SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

EVE HELSMOORTEL

Module de continuité des polynômes binomiaux dans $\mathbb{Z}_p$, application aux fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. nº 5, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A5_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
(J. LESCA)
Année 1968/69 , n° 5

20 Décembre 1968

MODULE DE CONTINUITE DES POLYNOMES BINOMIAUX DANS $\mathbb{Z}_p$, APPLICATION AUX FONCTIONS CONTINUES SUR $\mathbb{Z}_p$

par

Eve HELSMOORTEL

INTRODUCTION.

Dans le corps $\mathbb{Q}_p$ la valuation est supposée normalisée de telle sorte que $v(p) = 1$. Etant donné deux entiers positifs n et k, et le n ième polynôme binômial Q_n :

$$Q_n(x) = \frac{x(x-1)\ \dots\ (x-n+1)}{n\ !} ,$$

on considère la quantité :

$$\omega_{Q_n}(k) = \inf_{\substack{v(x-y)=k \\ v(x)\geq 0\ ,\ v(y)\geq 0}} v(Q_n(x)-Q_n(y)) .$$

et on établit le résultat suivant :

$$\text{si } n< p_k \ \ \omega_{Q_p}(k) = k - [\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}] ,$$

$$\text{si } n\geq p^k \ \ \omega_{Q_n}(k) = 0 .$$

Dans une seconde partie on considère alors une fonction f continue sur $\mathbb{Z}_p$ et sa série d'interpolation :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x) \quad ,$$

et on déduit de l'ordre de croissance des $|a_n|$, une condition de Lipschitz d'un certain ordre.

1. - NOTATIONS.

Pour tout entier naturel n , on note h le nombre de chiffres de n dans le système de numération de base p dans lequel n s'exprime par :

1-1. :
$$n = n_o + n_1 p + \ldots + n_{h-1} p^{h-1} \quad ,$$
$$n_{h-1} \neq 0 \ , \quad h = 1 + [\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}] \quad ,$$

$[\lambda]$ représentant la partie entière du nombre réel λ .

L'entier n étant fixé, on associe à tout élément x de Z_p les entiers naturels ρ et ρ' , N et N', définis à partir du développement de Hensel de x :

1-2. :
$$x = x_o + x_1 p + \ldots + x_{N-1} p^{N-1} + x_{N'} p^{N} + \ldots \quad .$$

N est le rang maximum tel que :

$$x_{N-1} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = x_o + \ldots + x_{N-1} p^{N-1} < n \ ,$$

ρ est ainsi une des racines de Q_n les plus proches de x .

$$N' = v(x-\rho) \quad \text{et} \quad \rho' = \rho + x_{N'} p^{N'} \geq n \ ;$$

enfin : $N-1 \leq h-1$ et $N' \geq h-1$, et si $N' = h-1$, $N-1 < h-1$.

Si $h = 1$ et si $x_o \geq n_o$, on posera par convention : $\rho = 0$, $N = 1$, $N' = 0$, $\rho' = x_o$.

D'autre part, étant donné un entier positif k, on pose :

1-3. : $$r = x_o + x_1 p + \ldots + x_{k-1}\, p^{k-1} .$$

2. - PRELIMINAIRES.

a) Si deux éléments x et y de Z_p sont tels que $v(x-y) = k$, alors par 1-3 on leur associe le même entier r ; pour n et r fixés, $r < p^k$, on a les inégalités :

2-1. : $$\inf_{v(x-r)\geq k} v(Q_n(x)-Q_n(r)) \leq \inf_{\substack{v(x-y)=k \\ v(x-r)\geq k}} v(Q_n(x)-Q_n(y)) \leq \inf_{v(x-r)=k} v(Q_n(x)-Q_n(r)).$$

b) Calcul de $v(Q_n(x))$ pour $v(x) \geq 0$:

$$v(Q_n(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} v(x-j) - v(n!) .$$

Si $j \neq \rho$, on vérifie que $v(x-j) = v(\rho-j)$,

Si $j = \rho$, $v(x-\rho) = N'$,

$$v(Q_n(x)) = \sum_{j=0}^{\rho-1} v(\rho-j) + v(x-\rho) + \sum_{j=\rho+1}^{n-1} v(j-\rho) - v(n!) .$$

Soit :

2-2. : $$v(Q_n(x)) = N' + v(\rho!) + v((n-\rho-1)!) - v(n!) .$$

c) LEMME : Etant donné deux entiers n et q tels que $0 \leq q < n$, on a :

2-3 : $$v(q\,!) + v((n-q-1)!) - v(n!) \geq - \left[\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}\right] = 1-h\ .$$

L'égalité est réalisée si et seulement si q obéit à la définition suivante :

On dit que q est "bon pour n" lorsque les chiffres q_i de q dans le système de base p vérifient les inégalités :

$$q_o \geq n_o\ ,\ldots, q_{h-2} \geq n_{h-2}\ , \quad \text{et} \quad q_{h-1} < n_{h-1}$$

(si $h = 1$ seule subsiste l'inégalité $q_o < n_o$).

