MICHEL MENDÈS FRANCE

Ensembles normaux

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 6, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A6_0>

Séminaire de Théorie des Nombres (J. LESCA)
Année 1968/69, n° 6

10 Janvier 1969

ENSEMBLES NORMAUX

par

Michel MENDES FRANCE

-:-:-:-:-

1. Soit $g \geq 2$ un entier. Un nombre réel x est dit normal en base g si chacun des chiffres $0, 1, \ldots, g-1$ apparait dans le développement g-adique de x avec la fréquence $1/g$, si chacun des couples $00, 01, 02, \ldots, 10, 11, \ldots$ apparaît avec la fréquence $1/g^2$, ..., si chacun des k-uples apparaît avec la fréquence $1/g^k$, ... ad infinitum.

On note par $B(g)$ l'ensemble des nombres normaux en base g.

Un nombre réel x est dit complètement normal s'il est normal en base 2, en base 3, ..., en base g, ... L'ensemble des nombres complètement normaux est donc l'ensemble

$$\bigcap_{g=2}^{\infty} B(g) .$$

On connait peu de choses sur les ensembles normaux. Le premier résultat profond -le seul jusqu'à maintenant- et sans doute le dernier - date de 1909. Il est du à Emile Borel : Presque tous les nombres sont normaux [1] .

Nous nous intéressons ici à un autre aspect de la "théorie" des nombres normaux. Nous aimerions établir une relation entre la notion de nombre normal et celle de nombre transcendant. Le but - non atteint - serait de démontrer la conjecture suivante : Un nombre complètement normal est nécessairement transcendant.

(La réciproque est bien entendu fausse car le nombre de Liouville $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ n'est certainement pas complètement normal).

2. Il est tout à fait élémentaire de démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre x soit normal en base g est que la suite $(x\, g^n)$ soit équirépartie (mod 1).

A la lumière de ce résultat, on dira qu'un nombre x est normal par rapport à la suite $\Lambda = (\lambda_n)$ (x est Λ-normal) si la suite $x\Lambda = (x\,\lambda_n)$ est équirépartie (mod 1). On note par $B(\Lambda)$ l'ensemble des nombres Λ-normaux.

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On dit que E est un ensemble normal élémentaire (en abrégé e. n. e.) s'il existe une suite Λ telle que $E = B(\Lambda)$. On dit qu'un ensemble E est un ensemble normal (e. n.) s'il est intersection dénombrable d'ensembles normaux élémentaires.

Donnons des exemples :

(i) $\emptyset$ est un e. n. e. $(\lambda_n = 1)$,

(ii) $\mathbb{R}-\{0\}$ est un e. n. e. $(\lambda_n = \sqrt{n})$,

(iii) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ est un e. n. e. $(\lambda_n = n)$,

(iv) $B(g)$ est un e. n. e. $(\lambda_n = g^n)$,

(v) $\bigcap_{g=2}^{\infty} B(g)$ est un e. n.

J'ai montré l'an dernier [2] que le complémentaire de tout corps réel de nombres algébriques de degré fini sur $\mathbb{Q}$ est un e. n. e. (récemment, Y. Meyer a retrouvé ce résultat par une autre technique). Il en résulte le théorème suivant :

THEOREME 1. <u>L'ensemble des nombres transcendants est un ensemble normal.</u>

Ceci établit un lien entre les concepts de normalité et de transcendance.

3. On aimerait pouvoir donner une caractérisation des e. n. e. et des e. n. . Il est simple de voir que les conditions suivantes sont nécessaires pour qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ soit e. n. (resp. e. n. e.).

(i) $0 \notin E$,

(ii) $\forall q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $qE \subset E$,

(iii) E est mesurable et, ou bien mes $E = 0$, ou bien mes $\complement E = 0$.

Il est vraisemblable que ces 3 conditions ne sont pas suffisantes (je ne sais pas le démontrer). Si toutefois ces conditions étaient suffisantes, alors on en concluerait que tout e. n. est aussi un e. n. e. . Cette remarque suggère le prolème suivant : Existe-t-il des ensembles normaux qui ne soient pas des ensembles normaux élémentaires ?

En particulier, l'ensemble des nombres complètement normaux (resp. l'ensemble des nombres transcendants réels) est-il un ensemble normal élémentaire ?

4. Donnons un dernier résultat relatif aux ensembles normaux. Soit S l'ensemble des suites d'entiers ≥ 1 strictement croissants. Il existe une bijection canonique ε entre S et le groupe $(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})^{\mathbb{N}}$, à savoir celle qui à $\Lambda \in S$ associe la fonction caractéristique ε_Λ :

$$\varepsilon_\Lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \Lambda \\ 0 & \text{si } n \notin \Lambda . \end{cases}$$

La mesure de Haar sur $(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})^{\mathbb{N}}$ se transporte par l'application ε^{-1} en une mesure μ sur S .

THEOREME 2. Pour μ-presque toutes les suites $\Lambda \in S$, on a $B(\Lambda) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(non encore publié).

-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOREL. - Les probabilités dénombrables ... , Rend. Circ. Mat. Palermo, 27, 1909, 147-271.

[2] M. MENDES FRANCE. - Nombres transcendants et ensembles normaux. Séminaire Théorie des Nombres, Paris I. H. P. , 9° année, 1967/1968.

-:-:-:-:-:-:-:-

Additif (Janvier 1970)

Depuis l'exposé précédent, un certain nombre de problèmes ont été résolus.

1. Dans [3] et [4] , J. F. Colombeau et F. Dress ont démontré qu'il y a identité entre les concepts d'ensemble normal élémentaire et d'ensemble normal.

2. Pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{R} - \alpha\,\mathbb{Q}$ est un ensemble normal. D'après ce qui précède, si $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_s , \ldots$ sont des nombres réels, l'ensemble

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} (\mathbb{R} - \alpha_s \mathbb{Q}) \quad ,$$

est un ensemble normal. En particulier, si la suite $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_s , \ldots$ est une base de l'ensemble des nombres algébriques réels, on retrouve le fait que l'ensemble des nombres réels transcendants est un ensemble normal, résultat que Y. Meyer [5] avait démontré autrement.

3. On trouvera dans [6] une généralisation du théorème 2 énoncé ici.

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[3] J. F. COLOMBEAU. - Ensembles normaux et ensembles normaux au sens large. C. R. Acad. Sc. Paris, 269, série A , 1969, 270-272.

[4] F. DRESS. - Intersection des ensembles normaux. Journal of Number Theory. (à paraître).

[5] Y. MEYER. - Nombres transcendants..... Acta arithmetica. (à paraître).

[6] J. LESCA et M. MENDES FRANCE. - Ensembles normaux. ce volume, exposé n° 14. Acta arithmética 17. (à paraître).

-:-:-:-:-:-:-:-