Elhanan Motzkin
Philippe Robba

Prolongement analytique en analyse p-adique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 3, p. 1-47
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A3_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
(J. LESCA)
Année 1968/69 , n° 3

6 Décembre 1968 et 6 Juin 1969

PROLONGEMENT ANALYTIQUE EN ANALYSE p-ADIQUE.

par Elhanan MOTZKIN et Philippe ROBBA

PLAN

------

§ 1. - Introduction

La théorie des fonctions analytiques dans $\mathbb{C}$ s'est surtout développée à partir de deux définitions équivalentes :

- la définition de Cauchy exprimant une condition de dérivabilité complexe, l'intérêt principal de cette définition étant dû à l'établissement des formules intégrales de Cauchy.

- la définition de Weierstrass exprimant que localement la fonction est somme de sa série de Taylor, cette définition ayant l'avantage de se généraliser immédiatement à tous les corps ($\mathbb{R}$ par exemple).

Enfin, Runge a caractérisé les domaines de $\mathbb{C}$ sur lesquels les fonctions analytiques étaient limite uniforme sur tout compact de fractions rationnelles.

Lorsqu'il a fallu édifier une théorie des fonctions analytiques sur $\hat{\Omega}_p$ (fermeture topologique de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, où $\mathbb{Q}_p$ désigne le corps rationnels muni de la valuation p-adique), on s'est aperçu qu'en l'absence de toute théorie de l'intégration sur $\hat{\Omega}_p$ la définition de Cauchy ne convenait pas et on a dû se rabattre sur celle de Weierstrass.

A l'intérieur de son disque de convergence, une fonction somme d'une série entière vérifie bien le principe du prolongement analytique (c'est-à-dire que si la fonction est nulle au voisinage d'un point elle est identiquement nulle). Mais le fait que la distance était ultra métrique $[d(b,c) \leq \max(d(a;b), d(a,c))]$ amenait un ennui inattendu : on ne pouvait pas prolonger une somme de série entière en dehors de son disque de convergence par la méthode de Weierstrass puisque le développement en série entière de la fonction autour d'un point arbitraire du disque de convergence donnait toujours le même disque de convergence.

S'inspirant de la méthode de Runge, M. Krasner eut l'idée de définir les fonctions analytiques comme limites uniformes de fractions rationnelles sur des ensembles convenables qu'il a appelé des quasi-connexes. (Plus exactement, ce que l'on définit ainsi c'est un élément analytique, une fonction analytique est définie sur une famille enchaînée de quasi-connexes, sa restriction à chaque quasi-connexe étant un élément analytique). Ces fonctions analytiques vérifient bien le principe du prolongement analytique, (*) sans lequel on ne saurait parler de fonction analytique.

(*) C'est pour cette raison et par analogie avec le cas des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ que M. Krasner a appelé ses ensembles des quasi-connexes, bien qu'ils ne soient nullement connexes.

Mais cette solution très ingénieuse restait pourtant peu satisfaisante pour l'esprit dans la mesure où il n'était pas évident qu'elle fût la meilleure possible : les quasi-connexes sont en quelque sorte "parachutés", et il paraissait possible que d'autres définitions plus compréhensives et d'autres ensembles plus généraux puissent également donner lieu à une théorie convenable de fonctions analytiques. On a été ainsi amené à formuler le problème de la façon suivante : soit A un sous ensemble ouvert de K . On appelle "élément analytique" sur A une limite uniforme sur A de fractions rationnelles n'ayant pas de pôles dans A . Une famille d'ensembles (A_i) est dite <u>enchaînée</u> si étant donné deux ensembles A et B de cette famille, il existe un nombre fini d'ensembles de cette famille, soient $A_1, \ldots, A_n$ tels que $A_1 = A$, $A_n = B$, $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ $1 \leq i \leq n-1$.

Soit alors $\mathcal{a}$ une famille de sous-ensembles ouverts de K . On dira que la fonction f est <u>analytique</u> sur la famille enchaînée (A_i) d'éléments de $\mathcal{a}$ si sa restriction à chaque A_i est un élément analytique. On notera que si f est une fonction définie sur $\mathcal{a}$ tel que sa restriction à chaque A_i d'une famille enchaînée engendrant $\mathcal{a}$ est une fonction analytique, alors f est une fonction analytique sur $\mathcal{a}$. (Ceci signifie que si l'on réitère le procédé de formation des fonctions analytiques on reste dans la même classe de fonctions - démonstration évidente).

Le problème consiste alors à trouver une famille $\mathcal{a}$ telle que les fonctions analytiques vérifient le principe du prolongement analytique.

M. Krasner a fourni une réponse partielle à ce problème en proposant les ensembles quasi-connexes. Voyons comment donner une réponse plus satisfaisante.

Notons d'abord que les éléments analytiques sont aussi des fonctions analytiques. Si les éléments analytiques sur A vérifient le principe du prolongement nalytique, A sera dit <u>analytique.</u> On voit donc qu'il est nécessaire que $\mathcal{a}$ soit contenue dans la classe des ensembles analytiques. Montrons alors que la classe des ensembles analytiques répond à notre problème.

<u>Proposition 1</u> : Une fonction analytique f sur une famille enchaînée (A_i) d'ensembles analytiques vérifie le principe du prolongement analytique.

En effet, supposons que f soit nulle au voisinage d'un point x_o de $\bigcup_i A_i$ et soit x un autre point de $\bigcup_i A_i$, il faut montrer que $f(x) = 0$. Soient A et B respectivement les deux ensembles de la famille enchaînée auxquels appartiennent x_o et x. Soient $A_i \ldots A_n$ les ensembles tels que $A_1 = A$, $A_n = B$ $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n-1$. La restriction de f à A_1 étant un élément analytique, et f étant nulle au voisinage de x_o, f est identiquement nulle dans A_1, puisque A_1 est analytique. A_1 et A_2 étant ouverts, leur intersection $A_1 \cap A_2$ est un ouvert non vide dans lequel f est identiquement nulle. La restriction de f à A_2 étant un élément analytique, f est identiquement nulle dans A_2. De proche en proche, on voit ainsi que f est identiquement nulle dans A_n, donc $f(x) = 0$.

Notons en passant la remarque intéressante.

<u>Corollaire 1</u> : La réunion $\bigcup_i A_i$ d'une famille enchaînée d'ensembles analytiques est un ensemble analytique.

En effet un élément analytique sur $\bigcup_i A_i$ est une fonction analytique sur la famille (A_i) donc vérifie le principe du prolongement analytique. On voit ainsi que l'on a la :

<u>Proposition 2</u> : Soient A un ensemble analytique, R une fraction rationnelle non constante, sans pôle dans A. Alors $R(A)$ est un ensemble analytique.

On voit d'abord que l'image par une fraction rationnelle non constante d'un disque ouvert est un disque ouvert. (Nous en donnerons la démonstration facile comme application du polygone de valuation au § 3). A, étant ouvert, est une réunion de disques ouverts, il en résulte que $R(A)$ est aussi la réunion d'une famille de disques ouverts, c'est donc un ouvert. Si alors f est la limite uniforme sur $R(A)$ d'une suite f_n de fractions rationnelles sans pôles dans $R(A)$, il est clair que $f_n \circ R$ est une fraction rationnelle sans pôles dans A et que $f_n \circ R$ converge uniformément vers $f \circ R$ sur A, $f \circ R$ est donc un élément analytique sur A. Si f est identiquement nulle sur un ouvert non vide O de $R(A)$, $R^{-1}(O)$ est un ouvert non vide de A sur lequel $f \circ R$ est nulle, puisque A est analytique, $f \circ R$ est identiquement nulle sur A et donc f est identiquement nulle sur $R(A)$, ce qui prouve que $R(A)$ est analytique.

Il s'agit alors de donner une caractérisation plus géométrique des ensembles analytiques.

Nous établirons une condition suffisante d'analyticité, puis nous verrons qu'une forme légèrement renforcée de cette condition est une condition nécessaire d'analyticité ce qui nous conduit à conjecturer que cette condition est nécessaire et suffisante.

Ce faisant, nous verrons (proposition 6) que la classe des ensembles analytiques ne possède malheureusement pas la propriété d'intersection finie.

Enfin nous montrerons que la classe des fonctions analytiques ainsi obtenues est plus vaste que la classe des fonctions analytiques sur les quasi-connexes (§ 3).

Quelques cas particuliers de ces résultats ont été exposés dans [1].

§ 2. - Notations

K désigne un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. On suppose de plus que K est une extension du corps p-adique $\mathbb{Q}_p$. Cette dernière hypothèse n'interviendra pas au paragraphe 4 : (condition suffisante d'analyticité), mais sera essentielle au paragraphe 5 : (condition nécessaire d'analyticité). Voyons exactement ce qu'implique cette dernière hypothèse. K étant un corps, $\mathbb{Q}$ s'identifie de façon canonique à un sous-corps de K. Munissons le de la valeur absolue définie sur K. Il résulte alors d'un célèbre théorème d'Ostrowski que les seules valeurs absolues non triviales sur $\mathbb{Q}$ sont la valeur absolue ordinaire et les valeurs absolues p-adiques. Comme la valeur absolue ordinaire n'est pas ultra-métrique, on voit que la valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ induite par celle définie sur K est soit la valeur absolue triviale (*), soit une valeur absolue p-adique. Ce que nous supposons donc c'est que K n'induit pas la valeur absolue triviale sur $\mathbb{Q}$.

La valeur absolue sur K sera notée $|\ |$.

Suivant l'usage, nous introduisons la valuation sur K :

$$\| x \| = - \log_p |x|$$

Alors $\| xy \| = \|x\| + \|y\|$

et $\|x+y\| \geq \min (\|x\| , \|y\|)$ l'égalité ayant lieu si $\|x\| \neq \|y\|$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur la perversion du signe - : les inégalités sont donc changées de sens. Le disque $\|x-a\| \leq r$ sera noté $\|x-a\| \geq \rho$ avec $\rho = \mathrm{Log}\ r$. $\|x\| \to +\infty$ signifie $x \to 0$.