L'inégalité 2-3 peut encore s'exprimer ainsi :

$$v(c_n^q) \leq \left[\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}\right] + v(n-q) \quad ,$$

ou $$v(c_{n-1}^q) \leq \left[\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}\right] - v(n) \quad .$$

et dans chaque cas l'égalité est réalisée si et seulement si q est bon pour n.

Démonstration : si $h = 1$ et si $q_o < n_o$, 2-3 devient trivialement une égalité. En se référant à l'expression 1-1 de n, on définit la quantité $S(n) = n_o + n_1 + \ldots + n_{h-1}$, et on démontre que :

$$v(n\,!) := \frac{n - S(n)}{p - 1} \quad .$$

Alors :

$$v(q!)+v((n-q-1)!)-v(n!) = \frac{S(n)-S(q)-S(n-q-1)-1}{p-1}$$

et donc :

$$2\text{-}3 \Leftrightarrow \quad S(n) - S(q) - S(n-q-1)-1 \geq (p-1)\,(1-h) \quad . \qquad 2\text{-}3'\ .$$

Dans le système de base p :

$$q = q_o + q_1\, p + \ldots + q_{h-1}\, p_{h-1}^{h-1} \quad ,$$

$$n\text{-}q\text{-}1 = b_o + b_1\, p + \ldots + b_{h-1}\, p^{h-1} \quad .$$

Soit $v = v(n)$,

$$n = n_v\, p^v + n_{v+1}\, p^{v+1} + \ldots + n_{h-1}\, p^{h-1} \;,\; n_v \cdot n_{h-1} \neq 0 \;,$$

et

$$n-1 = (p-1) + \ldots + (p-1)\, p^{v-1} + (n_v - 1)\, p^{v+1} + \ldots + n_{h-1}\, p^{h-1} \;,$$

les v premiers termes disparaissent si $v = 0$.

Pour calculer l'expression $s(n) - s(q) - s(n-q-1)$, effectuons, dans le système de base p , la soustraction $(n-1)-q$.

On obtient tout d'abord :

$$q_o + b_o = p-1 \;, \;\ldots\;, \quad q_{v-1} + b_{v-1} = p-1 \quad ,$$

et par suite :

$$q_o + q_1 + \ldots + q_{v-1} + b_o + \ldots + b_{v-1} = (p-1)\, v \;.$$

Au rang v :

si $\quad q_v \leq n_v - 1 \;, \qquad q_v + b_v = n_v - 1 \quad ,$

si $\quad q_v \geq n_v \quad$, il y a une retenue et $\quad q_v + b_v = (n_v - 1) + p \quad .$

Puis :

$$q_{v+1} + b_{v+1} + 1 = n_{v+1} + \begin{cases} 0 & \text{si } q_{v+1} < n_{v+1} \\ p & \text{si } q_{v+1} \geq n_{v+1} \end{cases} \quad ,$$

et :

$$q_v+q_{v+1}+b_v+b_{v+1} = (n_v - 1) + n_{v+1} + p-1 + \begin{matrix} 0 \\ p \end{matrix} \quad ;$$

la retenue au rang v a eu pour effet d'ajouter une fois $p-1$ et il en est de même pour chaque retenue. S'il y a R retenues, on obtient ainsi la relation :

$$s(n) - s(q) - q(n-q-1)-1 = - (p-1)(R+v) \quad ,$$

or il y a au plus $h-v-1$ retenues, ce qui implique l'inégalité 2-3' ; l'égalité en 2-3 est réalisée si et seulement si il y a $h-v-1$ retenues, c'est-à-dire si

$$q_v \geq n_v \ , \ \dots \ , \ q_{h-2} \geq n_{h-2} \quad ,$$

compte tenu de ce que $v = v(n)$, on a, trivialement si $v \geq 1$,

$$q_o \geq n_o \ , \ \dots \ , \ q_{v-1} \geq n_{v-1} \quad ,$$

et, comme $q < n$, $q_{h-1} < n_{h-1}$.

3. - ETUDE DE $v(Q_n(x) - Q_n(r))$ et $v(Q_n(x)-Q_n(y))$ POUR $n < p^k$, $v(x-y) = k$, $v(x-r) \geq$ et $0 \leq r < p^k$.

a) Si $r < n$,

$Q_n(r) = 0$ et, compte tenu de 2-2 et du lemme, on obtient :

3-1. : $$v(Q_n(x) - Q_n(r)) \geq k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}\right] \quad ,$$

l'égalité est réalisée si et seulement si $v(x-r) = k$ et r bon pour n.

