k)}{k^s} \quad \underline{\text{et}} \quad \sum \frac{a(k)}{k^s}$$

<u>absolument convergentes pour</u> $\mathrm{Re}(s) > 1$, <u>et</u>

$$\sum \frac{b(k)}{k^s}$$

<u>absolument convergente pour</u> $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ <u>et si d'autre part</u>

$$A(x) = \sum_{k \le x} a(k) \sim c_{12}\, x\, (\mathrm{Log}\, x)^u ,$$

<u>alors</u>

$$C(x) = \sum_{k \le x} c(k) \sim c_{12} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)}{k} \right) x\, (\mathrm{Log}\, x)^u .$$

Remarque : Il faut que $\sum_{k=1} \frac{b(k)}{k} \neq 0$. Ici $b(k)$ est multiplicative et la série absolument convergente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)}{k} = \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^k}\right)$$

on vérifie que chaque facteur du produit est non nul.

L'égalité entre les séries de Dirichlet signifie

$$c(k) = \sum_{nm=k} a(n)\, b(m) \;,$$

on peut donc écrire :

$$\sum_{k\leq x} c(k) = \sum_{k\leq x} \sum_{nm=k} a(n)\, b(m) = \sum_{m\leq x} b(m) \sum_{n\leq \frac{x}{m}} a(n) =$$

$$\sum_{m\leq x} b(m)\, A(\frac{x}{m}) = \sum_{m\leq x} b(m)\,(\frac{c_{12}\, x\,(\mathrm{Log}\ x)^{u}}{m} + 0(\frac{c_{12} x\,(\mathrm{Log}\, x)^{u}}{m}))$$

$$\sum_{m\leq x} \frac{b(m)}{m}\, c_{12}\ x\ (\mathrm{Log}\ x)^{u} + 0(c_{12}\ x\ (\mathrm{Log}\ x)^{u} \sum_{m\leq x} \frac{|b(m)|}{m})$$

le lemme B est donc établi.

On pose

$$(\zeta(s))^{\ell} = \sum_{k\leq x} \frac{\lambda_{\ell}(k)}{k^{s}} \;.$$

Nous allons calculer par récurrence les sommes $\sum_{k\leq x} \lambda_{\ell}(k)$.

Pour $\ell = 1$, le résultat est connu et dû à Weber :

LEMME 15. <u>Si</u>

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{s}} \;, \quad \mathrm{Re}\,(s) > 1 \;,$$

<u>alors</u>

$$\sum_{k\leq x} a_k = A\,x + 0(x^{v}) \;,$$

A <u>est indépendant de</u> f <u>et</u> $v = 1 - \frac{1}{d^{\circ}(f)}$.

(Résultat cité dans Landau [3]) .

Soit alors l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k\leq x} \lambda_{\ell}(k) = C_{\ell}\ x\ (\mathrm{Log}\ x)^{\ell-1} + 0(x\,(\mathrm{Log}\ x)^{\ell-2}) \;.$$

$$\lambda_{\ell+1}(k) = \sum_{nm=k} \lambda_1(n)\,\lambda_\ell(m)$$

$$\sum_{k\leq x} \lambda_{\ell+1}(k) = \sum_{k\leq x} \lambda_1(k) \sum_{dk\leq x} \lambda_\ell(d) =$$

$$\sum_{k\leq x} \lambda_1(k)\,(C_\ell\,(\frac{x}{k}(\mathrm{Log}\,\frac{x}{k})^{\ell-1}) + 0(\frac{x}{k}\,(\mathrm{Log}\,\frac{x}{k})^{\ell-2}))$$

$$\sum_{k\leq x} \lambda_1(k)\,(C_\ell\,\frac{x}{k}\,(\mathrm{Log}\,x)^{\ell-1}) + 0(\frac{x}{k}\,(\mathrm{Log}\,x)^{\ell-2})) =$$

$$C_\ell\, x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\ell-1} \sum_{k\leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k} + 0\,(x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\ell-2} \sum_{k\leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k}) .$$

On calcule $\sum_{k\leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k}$ en fonction de $\sum_{k\leq x} \lambda_1(k)$ en écrivant :

$$\sum_{k\leq x} \frac{\lambda_1(k)}{k} = \int_1^x (\sum_{k\leq t} \lambda_1(t))\,\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{x}(\sum_{k\leq x} \lambda_1(k)) .$$

On obtient alors

$$\sum_{k\leq x} \lambda_{\ell+1}(k) = C_{\ell+1}\, x\,(\mathrm{Log}\,x)^\ell + 0(x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\ell-1}) .$$

Si l'on revient à la formule (31), on a exprimé $(\zeta(s))^\ell$ à l'aide du lemme 14, et ceci termine la démonstration.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. ERDÖS. - Journal of the London Mathematical Society 27 (1952) p. 7-15.

[2] E. LANDAU. - Einführung in die Elementaire und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. (Teubner Leipzig 1918), th. 191, p. 110.

[3] E. LANDAU. - Einführung in die Elementaire und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. (Teubner Leipzig 1918) th. 210, p. 131.

[4] R. J. MIECH. - Acta Arithmetica 10 (1964), p. 9-30.

[5] S. RAMANUJAN. - Collected papers (Cambridge University Press, 1927), p. 133-135.

[6] J. G. VAN DER CORPUT. - Proc. K. Neder. Akad. van Wet. Amsterdam 42 (1939) p. 547-553.

-:-:-:-

Francine DELMER
Université de Bordeaux 1
U.E.R. de Mathématiques
et d' Informatique
351, cours de la Libération
33 - TALENCE