Le signe $<$ signifiera, soit $<$, soit $\leq$.

(*) c'est-à-dire $|x| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$

§ 3. - Polygone de valuation

Considérons le polynôme du premier degré $P_a(x) = x-a$. On a

$$\begin{aligned} |P_a(x)| &= |a| && \text{pour } |x| > |a| \\ |P_a(x)| &\leq |x| = |a| && \text{pour } |x| = |a| \\ |P_a(x)| &= |x| && \text{pour } |x| < |a| \end{aligned}$$

On voit donc que $|P_a(x)|$ ne dépend que de $|x|$ sauf pour la valeur exceptionnelle $|x| = |a|$. Ceci nous permet donc de définir la fonction de valuation $|P_a|(r)$ du polynôme P_a définie sur le groupe de valuation et à valeurs dans le groupe de valaution : $|P_a|(r) = |P_a(x)|$ pour $|x| = r$. Cette fonction qui est définie pour $r \neq |a|$ se prolonge par continuité au point $r = |a|$ en posant $|P_a|(|a|) = |a|$ ($= \inf_{|x|=|a|} |P_a(x)|$) .

Si l'on considère alors la fraction rationnelle $R(x)$, comme K est algébriquement clos, $R(x)$ se décompose sous forme d'un produit de facteurs du premier degré :

$$R(x) = a \frac{(x-a_1) \ldots (x-a_n)}{(x-b_1) \ldots (x-b_n)}$$

et donc

$$|R(x)| = |a| + \sum_{i=1}^{n} |x-a_i| - \sum_{j=1}^{n} |x-b_j|$$

Donc, pour $|x| \neq |a_i|$, $|x| \neq |b_j|$, $|R(x)|$ ne dépend que de $|x|$ ce qui permet de définir la fonction de valuation $|R|(r)$ de la fraction rationnelle $R(x)$, pour $r \neq |a_i|$, $|b_j|$, cette fonction se pprolongeant par continuité aux valeurs exceptionnelles $|a_i|$, $|b_j|$. On a bien sûr

$$|R|(r) = |a| + \sum_{i=1}^{n} |P_{a_i}|(r) - \sum_{j=1}^{n} |P_{b_j}|(r)$$

$|R|$, somme de fonctions linéaires par morceaux, est une fonction linéaire par morceaux et son graphe est appelé le polygone de valuation de la fraction rationnelle R. Cette fonction se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction linéaire par morceaux à valeurs dans R.

La pente de $|P_a|$ au point r vaut 1 (resp. 0) si $r < |a|$ (resp. $r > |a|$).

La pente de $|R|$ au point non exceptionnel r étant la somme des pentes des fonctions $|P_{a_i}|$ et $-|P_{b_j}|$, on voit que celle-ci est un nombre entier qui représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés dans le disque $|x| > r$.

Si r est un point exceptionnel, la différence entre la pente du côté du polygone situé à gauche du point d'abscisse r et la pente du côté situé à droite représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés sur le cercle $|x| = r$. (On voit donc qu'en un point exceptionnel il peut ne pas y avoir de changement de pente si le nombre de zéros égale le nombre de pôles).

Dans cette présentation, l'origine joue un rôle privilégié. Dans les applications, il sera donc utile de considérer la fonction de faluation $|R|_{x_o}$ de R relative au point x_o. Elle est définie (sauf pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles de r) par

$$|R|_{x_o}(r) = |R(x)| \quad \text{pour} \quad |x-x_o| = r .$$

Elle se prolonge par continuité aux valeurs exceptionnelles de r. Son graphe est appelé le polygone de valuation de R relatif à x_o.

On notera la formule d'échange très importante :

$$|R|_{x_o}(|x_1-x_o|) = |R|_{x_1}(|x_1-x_o|)$$

En effet, pour $|x-x_o| < |x_1-x_o|$ on a $|x-x_1| = |x-x_o|$ et donc pour $r < |x_1-x_o|$, r non exceptionnel, on a $|R|_{x_o}(r) = |R|_{x_1}(r)$. Comme les fonctions de valuation sont continues, on obtient le résultat en faisant tendre r vers $x_1 - x_o$.

Si maintenant on considère un élément analytique f défini sur un ouvert A, c'est-à-dire la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A, on va pouvoir définir sa fonction de valuation $\|f\|$ comme limite de la suite des fonctions de valuation $\|R_n\|$ des fractions R_n. Mais bien sûr cette fonction ne sera pas définie sur tout le groupe de valuation mais seulement sur l'image $\|A\|$ de A dans l'application $x \to \|x\|$.

Soient Q et R deux fonctions rationnelles approximant f sur A, c'est-à-dire que l'on a

$$\|Q(x) - f(x)\| > M \quad , \quad \|R(x) - f(x)\| > M \quad \text{pour} \quad x \in A \text{, et donc :}$$

$$\|Q(x) - R(x)\| > M \qquad \text{pour} \quad x \in A .$$

Si r n'est exceptionnel ni pour Q ni pour R on a

$$\|Q(x)\| = \|Q\|(x) \quad \text{et} \quad \|R(x)\| = \|R\|(r) \quad \text{pour } \|x\| = r ;$$

si de plus l'intersection $A \cap C_r$ de A avec le cercle $C_r \|x\| = r$ n'est pas vide et si enfin $\|Q\|(r) < M$, on a $\|R\|(r) = \|R(x)\| = \|Q(x)\|$ pour $x \in A \cap C_r$ et donc $\|Q\|(r) = \|R\|(r)$. Il en résulte que si r_o est un point d'accumulation de $\|A\|$ et si en ce point $\|Q\|(r_o) < M$, alors en ce point on a $\|R\|(z) = \|Q\|(r_o)$: en effet dans tout voisinage de r_o il existe une infinité de valeurs de r appartenant à $\|A\|$; comme il n'y a qu'un nombre fini de r exceptionnels pour Q et R simultanément, il y a une infinité de valeurs régulières de r dans ce voisinage appartenant à $\|A\|$ et en ces points on a $\|Q\|(r) = \|R\|(r)$ (on prend le voisinage assez petit pour qu'on y ait $\|Q\|(r) < M$), alors par continuité on aura aussi $\|R\|(r_o) = \|Q\|(r_o)$.
L'ensemble $Pr(A)$ des points d'accumulation dans $\mathbb{R}$ de l'image $\|A\|$ de A sera appelé la projection de A.

D'après ce qu'on vient de voir, si $R_n(x)$ est une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A convergeant vers f uniformément sur A, en un point r de $Pr(A)$ ou $|R_n(r)| \to +\infty$ ou $|R_n|(r)$ reste constant après un certain rang. On appellera donc fonction de valuation de f : $|f|(r) = \lim_{n\to\infty} |R_n|(r)$; cette fonction est définie sur $Pr(A)$ et d'après ce qu'on a vu, sa définition ne dépend pas de la suite approximante choisie. Le graphe de $|f|$ est appelé le polygône de valuation de f. C'est bien un polygône puisque au-dessous de la droite d'ordonnée M, le graphe de $|f|$ coïncide avec le graphe de toute fraction rationnelle R telle que $|f(x) - R(x)| > M$ sur A.

Comme dans le cas des fractions rationnelles on définit l'image $|A|_{x_o}$ de A relative au point x_o (c'est l'image de A dans l'application $x \to |x-x_o|$), la projection $Pr_{x_o}(A)$ de A relative au point x_o (ensemble des points d'accumulation sur R de $|A|_{x_o}$) et la fonction de valuation $|f|_{x_o}(r)$ de f relative au point x_o définie sur $Pr_{x_o}(A)$.

On vérifie sous peine que si $f(x) \equiv 0$ dans le disque $|x-x_o| > \rho$, on a $|f|_{x_o}(r) = +\infty$ pour $r > \rho$.

Nous n'étudierons pas les rapports entre la fonction $|f|(r)$ et $|f(x)|$. Cette étude est faite dans [2].

Dans le cas où f est somme d'une série de Laurent dans la couronne $\rho_o < |x| < \rho_1$, (ce qui est d'ailleurs le cas pour tout élément analytique défini dans une telle couronne) le polygône de valuation de f est concave, c'est alors le polygône dual du polygône de Newton de la série de Laurent [3].

L'idée essentielle du polygone de valuation a été introduite par M. Krasner [4].

Vu l'absence d'exposé systématique de ses propriétés et son importance dans les techniques utilisées pour l'étude des fonctions analytiques en analyse p-adique, nous avons préféré faire un exposé détaillé des propriétés les plus élémentaires.

Le lecteur se convaincra qu'il n'y a aucune difficulté à ce stade à définir le polygône de valuation d'une fonction analytique.

Comme application triviale démontrons la propriété annoncée dans l'introduction.

<u>Proposition 3</u> : L'image du disque $D: |x-x_o| > \rho$ par la fraction rationnelle $R(x)$ sans pôles dans D est un disque.

Posons $Q(x) = R(x) - R(x_o)$.