b) si $r \geq n$

à x et r correspondent les mêmes entiers ρ et N',

$$v(Q_n(r)) = N' + v(\rho\,!) + v(n-\rho-1)!) - v(n!) \quad ,$$

$$\frac{Q_n(x)}{Q_n(r)} - 1 = p^k \alpha + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j} + p^{2k}\alpha^2\, \Sigma_2(r) + \ldots + p^{nk}\alpha^n \Sigma_n(r) \; ,$$

avec $p^k\alpha = x-r$, $v(\alpha) \geq 0$, et $\Sigma_m(r) = \sum\limits_{0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n-1} \dfrac{1}{(r-j_1)\ldots(r-j_m)}$;

comme $\sup v(r-j) = N'$, on en déduit que :

$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(r)} - 1\right) \geq k - N' \quad ,$$

et par conséquent que :

3-2. : $$v(Q_n(x) - Q_n(r)) \geq k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}\right] \quad ,$$

l'égalité est réalisée si et seulement si :

$$v(x-r) = k \quad , \quad \rho \text{ "bon pour } n\text{" et } \quad v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N' \; .$$

Les inégalités 2. 1 permettent alors de conclure que :

3-3. : $$\omega_{Q_n}(k) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}\right] \qquad \text{si} \quad n < p^k \; .$$

c) Caractérisation des couples (x, r) tels que , pour $n < p^k$

$$\left| v(x-r) = k \quad \text{et} \quad v(Q_n(x)\, Q_n(r)) = k - \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}\right] \right. .$$

Etant donné x et l'entier ρ associé à x et n , on peut remarquer que :

si ρ est bon pour n : $N' > h-1$ $\quad \rho = x_o + \ldots + x_{h-1} p^{h-1}$ et donc $x_{h-1} < n_{h-1}$,

$$N' = h-1 \quad \rho = x_o + \ldots + x_{h-2} p^{h-2} ,$$

$$\rho + x_{h-1} p^{h-1} \geq n \text{ et donc } x_{h-1} \geq n_{h-1} .$$

Par suite :

$$\text{si } \rho \text{ est bon pour } n, \quad N' > h-1 \Leftrightarrow x_{h-1} < n_{h-1} ,$$
$$N' = h-1 \Leftrightarrow x_{h-1} \geq n_{h-1} .$$

Soit G l'ensemble des couples (x, r) considérés.

Pour $r < n$: r est la racine de Q_n la plus proche de x ; d'après 3.1 :

$$(x, r) \in G \Leftrightarrow r = \rho \text{ bon pour } n .$$

Dans ce cas $h \leq k \leq N'$, et en explicitant on obtient le résultat

$$\text{si } r < n \quad (x, r) \in G \Leftrightarrow x_o \geq n_o , \ldots , x_{h-2} \geq n_{h-2}$$
$$\text{et} \quad x_{h-1} < n_{h-1} .$$

Pour $r \geq n$, d'après 3.2 :

$$(x, r) \in R \Leftrightarrow \rho \text{ bon pour } n$$
$$\text{et } v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N'$$

si $N' > h-1$, ρ est la racine de Q_n la plus proche de x , et donc $v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N'$ est réalisé, et on obtient comme condition :

$$x_o \geq n_o , \ldots , x_{h-2} \geq n_{h-2} \quad \text{et} \quad x_{h-1} < n_{h-1} .$$

Si $N' = h-1$

$$v\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\Big) = 1-h \Leftrightarrow v\Big(\sum_{\substack{0\le i\le n-1 \\ v(r-i)=h-1}} \frac{1}{r-i}\Big) = 1-h \quad .$$

Les entiers i définis par : $0 \le i \le n-1$ et $v(r-i) = h-1$, sont les racines de Q_n les plus proches de x, ils sont de la forme :

$$i = \rho + d \,.\, p^{h+1} \quad ,$$

d entier, $v(d-x_{h-1}) = 0$, $0 \le d\,p^{h-1} < n-\rho = n_{h-1}\,p^{h-1} - ((x_o-n_o)+\dots+$
$+ (x_{h-2}-n_{h-2})\,p^{h-2})$,

si ρ est bon pour n, cette inégalité devient $0 \le d < n_{h-1}$, et comme dans ce cas $n_{h-1} \le x_{h-1}$, cela implique que $v(d-x_{h-1}) = 0$.

Donc tous les entiers i sont tous des entiers de la forme :

$$i = \rho + d\,p^{h-1} \qquad 0 \le d < n_{h-1} \,.$$

$$v\Big(\sum_i \frac{1}{r-i}\Big) = 1-h \Leftrightarrow v\Big(\sum_{0\le d<n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1}-d}\Big) = 0 \quad ,$$

car $r-i = (x_{h-1}-d)\,p^{h-1} + x_h\,p^h + \dots + x_{h-1}\,p^{k-1}$.

Ceci permet de conclure que :

pour $n < p^k$, et $v(x-r) \ge k$:

$$v(Q_n(x)-Q_n(r)) = k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] \Leftrightarrow \begin{array}{l} (\alpha)\ x_o \geq n_o, \dots, x_{h-2} \geq n_{h-2}, \\ (\beta)\ x_{h-1} < n_{h-1}, \\ \quad \text{ou} \\ \quad x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \\ \quad v(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1}-d}) = 0 \\ (\gamma)\ v(x-r) = k . \end{array}$$

Remarque : si $h = 1$ la condition (α) disparaît.

d) Caractérisation des couples (x, y) tels que :

(pour $n < p^k$) $\quad v(x-y) = k$

$$v(Q_n(x)-Q_n(y)) = k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] .$$

Si $v(x-y) = k$, alors, pour l'entier r associé à x et y :

$$v(x-r) \geq k \quad \text{et} \quad v(y-r) \geq k ,$$

l'égalité étant réalisée pour l'une au moins de ces inégalités ; donc :

$$v(Q_n(x)-Q_n(r)) \geq k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] \quad \text{et} \quad v(Q_n(y)-Q_n(r)) \geq k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] .$$

Si de plus $v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}]$, l'une au moins de ces deux dernières inégalitées est une égalité.

Supposons que :

$$v(x-y) = k , \quad v(Q_n(x)-Q_n(y)) = k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] \quad \text{et, par exemple,}$$

$$v(x-r) = k .$$

si $v(y-r) = k' > k$

$$\text{alors} \quad v(Q_n(y) - Q_n(r)) > k - [\frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, p}] ,$$

$$\text{donc} \quad v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - [\frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, p}] ,$$

et les h premiers chiffres de x, qui sont aussi ceux de y puisque $h \leq k$, satisfont aux conditions (α) et (β).

si $v(y-r) = k$

$$\text{alors, par exemple,} \quad v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - [\frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, p}]$$

et les n premiers chiffres de x et y vérifient (α) et (β).

<u>Conclusion</u> : si x et y sont tels que :

$$v(x-y) = k \quad \text{et} \quad v(Q_n(x)-Q_n(y)) = k - [\frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, p}] \qquad (n < p^k) ,$$

alors les h premiers chiffres de x et y satisfont aux conditions :

(α) $\qquad x_o \geq n_o , \ldots , x_{h-2} \geq n_{h-2}$,

(β) $\qquad x_{h-1} < n_{h-1}$ ou bien : $x_{h-1} \geq n_{h-1}$ et $v\Big(\sum\limits_{0 \leq d < n_{h-1}} \dfrac{1}{x_{h-1} - d}\Big) = 0$.

Inversement :

Soient x et y tels que : $v(x-y) = k$, et tels que leur h premiers chiffres satisfassent aux conditions (α) et (β).

Si $v(x-r) = k$ et si $v(y-r) > k$

alors, comme on l'a vu, $\quad v(Q_n(y) - Q_n(r)) > k - [\frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, p}]$,

$$v(Q_n(x) - Q_n(r)) = k - [\frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, p}] ,$$

et donc :
$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}]$$

Si $v(x-r) = v(y-r) = v(x-y) = k$:

Les conditions (α) et (β) impliquent que l'entier ρ associé à x et à y est bon pour n, et donc, d'après 2-2 et le lemme :

$$v(Q_n(y)) = N' - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] \quad ,$$

où N' est associé à y

$$\frac{Q_n(x)}{Q_n(y)} - 1 = \lambda \sum_0^{n-1} \frac{1}{y-j} + \lambda^2 \Sigma_2(y) + \ldots + \lambda^n \Sigma_n(y) \; ,$$

où $\lambda = x-y$, et $\Sigma_m(y) = \sum_{0 \le j_1 < \ldots < j_m \le n-1} \frac{1}{(y-j_1)\ldots(y-j_m)}$.

Si $j \neq \rho$, $v(y-j) = v(\rho-j) \le N'$, et $v(y-\rho) = N'$;

donc :
$$v(\lambda^m \Sigma_m(y)) \ge m(k-N') \; .$$

Si $N' = k$ c'est que $r < n$, et r est la racine de Q_n la plus proche de y, donc :

$$v(\sum_0^{n-1} \frac{1}{y-j}) = -k \quad ,$$

et d'autre part $v(\Sigma_m(y)) \ge m-1-mk$,

par suite :
$$v(\frac{Q_n(x)}{Q_n(y)} - 1) = 0 \quad ,$$

ce qui implique que $v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}]$

Si $N' < k$, c'est que $r \geq n$

alors $v(y-j) = v(r-j) \leq N'$ pour tout j , $0 \leq j \leq n-1$, et

$$v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{y-j}\right) = -N' \Leftrightarrow v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N' ;$$

Mais d'après les conditions (α) et (β) , $v\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{r-j}\right) = -N'$, donc :

$$v\left(\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{y-j}\right) = k-N' ,$$

et
$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(y)} - 1\right) = k-N' ,$$

et par suite : $$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}\, p}\right] .$$

Ceci permet d'énoncer le résultat suivant :

THEOREME 1. Si $n < p^k$, les éléments x et y de Z_p tels que :

$$v(x-y) = k ,$$

ce qui implique que x et y ont les mêmes k premiers chiffres, et

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = k - \left[\frac{\mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}\, p}\right] = k + 1 - h ,$$

sont caractérisés par les inégalités suivantes portant sur leur h premiers chiffres :

(α) $x_i \geq n_i$ pour $0 \leq i \leq h-2$,

(β) $x_{h-1} < n_{h-1}$ ou bien : $x_{h-1} \geq n_{h-1}$ et $v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1}-d}\right) = 0$.