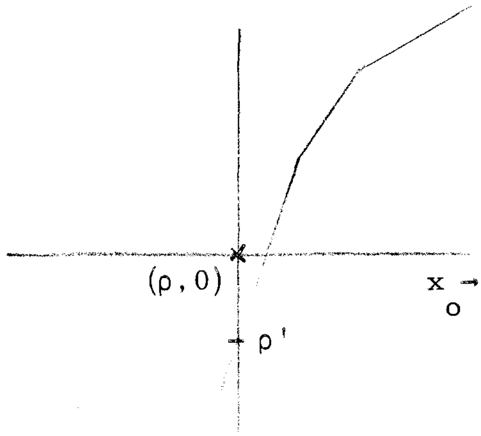
$Q(x)$ n'ayant pas de pôle dans D, son polygône relatif à x_o est concave, on a donc

$|Q|_{x_o}(r) > |Q|_{x_o}(\rho)$ pour $r > \rho$. (*)

$|Q(x)| \geq |Q|_{x_o}(r)$ pour $r = |x-x_o| > \rho$, on a donc

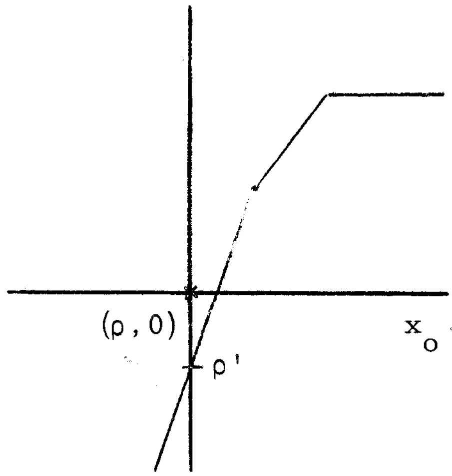
$|R(x) - R(x_o)| > |Q|_{x_o}(\rho) = \rho'$, ce qui prouve que

$R(D)$ est contenu dans le disque $D': |x-R(x_o)| > \rho'$.



polygone de $Q(x)$

Montrons que $R(D)$ coïncide avec D'. Soit $y \in D'$, le polgône de valuation de $R(x)-y$ relatif à x_o est le même que celui de $R(x) - R(x_o) + R(x_o)-y$, c'est donc l'enveloppe inférieur du polygône de $Q(x)$ et du polygône de $R(x_o)-y$ qui est la droite d'ordonnée $R(x_o) - y$ comme $R(x_o)-y > \rho'$, au voisinage du point d'abscisse ρ les polygônes de $R(x)-y$ et de $Q(x)$ coïncident, donc ont une pente positive, ce qui prouve que $R(x)-y$ s'annule dans D donc, $y \in R(D)$.



polygone de $R(x)-y$

On pourrait même prouver que l'image par un élément analytique d'un disque ouvert ou fermé est un disque ouvert ou fermé [5] ainsi que des résultats analogues sur les couronnes.

(*) Comme Q a des zéros dans D, la pente au voisinage du point ρ est positive.

§ 4. - Condition suffisante d'analyticité

Soit A un sous-ensemble ouvert de K.

On dira que le disque D contenu dans $\complement A$ est maximal si tout disque Δ contenant D et contenu dans $\complement A$ coïncide avec D.

Etant donné un point x_o de A, on dira que la suite de disques disjoints maximaux $D_{n_j} : |x-a_{n_j}| > \rho_{n_j}$, $n \in \mathbb{N}$ $1 \leq j \leq J_n$, contenus dans A, est "convenable" si on a $|a_{n_j} - x_o| = r_n$ pour $1 \leq j \leq J_n$, $|a_{n_j} - a_{m_k}| = \inf(r_n, r_m)$ pour $n \neq m$ et $|a_{n_j} - a_{n_k}| > r_n$ pour $j \neq k$, si la suite r_n forme une suite monotone convergeant vers une limite r et si de plus $\{x \mid x-x_o \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ et $\{x \mid x-x_o \leq r_n\} \cap A \neq \emptyset$ pour tout n.

Nous pouvons alors énoncer le :

Théorème 1. Pour que l'ensemble ouvert A soit analytique il suffit que la condition suivante soit réalisée.

(*) Pour tout point x_o de A, pour toute suite "convenable" de disques D_{nj} et pour toute suite d'entiers ≥ 0 p_{nj}, la suite

$$\inf_{1 \leq j \leq J_n} -p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk}(|a_{nk} - a_{nj}| - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

où $p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}$, ne tend pas vers $+\infty$ quand $m \to \infty$.

Ce que nous démontrerons c'est qu'une condition nécessaire pour que A ne soit pas analytique est que l'on ait non -(*). La démonstration est reportée au paragraphe 6 .

Donnons d'abord quelques

Exemples. 1) Les deux disques $D : |x-a| > \rho$ et $\Delta : |x-b| > r$ sont dits indiscernables si l'on a $r = \rho = |a-b|$.

Soit alors la condition :

$(\widetilde{*})$ Pour tout point x_o de A, pour toute suite de disques disjoints maximaux discernables $D_n : |x-a_n| > \rho_n$, contenus dans A, tels que la suite $|x_o-a_n|$ forme une suite monotone convergeant vers une limite r et que $\{x \mid |x-x_o| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$, et $\{x \mid |x-x_o| \leq |x_o-a_n|\} \cap A \neq \emptyset$ pour tout n, la série

$$\sum_N^{\infty} \frac{r-|x_o-a_n|}{\rho_n - x_o - a_n}$$

converge pour N assez grand.

Cette condition appelle quelques remarques car le dénominateur $\rho_n - |x_o - a_n|$ peut être nul. Si le numérateur est nul aussi, on pose que la fraction est nulle (la série n'a alors qu'un nombre fini de termes non nuls). Si aucun numérateur n'est nul, en disant que la série converge pour N grand on exprime en particulier qu'il n'y a qu'un nombre fini de dénominateurs nuls.

On montre alors que :

Proposition 4 $(\widetilde{*})$ entraîne $(*)$

La démonstration de cette proposition sera faite au paragraphe 7.

2) Les ensembles quasi-connexes sont analytiques.

Ce résultat n'est évidement pas nouveau (cf. introduction). Nous allons montre que les quasi-connexes vérifient la condition $(\widetilde{*})$.

Nous utilisons les notations de $(\widetilde{*})$. Dire que A est quasi-connexe c'est dire que si a appartient à A et si $\{x \mid |x-x_o| \leq |x_o-a|\} \cap A \neq \emptyset$ les valuations $|x_o-a|$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Si donc la suite $|x_o-a_n|$ est monotone, à partir d'un certain rang N on a pour $n > N$ $|x_o-a_n| = r$ et la série considérée converge bien puisque tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

3) Soit A un ouvert tel que $\complement A$ soit la réunion d'une suite de disques $D_n : \|x-a_n\| > \rho_n$, où $\|a_n\|$ est une suite monotone convergeant vers r, telle que la série

$$\sum_{N}^{\infty} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$$

converge pour N grand.

Alors A est analytique.

C'est une application directe de $(\tilde{*})$. (Si on veut que les D_n soient disjoints, il faut supposer $\rho_n > \|a_n\|$).

Si tous les $\|a_n\|$ sont distincts, l'ensemble A n'est pas quasi-connexe.

4) Soit A un ouvert tel que $\complement A$ soit la réunion d'une suite de disque $D_n : \|x-a_n\| > \rho_n$, où $\|a_n\|$ est une suite monotone convergeant vers r, tels que

$$\rho_n \geq \|a_n\| + \sum_{k=1}^{n-1} \big| \|a_k\| - r \big| - c$$

c constante arbitraire vérifiant : $c < \sum_{k=1}^{\infty} \big| \|a_k\| - r$

Alors A est analytique.

La démonstration sera donnée au paragraphe 7.

Notons toutefois que si $\sum_{k=1}^{\infty} \big| \|a_k\| - r \big| < +\infty$, ceci entraîne que l'on a $\rho_n - \|a_n\| > \alpha > 0$ et donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$$

converge. La condition donnée est donc plus faible dans ce cas que la condition donnée à l'exemple 3 . On verra d'ailleurs au § 5, exemple 2, que la condition donnée à l'exemple 3 est dans ce cas nécessaire et suffisante.

Toutefois si $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \|a_k\| - r \right| = +\infty$, il n'y a d'implication dans aucun sens, et si A vérifie la condition 4, il peut ne pas vérifier la condition $(\tilde{*})$. Considérons en effet l'exemple suivant

$$r - \|a_n\| = \frac{1}{n} \qquad\qquad \rho_n = \|a_n\| + \operatorname{Log} n$$

(Il peut arriver que $\frac{1}{n}$ n'appartiennent pas au groupe de valuation de K. Il suffit alors de choisir $\|a_n\|$ tel que $\frac{1}{n+1} < r - \|a_n\| \leq \frac{1}{n}$).

La série $\sum \frac{1}{n \log n}$ diverge, mais les conditions de 4 sont vérifiées.

5) Donnons des formes affaiblies des conditions 3 et 4. On considère des ensembles du même type. Alors si

$\rho_n \geq \mu_n$ où μ est une constante > 0 arbitraire

l'ensemble A est analytique.

Ce résultat est une conséquence immédiate de l'exemple 4. (La démonstration est laissée au lecteur).

On considère toujours des ensembles du même type. Alors si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \left| r - \|a_k\| \right|$ converge et si $\rho_n \geq c > r$ l'ensemble A est analytique. En effet, pour n grand, on a alors $\rho_n - \|a_n\| > \frac{c-r}{2}$ et le résultat découle alors directement du critère 3.

Nous verrons par contre que si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \left| r - \|a_k\| \right|$ diverge et si $\rho_n \leq c$ A n'est pas analytique (§. 5, exemple 3).

6) Donnons enfin un exemple plus sophistiqué. Soit A un ensemble ouvert dont le complémentaire est la réunion d'une famille de disques disjoints D_n, $\|x - a_n\| > \rho_n$; si $\rho_n > 0$ pour $n > N$ (N arbitraire) et si la série $\sum_{N}^{\infty} \frac{1}{\rho_n}$ converge, alors A est analytique.