4. - Etude de $N(Q_n(x) - Q_n(y))$ pour $n \geq p^k$:

D'après 2-2 et le lemme :

$$v(Q_n(x)) \geq N' - [\frac{\mathrm{Log}\, n}{\mathrm{Log}\, \hat{p}}] = N' + 1 - h \geq 0 \quad ,$$

et donc :

$$v(Q_n(x)) = 0 \iff \begin{array}{l} \rho \text{ bon pour } n \;, \text{ et} \\ N' = h-1 \;. \end{array}$$

Lorsque $N' = h-1$, $\rho = x_o + \ldots + x_{h-2}\, p^{h-2}$, et on a vu que :

$$\begin{array}{l} \rho \text{ bon pour } n \\ \text{et} \\ N' = h-1 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_{h-1} \geq n_{h-1} \;, \\ \\ x_o \geq n_o \;, \ldots , x_{h-2} \geq n_{h-2} \;, \end{array}$$

et par conséquent :

4-1. : $$v(Q_n(x)) = 0 \iff (\delta) \quad x_i \geq n_i \quad , \quad 0 \leq i \leq h-1 \;.$$

ce qui implique :

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) \geq 0 \quad ;$$

si les h premiers chiffres de x satisfont à (δ) et si $x_h \neq 0$, alors

$$v(x-r) = k \quad , \quad r < p^k \leq n \quad ,$$

donc : $$v(Q_n(x) - Q_n(r)) = v(Q_n(x)) = 0 \quad ,$$

et : $$\omega_{Q_n}(k) = 0 \;.$$

Si pour un nombre réel λ on note $(\lambda)^+ = \sup(\lambda, 0)$ alors on peut conclure que :

THEOREME 2. Pour tout entier naturel n :

$$\omega_{Q_n}(k) = (k - [\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} p}])^+$$

5. - APPLICATION AUX FONCTIONS CONTINUES SUR Z_p :

On définit de même, pour une fonction f continue sur Z_p :

$$\omega_f(k) = \operatorname*{Inf}_{v(x-y)=k} v(f(x)-f(y)) .$$

Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$ est la série d'interpolation de f, on a :

5-1. : $$\omega_f(k) \geq \rho_f(k) = \operatorname*{Inf}_{\substack{n \geq 0 \\ v(x-y)=k}} (v(a_n) + v(Q_n(x) - Q_n(y))) .$$

Posons :

$$\lambda_h = \operatorname{Inf} v(a_n) \quad \text{pour} \quad p^{h-1} \leq n < p^h ,$$

alors :

$$\rho_f(h) = \operatorname*{Inf}_{h \geq 1} (\lambda_h + (k+1-h)^+) .$$

Pour étudier $\rho_f(k)$, on considère le polygone de Newton P de l'ensemble E des points (h, λ_h), l'ordonnée du point d'abscisse k sur P est notée $N_w(k)$.

$\lambda_k - h$ est l'ordonnée à l'origine de la droite de pente un passant par le point (h, λ_h) ; deux cas se présentent :

a) Si P admet une droite d'appui de pente un D.

Ceci se produit lorsque

$$\operatorname*{Inf}_{h\geq 1} (\lambda_h - h) = C_o \quad \text{est fini}$$

c'est-à-dire lorsque

$$v(a_n) \geq C_o + 1 + [\frac{\text{Log } n}{\text{Log } p}] \qquad \forall n \geq 1 ,$$

ce qui entraîne, en revenant aux valeurs absolues, que :

$$|a_n| < \frac{1}{p^{c_o}} \cdot \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1$$

et l'hypothèse a) est équivalente à : il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \leq \frac{K}{n}$ $\forall n \geq 1$.

D contient ou bien un seul sommet de P, ou tout un côté de P.

Si il n'y a qu'un nombre fini de points de E situés sur D, soit h_o l'abscisse maxima de ces points, c'est encore le plus grand entier h_o tel que :

$$C_o = \lambda_{h_o} - h_o \quad .$$

Prenons $k > h_o$, ce qui correspond à $|x-y| < \frac{1}{p^{h_o}}$, alors, pour $h > k$

$$\lambda_h \geq h + 1 + c_o > k + 1 + c_o$$

et pour $1 \leq h \leq k$ $\quad \lambda_k \geq h + C_o \quad$ et $\quad \lambda_k + 1 + k - h \geq k + 1 + c_o$,

l'égalité étant en particulier réalisée pour h_o, donc :

$$\rho_f(k) = k + 1 + c_o \qquad \text{pour } k > h_o .$$

Si il y a une infinité de points de E situés sur D , (P a un côté infini de pente un) soit h_o l'abscisse de l'un d'eux, alors :

$$\rho_f(k) \geq k + 1 + C_o \qquad \text{pour} \quad k > h_o \,.$$

Dans les deux cas, on a :

$$v(f(x) - f(y)) \geq v(x-y) + 1 + C_o \quad ,$$

on en déduit que :

THEOREME 3. <u>S'il existe</u> $K > 0$ <u>tel que</u> :

$$|a_n| \leq \frac{K}{n} \qquad \forall n \geq 1 \quad ,$$

<u>alors il existe</u> $K' > 0$ <u>et</u> $\delta > 0$ <u>tels que</u> :

<u>pour</u> $|x-y| \leq \delta$, $|f(x)-f(y)| \leq K' \,|x-y|$.

b) Si P n'admet pas de droite d'appui de pente un , soit $(h_i)_{i\geq 1}$ la suite des abscisses des sommets de P :

$$h_1 < \ldots < h_i < h_{i+1} < \ldots$$

et m_i la pente du côté qui se projette en $(h_i \,,\, h_{i+1})$; la suite m_i est croissante, majorée par un d'après l'hypothèse b) , elle tend donc vers une limite μ , $0 < \mu \leq 1$.

Soit i_o tel que pour $i > i_o$, $m_i > 0$, prenons $k > k_{i_o}$.

Pour $h > k$: $\lambda_h \geq Nw(h) > Nw(k)$,

pour $1 \leq h \leq k$, les points correspondants de P sont au-dessus de la droite de pente un passant par le point $(k \,,\, Nw(k))$

$$\lambda_h - h + k+1 \geq Nw(k) + 1 \quad .$$

On en déduit donc que :

$$\rho_f(k) \geq 1 + [Nw(k)] > Nw(k) \qquad \text{pour} \quad k > h_{i_o} \quad ,$$

et en un sommet de P :

$$\rho_f(h_i) = 1 + Nw(h_i) \ .$$

Pour tout nombre réel β, $0 < \beta < \mu$, P admet une direction admissible de pente β et :

$$Nw(k) \geq \beta k + C \ ,$$

donc :

$$\rho_f(k) > \beta k + C \qquad \text{pour} \quad k > h_{i_o} \quad ,$$

ce qui établit le résultat suivant :

THEOREME 4. <u>S'il existe</u> $K > 0$ <u>et</u> $\beta \in]0,1[$ <u>tels que</u> :

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^\beta} \qquad \forall n \geq 1 \quad ,$$

<u>alors il existe</u> $K' > 0$ <u>et</u> $\delta > 0$ <u>tels que</u> :

<u>pour</u> $|x-y| \leq \delta$, $|f(x)-f(y)| \leq K' |x-y|^\beta$.

On peut alors conclure, en réunissant ces deux théorèmes que :

THEOREME 5. <u>S'il existe</u> $K > 0$ <u>et</u> $\gamma > 0$ <u>tels que</u> :

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^\gamma} \qquad \forall n \geq 1 \quad ,$$

<u>alors il existe</u> $K' > 0$ <u>et</u> $\delta > 0$ <u>tels que</u> :

<u>pour</u> $|x-y| \leq \delta$, $|f(x)-f(y)| \leq K' |x-y)|^{\inf(\gamma, 1)}$.

Appendice : I - Etude de la condition (β) :

$$x_{h-1} < n_{h-1} \quad ,$$

ou $\quad x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad$ et $\quad v\left(\sum_{0 \leq d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1} - d} \right) = 0 \quad ,$

x_{h-1} et n_{h-1} appartenant à $[0, p-1]$, $n_{h-1} \neq 0$.

Soit $b \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, et a , $b \leq a \leq p-1$; posons :

$$S(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a-1} + \ldots + \frac{1}{a-b+1} \quad ,$$

et $\quad v(a,b) = v(S(a,b))$.

On obtient les propriétés suivantes :

(1) $\quad v(a,1) = 0 \quad \forall a \in [1, p-1]$,

(2) $\quad v(a,b) > 0 \Rightarrow v(a, b+1) = 0$ et $v(a+1, b+1) = 0$.

Soit b et b' : $1 \leq b < b' \leq p-1$:

(3) $\quad v(a,b') > 0 \Rightarrow v(a,b) = 0 \Leftrightarrow v(a-b, b'-b) = 0$,

$\quad v(a,b) > 0 \Rightarrow v(a,b') = 0 \Leftrightarrow v(a-b, b'-b) = 0$.

$\quad S(a,2) = \frac{2a-1}{a(a-1)}$, on en déduit que :

(4) $\quad v(a,2) > 0 \Leftrightarrow a = \frac{p+1}{2}$.

(5) $\quad v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a-d}\right) > 0 \Leftrightarrow d$ impair et $a = \frac{p+d}{2}$.