Pour prouver cette assertion, on démontre d'abord que si un disque D, $\|x-a\| > \rho$, est contenu dans le complémentaire de A, il est nécessairement contenu dans un des D_n, ce qui prouve que les D_n ont les seuls disques maximaux. Admettant provisoirement ce résultat, on applique alors la proposition 4 : en effet, soit $\Delta_n : \|x-a_n\| > r_n$ une suite de disques maximaux contenus dans $\complement A$ avec $\|x_o - a_n\|$ convergeant vers r ; comme la suite $\{\Delta_n\}$ est une sous-suite de la suite $\{D_n\}$ $r_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}$ converge, donc pour n assez grand, on a $\|x_o - a_n\| \leq \frac{r_n}{2}$ et $|\, r - \|x_o - a_n\| \,| \leq c$, donc $\left| \frac{r - \|x_o - a_n\|}{r_n - \|x_o - a_n\|} \right| \leq \frac{2c}{r_n}$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r - \|x_o - a_n\|}{r_n - \|x_o - a_n\|}$ converge.

Prouvons maintenant que les D_n sont les seuls disques maximaux. Soit donc D $\|x-a\| > \rho$, un disque qui ne soit contenu dans aucun des D_n. I faut prouver que D intersecte A.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} < +\infty$, $\rho_n > 0$, on voit que $\rho_n \to +\infty$. Soit r_k la suite croissante des valeurs prises par les ρ_n. On notera que chaque valeur r_k ne peut être prise qu'un nombre fini de fois. Soit r_i le plus petit des r_k supérieur ou égal à ρ. Prenons $i = 1$ pour simplifier. Si $\rho = r_1$ et si D est le disque circonférencié $\|x-a\| \geq \rho$, comme il n'y a qu'un nombre fini de disques D_n de rayon e^{-r_1} contenu dans D, il existe un disque non circonférencié Δ_1, contenu dans D, de rayon e^{-r_1} qui ne rencontre aucun des disques D_n de rayon e^{-r_1} et D n'est pas circonférencié, on peut prendre $\Delta_1 = D$. Si enfin $\rho \neq r_1$, on peut encore trouver un disque Δ_1, contenu dans D, de rayon e^{-r_1} qui ne rencontre aucun des disques D_n de rayon e^{-r_1}. De même on voit qu'il existe dans Δ_1 un disque Δ_2 de rayon e^{-r_2} qui ne rencontre aucun des disques de rayon e^{-r_2}. En continuant de même, on construit ainsi une suite de disques emboîtés Δ_n, de rayons tendant vers 0 et tels que le disque Δ_k n'intersecte aucun des disques D_n de rayon e^{-r_i} $i \leq k$. Puisque l'espace K est complet, l'intersection $\bigcap_n \Delta_n$ est non vide (et réduite à un point) on voit de plus que $\bigcap_n \Delta_n$ n'intersecte aucun des D_n, donc est contenue dans A. Ce qui prouve que $D \cap A \neq \emptyset$.

Montrons sur cet exemple combien la classe des ensembles analytiques se distingue de la classe des ensembles quasi-connexes.

Choisissons une suite de points a_n tels que $\| a_n \| \neq \| a_m \|$ pour $m \neq n$ et tels que la suite $\| a_n \|$ soit dense dans l'intervalle $[-\infty, 0]$. Choisissons alors une suite ρ_n avec $\rho_n \geq \| a_n \|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} < +\infty$. Soit D_n le disque $\| x - a_n \| > \rho_n$. $A = \complement \bigcup_n D_n$ est donc analytique. On voit pourtant qu'étant donné un point quelconque x de A on peut toujours trouver un point y de A tel qu'il y ait une infinité de cercles centrés en x et de rayons moindres que $|x-y|$ qui intersectent $\complement A$, alors que pour un quasi-connexe il ne pourrait exister qu'un nombre fini de tels cercles.

<u>Remarque 1</u> : La condition $(*)$ n'est pas stable par intersection. Autrement dit, si A et B sont deux ouverts vérifiant $(*)$ $A \cap B$ peut ne pas vérifier $(*)$. Nous allons le montrer sur un exemple. [En fait, nous prouverons même (proposition 6) que la classe des ensembles analytiques n'est pas stable par intersection].

Soit a_n une suite de points de K tels que $\frac{1}{n} < \| a_n \| \leq \frac{1}{n-1}$. Soit b_n une suite de points de K tels que $\| b_n \| = \| b_n - a_n \| = \| a_n \|$. Posons $\rho_n = \| a_n \| + \operatorname{Log} n$. Soient D_n et Δ_n respectivement les disques $\| x - a_n \| > \rho_n$, $\| x - b_n \| > \rho_n$. $A = \complement \bigcup_n D_n$ et $B = \complement \bigcup_n \Delta_n$ vérifient $(*)$ ainsi qu'il résulte de l'exemple 4. Dans $\complement (A \cap B)$ considérons la suite de disques $D_k : \| x - c_k \| > r_k$ avec $c_{2n} = a_n$, $c_{2n-1} = b_n$, $r_{2n} = r_{2n-1} = \rho_n$.

Choisissons $p_k = 1$ et $x_o = 0$. On obtient :

$$-p_{2n}(r_{2n} - \| c_{2n} \|) + \sum_{k=1}^{2n-1} p_k (\| c_k \| - \| c_{2n} \|) = -\operatorname{Log} n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \| a_k \| - 2(n-1) \| a_n \|$$

$$-p_{2n-1}(r_{2n-1} - \| c_{2n-1} \|) + \sum_{k=1}^{2(n-1)} p_k (\| c_k \| - \| c_{2n-1} \|) = -\operatorname{Log} n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \| a_k \| - 2(n-1) \| a_n \|$$

or $\quad 2\sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\| - (2n-1)\|a_n\| > 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 2\,\frac{n-1}{n-1} > 2\log n - 2$

et donc lorsque $n \to \infty$, $-p_n(r_n - \|c_n\|) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(\|c_k\| - \|c_n\|)$ tend vers $+\infty$, ce qui montre que $A \cap B$ ne vérifie pas la condition $(\ast)$.

§ 5. - Condition nécessaire d'analyticité

Nous noterons $(\hat{\ast})$ la condition $(\ast)$ où l'on suppose de plus que p_{nj} est de la forme $p_{nj} = p^{\alpha_{nj}}$ où p est la caractéristique des classes résiduelles, α_{nj} est entier et de plus $\alpha_{nj} \to \infty$ quand $n \to \infty$.

La condition $(\hat{\ast})$ s'énonce donc :

$(\hat{\ast})$ Pour tout point x_o de A, pour toute suite "convenable" de disques D_{nj} pour toute suite d'entiers ≥ 0 de la forme $p_{nj} = p^{\alpha_{nj}}$ avec $\inf_{1 \leq j \leq J_n} \alpha_{nj}$ tendant vers l'infini avec n, la suite

$$\inf \; -p_{nj}(p_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n) + \sum_{n=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

où $p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}$, ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

on a alors le :

<u>Théorème 2</u> : Pour que l'ensemble ouvert A soit analytique, il faut que la condition $(\hat{\ast})$ soit réalisée.

Nous montrerons que si non - $(\hat{\ast})$ a lieu, on peut construire explicitement un élément analytique sur A, nul sur un ouvert de A et non identiquement nul.

La démonstration est reportée au paragraphe 8 .

Un exemple trivial d'ensemble non analytique est le complémentaire d'une couronne $A = \complement\Gamma$ avec $\Gamma ; r < \|x-a\| < R$.

Nous allons donner des exemples moins triviaux.

Exemples : 1) une forme affaiblie du théorème 2 est la suivante :

<u>Proposition 5</u> : Soit A un ensemble ouvert. S'il existe un point x_o de A et une suite de disques D_n, $\|x-a_n\| > \rho_n$, contenus dans $\complement A$ tels que l'on ait $\|a_n - a_m\| = \inf(\|x_o-a_n\|, \|x_o-a_m\|)$ pour $m \neq n$, que $\|x_o-a_n\|$ forme une suite monotone convergeant vers r, que $\{x \mid \|x-x_o\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ et $\{x \mid \|x-x_o\| \leq \|x_o-a_n\|\} \cap A \neq \emptyset$ pour tout n, que $\rho_n - \|a_n-x_o\|$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini, et enfin que la série $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{r-\|a_n-x_o\|}{\rho_n - \|a_n-x_o\|}$ diverge pour tout N, alors A n'est pas analytique.

En effet, on voit d'abor que la suite D_n forme une suite "convenable" (on a $J_n = 1$ pour tout n).

Si $\rho_n = \|a_n - x_o\|$ avec $r \neq \|a_n - x_o\|$ pour une infinité d'indices, alors, en nous restreignant éventuellement à une sous-suite, on peut supposer que ceci a lieu pour tout n. On choisit l'entier α_n tel que

$$p^{\alpha_n - 1} < \frac{1}{|r-\|a_n-x_o\||} \leq p^{\alpha_n}$$

α_n tend bien vers l'infini puisque $r - \|a_n-x_o\| \to 0$:

Si $\rho_n = \|a_n - x_o\|$ avec $r \neq \|a_n - x_o\|$ seulement pour un nombre fini d'indices, en négligeant ces termes on peut toujours supposer que l'on a $\rho_n - \|a_n - x_o\| \neq 0$.
On choisit alors α_n tel que :

$$p^{\alpha_n - 1} < \frac{1}{\rho_n - \|a_n-x_o\|} \leq p^{\alpha_n}$$

α_n tend bien vers l'infini puisque $\rho_n - \|a_n - x_o\| \to 0$.

On vérifie alors que dans les deux cas, avec $p_n = p^{\alpha_n}$

$$c_n = -p_n(\rho_n - \|a_n - x_o\|) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m \left| \|a_n - x_o\| - \|a_m - x_o\| \right|$$

tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

En effet, $p_n(\rho_n - \|a_n - x_o\|) = 0$ dans le premier cas

et $p_n(\rho_n - \|a_n - x_o\|) < p$ dans le deuxième cas. De plus, d'après le lemme 1, § 7 : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n-1} p_m \left| \|a_n - x_o\| - \|a_m - x_o\| \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n-1} p_m \left| r - \|a_m - x_o\| \right|$

et dans les deux cas, cette dernière série diverge.