Ce qui entraîne la propriété suivante :

(6) $\quad 1 \leq m \leq \frac{p-1}{2} , \Rightarrow v\left(\frac{p+2m-1}{2} , 2m\right) \geq 1$,

en particulier $v(p-1, p-1) \geq 1$,

enfin : (7) $\quad v(a,b) > 0 \Rightarrow v(a+1, b) = 0$ si $a \leq p-2$ et $v(a,b-1) = 0$ si $b \geq 2$.

On peut porter dans un tableau triangulaire les valeurs de $v(a,b)$; les remarques précédentes permettent déjà de déterminer des couples (a,b) tels que $v(a,b) > 0$, et d'autres tels que $v(a,b) = 0$; un tel tableau est facile à construire dès que l'on connait p ; enfin on peut remarquer que pour tout b appartenant à $\{1,\dots,p-2\}$ il existe a tel que $a \geq b$ et $v(a,b) = 0$.

La condition (β) peut encore s'exprimer par :

$$(\beta) \Leftrightarrow \quad x_{h-1} < n_{h-1} \quad \text{ou} \quad x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v(x_{h-1}, n_{h-1}) = 0 ,$$

et la condition contraire :

$$\text{non} \quad (\beta) \Leftrightarrow \quad x_{h-1} \geq n_{h-1} \quad \text{et} \quad v(x_{h-1}, n_{h-1}) > 0 .$$

II - Condition suffisante pour que $\omega_f(k) = \rho_f(k)$:

Nous nous placerons seulement dans le cas où P admet une droite d'appui D de pente un, P n'ayant qu'un sommet sur D :

$$\operatorname{Inf}(\lambda_h - h) = C_o = \lambda_{h_o} - h_o ,$$
$$h \neq h_o , \quad \lambda_h - h > C_o .$$

On se pose alors le problème suivant :

Problème : Soit $A = \{n \,;\, v(a_n) = \lambda_{h_o}$ et $p^{h_o - 1} \leq n < p^{h_o}\}$ et soit $k > h_o$, existe-t-il : $\bar{n} \in A$, X et $Y \in Z_p$ tels que :

1) $\quad v(X-Y) = k$,

2) $\quad v(Q_{\bar{n}}(X) - Q_{\bar{n}}(Y)) = k+1-h_o$,

3) $\quad \forall n \neq \bar{n}, \; n \in A, \quad v(Q_n(X)-Q_n(Y)) > k+1-h_o$.

Si ce problème admet une solution, alors pour le couple X, Y trouvé :

$$v(a_{\bar{n}}) + v(Q_{\bar{n}}(X)-Q_{\bar{n}}(Y)) = k+1 - C_o = \rho_f(k) \quad ,$$

et pour tout n strictement positif distinct de $\bar{n}$:

$$v(a_n) + v(Q_n(X) - Q_n(Y)) > k+1 + C_o \quad ,$$

cela soit à cause de $v(a_n)$ si $n \notin A$, soit à cause de 3) si $n \in A$; par conséquent si ce problème est résolu :

$$\omega_f(k) = \rho_f(k) \ .$$

Les éléments X et Y cherchés sont caractérisés par les conditions suivantes, portant sur leur h_o premiers chiffres :

$$(\alpha) \text{ pour } \bar{n} : x_o \geq n_o \ \ldots \ x_{h_o-2} \geq \bar{n}_{h_o-2} \quad ,$$

et $$(\beta) \text{ pour } \bar{n} : x_{h_o-1} < \bar{n}_{h_o-1} \text{ ou } x_{h_o-1} \geq \bar{n}_{h_o-1} \text{ et } v(x_{h_o-1}, \bar{n}_{h_o-1}) = 0 \quad ,$$

et pour $n \neq \bar{n}$, $n \in A$: non (α) : $\exists\, i(n) \leq h_o-2$, $x_i < n_i$,

ou

non (β) : $x_{h_o-1} \geq n_{h_o-1}$ $v(x_{h_o-1}, n_{h_o-1}) > 0$.

Pour avoir (α) pour $\bar{n}$ et non (α) pour le plus possible d'éléments de A, il y a intérêt à avoir un $\bar{n}$ dont les chiffres soient assez petits.

Associons à l'ensemble A, l'ensemble A' ainsi défini :

$$A' = \{n' = n_o + \ldots + n_{h_o-2}\, p^{h_o-2} \quad \exists\, n_{h-1} \ , \ n' + n_{h_o-1}\, p^{h_o-1} = n \in A\}$$

sur A', la relation :

$$n' < \bar{n}' \Leftrightarrow n_i \leq \bar{n}_i \quad , \quad 0 \leq i \leq h-2 \quad ,$$

est une relation d'ordre ; A' admet des éléments minimaux pour cette relation d'ordre.

Si l'un d'eux $\bar{n}'$ correspond à un seul $\bar{n}$ de A, on choisit cet $\bar{n}$.