La proposition résulte donc du théorème 2.

2) De cette proposition on déduit le :

Corollaire 2 : Soit A un ouvert tel que $\complement A$ soit la réunion d'une suite de disques disjoints D_n, $\|x - a_n\| > \rho_n$, $(\rho_n > \|a_n\|)$ avec $\|a_n - a_m\| = \inf(\|a_n\|, \|a_m\|)$ où $\|a_n\|$ est une suite monotone convergeant vers r et telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r - \|a_n\|$ soit convergente. Alors pour que A soit analytique il faut et il suffit que la série $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \dfrac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$ converge pour N grand.

On a déjà vu que cette condition était suffisante au pragraphe 4, exemple 3. Montrons qu'elle est nécessaire.

Il faut montrer que si $\sum\limits_{N}^{\infty} \dfrac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$ diverge pour tout N, A n'est pas analytique. S'il y a une infinité de n tels que $\rho_n - \|a_n\| = 0$ et $r - \|a_n\| \neq 0$, on sait déjà que A n'est pas analytique. Supposons donc que ce n'est pas le cas, on peut même supposer que $\rho_n - \|a_n\| \neq 0$ pour tout n. Nous allons alors montrer qu'on peut extraire une sous-suite n_k telle que $\rho_{n_k} - \|a_{n_k}\| \to 0$ quand $k \to \infty$, et que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{r - \|a_{n_k}\|}{\rho_{n_k} - \|a_{n_k}\|}$ diverge, il résultera alors de la proposition 5 que A n'est pas analytique.

Puisque $\Sigma\, r - |a_n|$ converge et que $\Sigma \dfrac{r-|a_n|}{\rho_n - |a_n|}$ diverge, on voit que la série $\displaystyle\sum_{\rho_n - |a_n| < 1} \frac{r-|a_n|}{\rho_n - |a_n|}$ diverge aussi. Choisissons alors les indices $n_1 \dots n_{k_1}$ tels que $\rho_{n_i} - |a_{n_i}| < 1$ pour $1 \le i \le k_1$ et $\displaystyle\sum_{1 \le i \le k_1} \frac{r-|a_{n_i}|}{\rho_{n_i} - |a_{n_i}|} > 1$. Mais alors la série $\displaystyle\sum_{\substack{n > n_{k_1} \\ \rho_n - |a_n| < \frac{1}{2}}} \frac{r-|a_n|}{\rho_n - |a_n|}$ diverge aussi. On peut donc choisir des indices $n_{k_1+1} \dots n_{k_2}$ tels que $\rho_{n_i} - |a_{n_i}| < \frac{1}{2}$ pour $k_1 < i < k_2$ et $\displaystyle\sum_{k_1 < i \le k_2} \frac{r - |a_{n_i}|}{\rho_{n_i} - |a_{n_i}|} > 1$.

De proche en proche on peut donc choisir la suite croissante d'indices n_k telle que $\rho_{n_i} - |a_{n_i}| < \frac{1}{m}$ pour $k_{m-1} < i \le k_m$ et $\displaystyle\sum_{k_{m-1} < i \le k_m} \frac{r - |a_{n_i}|}{\rho_{n_i} - |a_{n_i}|} > 1$. Cette suite n_k est donc la suite cherchée.

3) Soit A un ouvert tel que A soit la réunion d'une suite de disques disjoints D_n, $|x - a_n| > \rho_n$, $(\rho_n > |a_n|)$ avec $|a_n - a_m| = \inf(|a_n|, |a_m|)$ où $|a_n|$ est une suite monotone convergeant vers r et telle que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r - |a_n|$ soit divergente. Alors, s'il existe N tel que pour tout $n > N$, on ait

$$\frac{\sum_1^{n-1} |a_n| - |a_k|}{\rho_n - |a_n|} \ge c \ge p \tag{1}$$

A n'est pas analytique. En particulier si $\rho_n \le R$ à partir d'un certain rang, A n'est pas analytique.

Fixons nous une constante $h : \frac{p}{c} < h < 1$.

Nous allons montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers α_n tendant vers l'infini telle que (on pose $p_n = p^{\alpha_n}$) pour n assez grand, on ait :

$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k \left|\, |a_n| - |a_k| \,\right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left|\, |a_n| - |a_k| \,\right|} \ge \frac{h}{p} \tag{2}$$

On construit cette suite par récurrence. Soit M tel que

$\|a_1\| = \|a_2\| = \dots = \|a_{M-1}\| \neq \|a_M\|$: on choisit $\alpha_1 = \dots = \alpha_M = 0$; pour $n > M$

si $\dfrac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|}{p_{n-1} \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|} < h$, on prend $\alpha_n = \alpha_{n-1}$, si $\dfrac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|}{p_{n-1} \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|} \geq h$

on prend $\alpha_n = \alpha_{n-1} + 1$.

Montrons que cette suite satisfait aux conditions indiquées. On voit sans peine que c'est une suite croissante.au sens large. Il en résulte que l'on a :

$$\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| \leq p_{n-1} \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| .$$

Pour démontrer l'inégalité (2) nous utiliserons deux remarques (dont les démonstrations, faciles, sont laissées au lecteur).

i) Soient a_1, b_1, a_2, b_2 , c et d des nombres réels ≥ 0 . Les inégalités $\frac{c}{d} \leq \frac{a_1}{b_1}$, $\frac{c}{d} \leq \frac{a_2}{b_2}$ entraînent l'inégalité $\frac{c}{d} \leq \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$.

ii) Soit $p_1, \dots, p_n$ une suite croissante de n nombres réels > 0 et $u_1, \dots, u_n$ une suite décroissante de n nombres réels ≥ 0 tels que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Prouvons alors que l'inégalité (2) entraîne l'inégalité

$$(3) \qquad \frac{\sum_1^{n} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} \geq \frac{h}{p}$$

En effet, d'après la remarque ii on voit que

$$\sum_1^{n-1} p_k \frac{\left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|}{\sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|} \leq \sum_1^{n-1} p_k$$

Donc

$$(4)\qquad \frac{\sum_1^{n-1} p_k}{p_n} \geq \frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|} \geq \frac{h}{p}$$

Comme
$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} = \frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| + \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right| \sum_1^{n-1} p_k}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| + \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right| \; p_n}$$

Il résulte de (2) , (4) et de la remarque i que l'on a :

$$(5)\qquad \frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} \geq \frac{h}{p}$$

Comme d'autre part :

$$(6)\qquad \frac{p_n \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right|}{p_n \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right|} = 1 \geq \frac{h}{p}$$

On déduit (3) de (5) , (6) et de la remarque i .

Démontrons alors (2) par récurrence. Si la formule est vraie pour n on a alors (3).

Si $\dfrac{\sum_1^{n} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} < h$ on a $p_{n+1} = p_n$ et (3) n'est autre que la formule (2) pour $n+1$.

Si $\dfrac{\sum_1^{n} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} \geq h$ on a $p_{n+1} = p \cdot p_n$ et on a donc trivialement la formule (2) pour $n+1$.

Enfin l'inégalité (2) est vraie pour $n = M$ car alors $p_1 = \ldots = p_{M-1} = p$ et $p_M = p^2$ ce qui donne $\dfrac{\sum_1^{M-1} p_k \big||a_n|-|a_k|\big|}{p_M \sum_1^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big|} = \dfrac{1}{p} > \dfrac{h}{p}$

Il reste enfin à prouver que α_n tend vers l'infini. Or si ce n'était pas le cas cela voudrait dire qu'il existe n_o tel que pour $n \geq n_o$ on a $\alpha_n = \alpha_{n_o}$, soit $p_n = p_{n_o}$ et de plus

$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k \big||a_n|-|a_k|\big|}{p_{n-1} \sum_1^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big|} = \frac{p_{n_o} \sum_{n_o}^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big| + \sum_1^{n_o-1} p_k \big||a_n|-|a_k|\big|}{p_{n_o} \sum_{n_o}^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big| + p_{n_o} \sum_1^{n_o-1} \big||a_n|-|a_k|\big|} < h$$

or on a : $\quad \sum_1^{n_o-1} p_k \big||a_n|-|a_k|\big| \leq p_{n_o} \sum_1^{n_o-1} \big||a_n|-|a_k|\big| \leq p_{n_o} \sum_1^{n_o-1} \big|r-|a_k|\big|$

Et puisque la série $\sum_1^{\infty} r-|a_k|$ diverge, il résulte du lemme 1(§ 7) que la suite $\sum_{n_o}^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big|$ tend vers l'infini quand $n \to \infty$; par conséquent la fraction considérée tend vers 1 quand $n \to \infty$, ce qui contredit l'hypothèse $h < 1$. Donc α_n tend vers l'infini avec n.

Pour prouver que A n'est pas analytique, nous allons appliquer le théorème 2 avec $x_o = 0$, la suite "convenable" de disques D_n, et la suite $p_n = p^{\alpha_n}$ construite ci-dessus.

Or il résulte des inégalités (1) et (2) que pour $n > \max(N, M)$ on a

$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k \big||a_n|-|a_k|\big|}{p_n(\rho_n - |a_n|)} = \frac{\sum_1^{n-1} p_k \big||a_n|-|a_k|\big|}{p_n \sum_1^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big|} \quad \frac{\sum_1^{n-1} \big||a_n|-|a_k|\big|}{\rho_n - |a_n|} \geq h \frac{c}{p} > 1$$

(car $\frac{p}{c} < h$).

Par suite :

$$-p_n(\rho_n - a_n) + \sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| \geq \left(1 - \frac{hc}{p}\right) \sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| \geq \left(1 - \frac{hc}{p}\right) \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|$$

et ainsi qu'on l'a vu ce dernier terme tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.
Ce qui prouve que A n'est pas analytique.

Notons enfin que comme $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_1^{n-1} (\left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| = +\infty$, si $\rho_n \leq R$, on a $\rho_n - |a_n| \leq T - r - \varepsilon$ à partir d'un certain rang et donc l'inégalité (1) est vérifiée pour n grand.

<u>Application</u>. Nous avons surtout tenu à exposer l'exemple 3 car il va nous servir à construire le contre exemple prouvant la :

<u>Proposition 6</u> : La classe des ensembles analytiques n'est pas stable par intersection finie.

Soient $(a_n^1) \ldots (a_n^{p+1})$ $p+1$ suites de points de K telles que $\|a_n^i\| = r_n$ pour $1 \leq i \leq p+1$, $\|a_n^i - a_n^j\| = r_n$ pour $i \neq j$, avec $\frac{1}{n} < r_n \leq \frac{1}{n-1}$. Posons $\rho_n = r_n + \operatorname{Log} n$. Soient D_n^i, $1 \leq i \leq p+1$ les disques $\|x - a_n^i\| > \rho_n$. On considère $A_i = \bigcup\limits_n D_n^i$ (on reconnait les ensembles considérés au paragraphe 4, remarque 1).
Alors les A_i sont analytiques ainsi qu'il résulte de l'exemple 4, § 4. Par contre $B = \bigcap\limits_{1 \leq i \leq p+1} A_i$ n'est pas analytique car il vérifie les hypothèses de l'exemple 3. En effet, $B = \bigcup \Delta_n$ où Δ_n est le disque $\|x - b_n\| > R_n$ avec pour $n = (k-1)(p+1)+i$ $(1 \leq i \leq p+1)$ $b_n = r_k^i$, $R_n = \rho_k$.

Pour $n = (k-1)(p+1)+i$, $1 \leq i \leq p+1$, on trouve

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1} \|b_j\| - \|b_n\|}{R_n - \|b_n\|} = \frac{(p+1) \sum\limits_{j=1}^{k-1} \|a_j\| - \|a_k\|}{\operatorname{Log} k} \geq \frac{(p+1)[\operatorname{Log} k - 1]}{\operatorname{Log} k}$$

et ce dernier terme est supérieur à $p + \frac{1}{2}$ pour $k > e^{2(p+1)}$.

Remarque 2 : Non seulement la condition $(\tilde{*})$ n'est pas stable par intersection, mais on peut construire deux ensembles vérifiant $(\tilde{*})$ dont l'intersection n'est pas analytique.

Exemple :

Soit ρ_n une suite strictement croissante de nombres > 0 appartenant au groupe additif des valeurs et telle que $\Sigma \frac{1}{\rho_n} < +\infty$.

Soit c_n une suite (dénombrable) de points de K dense dans $-\mathrm{Log}\, 2 \leq \|x\| \leq 0$ (c'est-à-dire la couronne de rayons 1 et 2).

On construit par récurrence les suites de disques $D_n : \|x-a_n\| > \rho_n$, $\Delta_n : \|x - b_n\| > \rho_n$, a_n est le c_k de plus petit indice qui n'appartient pas à $D_1 \cup \ldots \cup D_{n-1} \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_{n-1}$. b_n est un point quelconque de K tel que $\|a_n - b_n\| = \rho_n$ (b_n existe car ρ_n appartient au groupe des valeurs).

Il résulte facilement des hypothèses que les disques D_n et Δ_n sont tous disjoints (car $\rho_n > 0$ et (ρ_n) strictement croissante).

On pose $D_o : \|x\| > 0$, $D_\infty : \|x\| < -\mathrm{Log}\, 2$.

Nos deux ensembles sont $A = D_o \cup D_\infty \cup (\bigcup_n D_n)$, $B = D_o \cup D_\infty \cup (\bigcup_n \Delta_n)$.

Il est trivial que A et B sont ouverts et que $A \cap B = D_o \cup D_\infty$ est non analytique.

Prouvons que A et B sont analytiques. Il suffit de le prouver pour A , la preuve est identique pour B . Soit donc Δ un disque maximal de A . Montrons que Δ est soit un point (cas sans intérêt) soit un Δ_n .

En effet, si Δ n'est pas réduit à un point, c'est un ouvert contenu dans $-\mathrm{Log}\, 2 \leq \|x\| \leq 0$). Δ contient donc un c_k . Comme $c_k \notin A$, $c_k \in B$ (en effet, $\bigcup c_k \subset A \cup B$) . Soit Δ_n $(n \leq k)$ le disque auquel appartient c_k . Montrons que $\Delta = \Delta_n$. Si on avait $\Delta \neq \Delta_n$, on aurait $\Delta \supset \|x - b_n\| \geq \rho_n$ et donc $a_n \in \Delta$ ce qui n'est pas possible puisque $a_n \in A$.

On vérifie alors trivialement qu'on a $(\tilde{*})$.

§ 6. - Démonstration du théorème 1

Remarquons d'abord que si la projection de A relativement à un point x_o de A a une adhérence qui n'est pas réduite à un seul intervalle, A ne vérifie pas la condition (*). (Et dans ce cas A n'est pas analytique). En effet, il existe alors une suite de points a_n de $\complement A$, tels que $\|a_n - x_o\|$ forme une suite décroissante stricte convergeant vers r avec $\{x \mid \|x-x_o\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ et telle que $\{x \mid \|x-x_o\| = \|x_o - a_n\|\} \cap A = \emptyset$. On considère alors la suite de disques $D_n \; \|x-a_n\| > \|x_o - a_n\| = \rho_n$ et une suite p_n telle que $p_n \geq \dfrac{1}{\|a_n\| - r}$. Alors :

$$-p_n(\rho_n - \|x_o - a_n\|) + \sum_1^{n-1} p_k(\|a_k\| - \|a_n\|) \to +\infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

[On voit que $\sum_1^{n-1} p_k(\|a_k\| - \|a_n\|) \to +\infty$ en notant que $\sum_1^{\infty} p_n(\|a_n\| - r) = +\infty$ et en appliquant le lemme 1 (§ 7)].

Nous supposerons désormais que l'adhérence de la projection de A relativement à un point quelconque x_o de A est un intervalle $(m, +\infty)$. Alors le polygone de valuation d'un élément analytique f sur A est bien défini sur tout cet intervalle.

Supposons que A ne soit pas analytique. Cela signifie qu'il existe un élément analytique f sur A nul au voisinage du point x_1 de A et non nul au point x_2 de A .

Considérons le polygone de valuation de f relatif au point x_1 .

Alors comme au voisinage de x_1 , soit pour $\|x-x_1\| > M$, la fonction f(x) est nulle, pour $r > M$ le polygone de valuation de f relatif à x_o se confond avec la droite d'ordonnée $+\infty$. Alors de deux choses l'une :

i) ou bien sur tout l'intervalle I $\|f\|_x(r) = +\infty$

ii) ou bien il existe un point $r \in I$ tel que $\|f\|_x(r) \neq +\infty$ auquel cas le polygone a un nombre infini de sommets pour pouvoir atteindre l'ordonnée $+\infty$ (fig. 1)

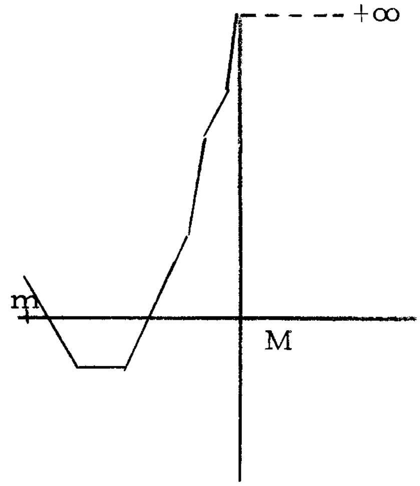


fig. 1

Voyons ce qui se passe alors dans le cas i).

Considérons le polygone de valuation de f relatif au point x_2. Comme on a $f(x_2) \neq 0$ dans un voisinage de x_2, soit pour $\|x-x_2\| > M'$, $\|f(x)\|$ reste constant (car ceci est vrai pour les fractions rationnelles) donc pour $r > M'$ le polygone se confond avec la droite d'ordonnée $\|f(x_2)\|$.

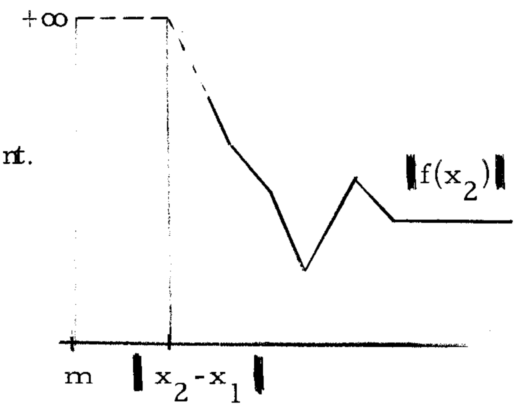


fig. 2

Si $\|x_2-x_1\| > m$, pour $r < \|x_2-x_1\|$ le polygone relatif à x_2 et le polygone relatif à x_1 coïncident. Donc le polygone a un nombre infini de sommets pour pouvoir atteindre l'ordonnée $+\infty$ (fig. 2).

Si $\|x_2-x_1\| = m$ on ne sait rien du polygone de valuation de f relatif à x_2. Nous allons voir pourtant qu'il doit atteindre l'ordonnée $+\infty$ au point m ce qui lui donnera un aspect analogue au cas précédent (fig. 3).

En effet, soit R_n la suite de fractions rationnelles approximant f. Quel que soit M (aussi grand qu'on le veut), il existe un indice n_M tel que $\|f(x)-R_{n_M}(x)\| \geq M$ sur A.