Si tout élément minimal $\bar{n}'$ correspond à plusieurs $\bar{n}$ de A on associe à chacun des éléments minimaux $\bar{n}'$ l'ensemble :

$$B(\bar{n}') = \{n_{h_o-1} \quad , \quad \bar{n}' + n_{h_o-1}\, p^{h_o-1} \in A\} .$$

Dans le premier cas où $\bar{n}$ est le seul élément de A correspondant à un élément minimal $\bar{n}'$ alors par construction, pour :

$$x_o = \bar{n}_o \,, \; \ldots \,, \; x_{h_o-2} = \bar{n}_{h_o-2} \quad \text{et} \quad x_{h_o-1} < \bar{n}_{h_o-1} \,,$$

les conditions : (α) pour $\bar{n}$, (β) pour $\bar{n}$, et non (α) pour $n \neq \bar{n}$ seront satisfaites et on aura obtenu une solution du problème.

Dans le deuxième cas, pour un des $\bar{n}'$, minimaux, on choisit $(x_i = \bar{n}_i \quad 0 \leq i \leq h_o-2)$; ainsi pour tout n associé à $\bar{n}'$ on aura (α), et non (α) pour tout n non associé à $\bar{n}'$. Il reste à obtenir x_{h_o-1} et $\bar{n}_{h_o-1} \in B(\bar{n}')$ pour que :

(β) pour $\quad x_{h_o-1}$ et $\bar{n}_{h_o-1}$,

et non (β) pour $\quad x_{h_o-1}$ et $n_{h_o-1} \in B(\bar{n}')$, $n_{h_o-1} \neq \bar{n}_{h_o-1}$, c'est-à-dire :

$$x_{h_o-1} \geq n_{h_o-1} \quad \text{et} \quad v(x_{h_o-1} \,;\, n_{h_o-1}) > 0 \quad ,$$

$$\forall\, n_{h_o-1} \neq \bar{n}_{h_o-1} \quad , \quad n_{h_o-1} \in B(\bar{n}') \quad ,$$

si nous définissons, pour $a = 1, \ldots, p-1$:

$$I_a = \{ 1 \leq b \leq a \quad , \quad v(a,b) > 0 \} ,$$

l'étude faite dans I permet de remarquer que I_a contient au plus $\frac{a+1}{2}$ éléments, et donc que son complémentaire en contient au moins $p - 1 - \frac{a+1}{2}$; d'autre part non (β) pour a et b signifie que $b \in I_a$.

On obtient alors la condition suffisante suivante :

Si pour les $\bar{n}'$ minimaux, il existe un $\bar{n}'$ tel que l'on puisse trouver x_{h_o-1} tel que $B(\bar{n}') \cap \complement I_{x_{h_o-1}}$ soit réduit à un seul élément $\bar{n}_{h_o-1}$ (ce qui est réalisé en particulier si $B(\bar{n}')$ n'a qu'un élément), alors :

$$x_o = \bar{n}_o \,, \; \ldots \,, \; x_{h_o-2} = \bar{n}_{h_o-2} \quad \text{et} \quad x_{h_o-1} \quad ,$$

sont les h_o premiers chiffres de X et Y, et $\bar{n} = \bar{n}' + \bar{n}_{h_o-1} \cdot p^{h_o-1}$, et le problème posé a une solution $(\bar{n}, X, Y)$.

Cette condition ne sera pas réalisée si $B(\bar{n}')$ a trop d'éléments.

Résultats ultérieurs

Si K est un corps local, π une uniformisante, A l'anneau de valuation et M un compact régulier [1] contenu dans A :

$$M = \varprojlim M_k \quad , \quad M_k = M/_{\pi^k M} \quad , \quad N_k = \text{card}\, M_k = q_1, \ldots, q_k \, ,$$

les résultats précédents se généralisent à l'espace $\mathcal{C}(M, A)$ [2]. De plus pour une fonction $f \in \mathcal{C}(M, A)$, on obtient [3] la généralisation des résultats de Mahler [4] pour l'existence de $f'(x)$, et aussi une condition nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément et continûment dérivable dans M, condition portant sur les coefficients a_n d'interpolation de f sur une suite TBRBO [1], [2] dans M. En particulier :

. si pour un entier positif n , on note $h(n)$ l'entier tel que

$$N_{h(n)-1} \leq n < N_{h(n)} \quad ,$$

alors :

. si $v(a_n) - m\,h(n)\,v(\pi)$ tend vers l'infini avec n , f est m fois uniformément et continûment dérivable

et

. une condition nécessaire et suffisante pour que f soit Lipschitzienne dans M est qu'il existe C tel que :

$$v(a_n) - h(n)\,v(\pi) \geq C\,v(\pi) \qquad \forall n \geq 1 \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE. - Bull. Soc. Math. Fr. , 92 , 1964, p. 117-180 (Thèse math. , Paris, 1963).

[2] E. HELSMOORTEL. - Comptes rendus, 268, 1969, p. 1168.

[3] E. HELSMOORTEL. - Comptes rendus, (à paraître).

[4] K. MAHLER. - J. Reine. Angew. Math. , 199, 1958, p. 23-34.