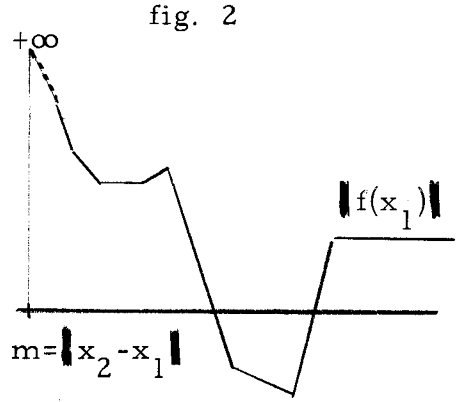


fig. 3

Comme le polygone de f relativement au point x_o est la droite $+\infty$, ceci signifie que le polygone de R_{n_M} est situé au-dessus de la droite d'ordonnée M , c'est-à-dire que pour $r \geq m$ on a $\| R_{n_M} \|_{x_1} (r) \geq M$. Mais R_{n_M} est défini partout dans K , son polygone est donc défini aussi pour $r < m$. Son polygone relatif au point x_1 et son polygone relatif au point x_2 coïncident pour $r \leq m$. On aura donc $\| R_{n_M} \|_{x_2} (r) \geq M$. Mais comme la partie du polygone de f et la partie du polygone de R_{n_M} situées en dessous de la droite d'ordonnée M coïncident (puisque R_{n_M} approxime f à M près) on doit avoir aussi $\| f \|_{x_2} (m) \geq M$. Ceci étant vrai pour tout M , on a donc $\| f \|_{x_2} (m) = +\infty$.

En conclusion si A n'est pas analytique, on peut trouver un élément analytique f sur A et un point x_o de A tel que le polygone de valuation de f relatif à ce point atteigne l'infini en un point r image de A mais ne soit pas confondu avec la droite $+\infty$. Pour ce faire, ce polygone doit avoir une infinité de changements de pente en des points $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ formant une suite strictement monotone convergeant vers r .

Désormais, pour simplifier les notations nous supposerons que $x_o = 0$, et nous noterons $\| f \|_{x_o}$ simplement $\| f \|$. Nous supposerons de plus que la suite r_n est croissante. Le cas d'une suite décroissante s'en déduit sans peine moyennant un changement de signe.

Soient $p_2, \ldots, p_n, \ldots$ les changements de pente du polygone aux points d'abscisses $r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Soit p_1 la pente du côté du polygone situé à droite du point d'abscisse r_1 ($p_1, \ldots, p_n$ sont des entiers ≥ 0) . On a alors :

$$\| f \| (r_n) = \| f \| (r_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{i} p_k \right) (r_{i+1} - r_i) = \| f \| (r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k)$$

Si nous nous restreignons à la sous-suite des sommets pour lesquels le changement de pente est positif (on notera encore cette sous-suite $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ avec les changements de pente > 0 , $p_1, \ldots, p_n, \ldots$)

$$\| f \| (r_n) \leq \| f \| (r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k)$$

Comme $\|f\|(r_n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$, à fonction $\sum_{k=1}^{n-1} p_k(r_n - r_k) \to +\infty$.

Etudions alors comment se comporte la fonction f dans le cercle $\|x\| = r_n$.

Pour cela approximons f par une fraction rationnelle R de telle sorte que l'on ait sur A $\|f(x) - R(x)\| > \|f\|(r_n) + 1$.

Comme les polygones de f et de R coïncident en dessous de la droite d'ordonnée $\|f\|(r_n) + 1$, il coïncident en particulier au voisinage du point r_n, donc le polygone a un changement de pente p_n, ce qui prouve que sur le cercle $\|x\| = r_n$, R a p_n pôles de plus que de zéros. Comme R a un nombre fini de pôles (et de zéros), il existe un nombre fini I_n de disques intérieurs du cercle $\|x\| = r_n$ où R a plus de pôles que de zéros. Soient p_n^i les différences entre les nombres de pôles et de zéros dans ces disques Δ_n^i. On a :

$$\sum_{i=1}^{I_n} p_n^i \geq p_n .$$

Si Δ_n^i intersecte A, soit y un point appartenant à cette intersection. Considérons les polygones de valuation de f et R relativement à ce point. Alors p_n^i est la pente du côté du polygone de R situé à droite du sommet d'abscisse r_n. Comme d'autre part $\|f\|_y(r_n) = \|f\|(r_n)$, les polygones de f et R coïncident au voisinage de ce point; ce qui prouve que p_n^i ne dépend pas de la fraction rationnelle R telle que $\|f(x) - R(x)\| > \|f\|(r_n) + 1$.

S'il existe des disques intérieurs du cercle $\|x\| = r_n$ contenus dans $\complement A$, la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros d'une fraction rationnelle approximante peut varier avec la fraction approximante, mais la somme de ces différences pour tous ces disques reste constante. (Les disques sont indiscernables d'après la définition de l'exemple 1, § 4). Nous pourrons répartir arbitrairement ces différences dans ces différents disques. Cette répartition n'influera pas sur les formules que nous établirons comme le lecteur pourra le vérifier.

On renumérote la suite (r_n) en comptant I_n fois chaque valeur r_n, et en lui associant successivement chacun des p_n^i. On obtient ainsi une suite croissante (et non plus strictement croissante) de nombres que nous noterons encore r_n, auxquels sont associés des nombres entiers > 0 p_n. Ce sont les suites qui interviennent dans l'énoncé de la condition (*). On a bien $\{x \mid x \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ et $\{x \mid |x| \leq r_n\} \cap A \neq \emptyset$.

Enfin $\quad \|f\|(r_n) \leq \|f\|(r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k) \qquad (1)$

Soit alors Δ_n le disque ouvert de rayon r_n, contenu dans le cercle $\|x\| = r_n$ où R a p_n pôles de plus que de zéros. Nous allons faire une répartition convenable de ces p_n pôles dans des disques maximaux disjoints D_{n_j} de $\complement A$ contenus dans Δ_n.

Si $\Delta_n \subset \complement A$, c'est un disque maximal de $\complement A$, on prend $J_n = 1$, $D_n = D_n^1 = \Delta_n$ et $p_n = p_n^1$.

Si Δ_n n'est pas contenu dans A, soit Δ le plus petit disque fermé qui contient tous les pôles de R situés dans Δ_n.

Si $\Delta \subset \complement A$, on prend $J_n = 1$, $p_n = p_n^1$ et $D_n = D_n^1$ sera le disque maximal de $\complement A$ contenant Δ.

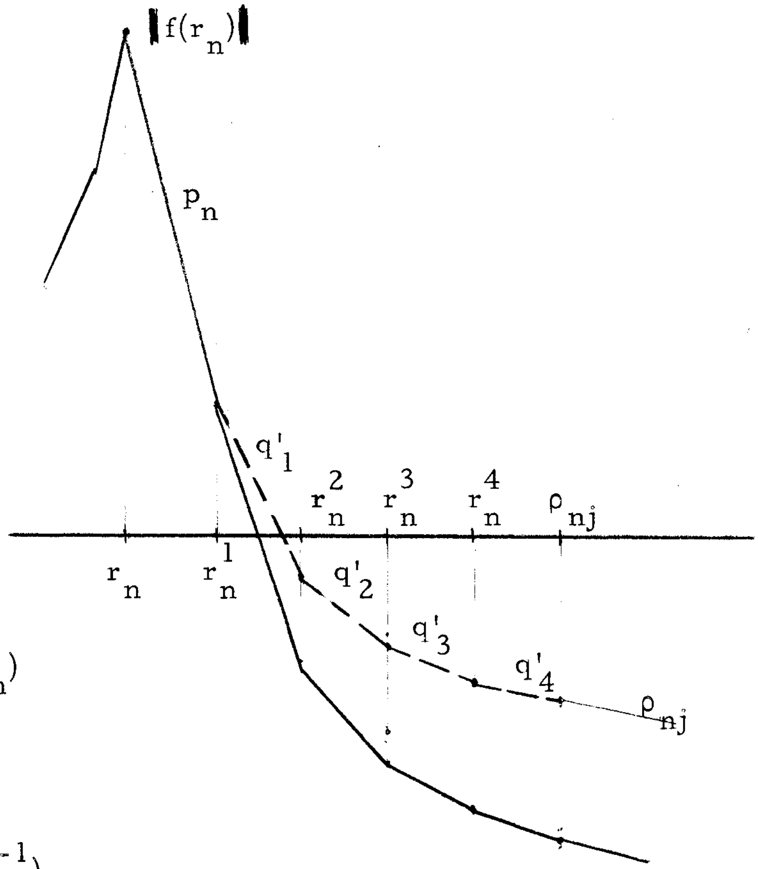
Sinon, il existe un nombre fini $\Delta^1, \Delta^2, \ldots, \Delta^k$ de disques intérieurs de Δ dans lesquels R a $q_1, \ldots, q_k$ pôles de plus que de zéros $(q_j > 0)$ et l'on a $q_1 + q_2 + \ldots + q_k \geq p_n$. Choisissons alors des nombres q'_j tels que $0 \leq q'_j \leq q_j$ et $q'_1 + \ldots + q'_k = p_n$, et supposons que tous les q'_j sont > 0, ce qu'on peut toujours obtenir en restreignant le nombre d'indices.

Si $\Delta^j \subset \complement A$, c'est un disque maximal de $\complement A$ auquel on associe alors l'entier q'_j.

Si Δ^j n'est pas contenu dans $\complement A$, on recommence le raisonnement qu'on vient de faire pour Δ_n. A savoir : si tous les pôles de R situés dans Δ^j se trouvent tous dans un disque maximal, on choisit ce disque maximal auquel on adjoint l'entier q'_j, sinon on considère le plus petit disque fermé contenant ces pôles et les disques intérieurs de celui-ci contenant plus de pôles de R que de zéros auxquels on peut associer des nombres q''_k tels que $\Sigma q''_k = q'_j \ldots$

De proche en proche on obtient ainsi J_n disques maximaux de $\complement A$, D_{nj} $(1 \leq j \leq J_n)$, auxquels sont associés les entiers > 0 p_{nj} $(1 \leq j \leq J_n)$ avec $\sum_{j=1}^{J_n} p_{nj} = p_n$.

Soit D_{nj}, $\| x - a_{nj} \| > p_{nj}$ un de ces disques. Il a été obtenu en considérant la suite de disques emboîtés $\Delta_n^o = \Delta_n$: $\| x - a_{nj} \| > r_n$, Δ_n^1 : $\| x - a_{nj} \| \geq r_n^1$, ... Δ_n^{k-1} ; $\| x - a_{nj} \| \geq r_n^{k-1}$, $\Delta_n^k = D_{nj}$ Nous noterons $\Delta_n'^k$ le disque $\| x - a_{nj} \| > r_n^k$.
Δ_n^k est le plus grand disque fermé qui contient les pôles de R contenus dans $\Delta_n'^{k-1}$.
A $\Delta_n'^k$ on a associé le nombre entier > 0, q'_k qui est plus petit que la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros de R situés dans $\Delta_n'^k$
$(q'_o = p_n$, $q'_k = p_{nj})$.



Considérons le polygone de valuation de R relatif au point a_{nj}.

Pour $r_n^{k-1} < r < r_n^k$ il résulte de ce qu'on a dit sur q'_k que la pente du polygone de R est inférieure à $-q'_k$.

Notons que l'on a :

$$q'_k = \sum_{\| a_{ni} - a_{nj} \| > r_n^k} p_{ni}$$

Comme d'autre part

$$\| R \|_{a_{nJ}} (r_n) = \| R \|_{x_o} (r_n) = \| f \|_{x_o} (r_n)$$

On a

$$\| R \|_{a_{nj}} (\rho_{nj}) \leq \| f \| (r_n) - \sum_{k=1}^{K} p'_k (r_n^k - r_n^{k-1})$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{K} p'_k(r_n^k - r_n^{k-1}) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{\|a_{ni}-a_{nj}\|>r_n^k} p_{ni}(r_n^k - r_n^{k-1})$$

$$= p_{nj}\rho_{nj} + \sum_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i\leq J_n}} p_{ni}\|a_{ni}-a_{nj}\| - \sum_{i=1}^{J_n} p_{ni}r_n$$

$$= p_{nj}(\rho_{nj}-r_n) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{J_n} p_{nk}(\|a_{nk}-a_{nj}\| - r_n)$$

L'image de $A\cap\Delta_n$ relative à a_{nj} contient un ensemble de point dense dans l'intervalle (r_n, ρ_{nj}) puisque D_{nj} est măximal. Le polygone de valuation de f relatif à a_{nj} est dônc bien défini dans cet intervalle. Puisque dans cet intervalle, on a : $\|R\|_{a_{nj}}(r) \leq \|f\|_{x_o}(r_n)$, le polygone de f et celui de R coïncident.

Puisque sauf pour un nombre fini de valeurs de r, $\|R\|_{a_{nj}}(r) = \|R(x)\|$ pour $\|x-a_{nj}\| = r$, on a donc :

$$\inf_{x\in A\cap\Delta_n} \|R(x)\| \leq \|R\|_{a_{nj}}(\rho_{nj}) \leq \|f\|_{x_o}(r_n) - p_{nj}(\rho_{nj}-r_n) - \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{J_n} \rho_{nk}(\|a_{nk}-a_{nj}\| - r_n)$$

Ceci étant vrai pour tout j, on a

$$\inf_{x\in A\cap\Delta_n} \|R(x)\| \leq \inf_{1\leq j\leq J_n} [\|f\|(r_n) - p_{nj}(\rho_{nj}-r_n) - \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{J_n} \rho_{nk}(\|a_{nk}-a_{nj}\| - r_n)]$$

Enfin, comme pour $\|R(x)\| \leq \|f\|(r_n)+1$, $\|R(x)\|$ et $\|f(x)\|$ coïncident. On a finalement, en tenant compte de (1) :

$$\inf_{x\in A\cap\Delta_n} \|f(x)\| \leq f(r_1) + \sum_{n-1}^{n-1} p_n(r_n - r_m) + \inf_{1\leq j\leq J_n} [-p_{nj}(\rho_{nj}-r_n) - \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{J_n} \rho_{nk}(\|a_{nk}-a_{nj}\| - r_n)]$$

Montrons alors que $\inf_{x\in A\cap\Delta_n} \|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, ce qui, associé à l'inégalité ci-dessus, montrera que, si A n'est pas analytique, on a la contion non (*).

Donnons M arbitraire. Il existe N tel que pour $n \geq N$ on ait $\|f\|(r_n) > M$. Soit R une fraction rationnelle tel que pour $x \in A$ on ait $\|f(x)-R(x)\| > M$. Alors on a $\|R\|(r_n) > M$ pour $n > N$. Mais alors, sauf pour un nombre fini de valeurs r_n, on a $\|R(x)\| > M$ pour $\|x\| = r_n$, c'est-à-dire qu'il existe N' tel que pour $n \geq N'$ et $\|x\| = r_n$ on ait $\|R(x)\| > M$. Alors pour $n \geq N'$ et $x \in A \cap \Delta_n$, on a $\|f(x)\| > M$, ce qui prouve que $\inf_{x \in A\cap\Delta_n} \|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

§ 7. - Démonstration des différentes propositions du paragraphe 4.

Nous utiliserons constamment le :

Lemme 1 : Soient (p_n) une suite de nombres ≥ 0, (r_n) une suite monotone de réels convergeant vers une limite r. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n| = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |r_k - r|$$

En particulier, les deux termes de cette égalité sont simultanément finis ou infinis.

En effet, la suite étant monotone, on a : $|r_k - r_n| \leq |r_k - r|$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n| \leq \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r|$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k |r_k - r|$$

Notons que puisque $|r_k - r_{n-1}| < |r_k - r_n|$ pour $k < n-1$, la suite $\sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n|$ est croissante. On a donc pour $m < n$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n| \leq \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n|$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini dans le premier terme, on obtient pour tout m,

$$\sum_{k=1}^{m} p_k |r_k - r| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n|$$

Enfin, en faisant tendre m vers l'infini, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k |r_k - r| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k |r_k - r_n|$$

Démonstration de la proposition 4

Montrons d'abord que la condition (∗) reste inchangée si on suppose que la suite "convenable" de disques D_{nj} est formée de disques discernables.

Supposons par exemple que $D_{nj_1} \dots D_{nj_\ell}$ soient indiscernables mais discernables des disques D_{nj} pour $j \neq j_1 \dots j_\ell$. Posons $p'_{nj_1} = p_{nj_1} + \dots + p_{nj_\ell}$.

On a alors :

$$p_{nj_1}(\rho_{nj_1} - r_n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j_1}}^{J_n} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj_1}\| - r_n) =$$

$$= p_{nj_\ell}(\rho_{nj_\ell} - r_n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j_\ell}}^{J_n} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj_\ell}\| - r_n)$$

$$= p'_{nj_1}(\rho_{nj_1} - r_n) + \sum_{k\neq j_1,\dots,j_\ell} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj_1}\| - r_n)$$

et pour $j \neq j_1 \dots j_\ell$

$$p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J_n} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n) =$$

$$= p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) + \sum_{k\neq j, j_1,\dots,j_\ell} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n)$$
$$+ p'_{nj_1}(\|a_{nj_1} - a_{nj}\| - r_n)$$

On voit donc que si on supprime les disques $D_{nj_2} \dots D_{nj_\ell}$, et si on remplace p_{nj_1} par p'_{nj_1} la condition (*) reste inchangée (on notera que p_n ne change pas).

On peut voir qu'il en est de même si ce sont des disques $D_n(\rho_n = r_n)$ qui sont indiscernables.

Soit alors la condition :

(*') Pour tout point x_o de A , pour toute suite de disques disjoints maximaux discernables D_n , $\|x-a_n\| > \rho_n$, contenus dans $\complement A$ tels que la suite $\|x_o-a_n\|$ forme une suite monotone convergeant vers une limite r et que $\{x \mid \|x-x_o\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ et $\{x \mid \|x-x_o\| \leq \|x_o-a_n\|\} \cap A \neq \emptyset$ pour tout n, la suite

$$-p_n(\rho_n-r_n) + {}_{n=1}\, p_m\,|r_n-r_m| \quad ,$$

où $r_n = \|x_o-a_n\|$, ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Montrons que (*') entraîne (*) , c'est-à-dire que si (*') est vérifié alors (*) l'est aussi.

Soit donc D_{ni} une suite "convenable" de disques discernables.

Remarquons que dans la formule donnée dans (*) , on a :

$$p_m|r_n-r_m| = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}\,\big|\|a_{ni}-x_o\| - \|a_{mj}-x_o\|\big| \qquad 1 \leq i \leq J_n$$

et remarquons d'autre par que pour $1 \leq i \leq J_n$, $1 \leq j \leq J_n$, on a :

$$p_{mj}\,\big|\|a_{ni}-x_o\| - \|a_{nj}-x_o\|\big| = 0$$

Posons pour $m = \sum_{k=1}^{n-1} J_k + j - 1$, $\Delta_m = D_{nj}$; et $q_m = p_{nj}$. La suite de disque Δ_m est conforme aux prémices de la condition $(*')$. Si $(*')$ est vérifiée, on en déduit que

$$-p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$ et à fortiori

$$\inf_{1 \leq j \leq J_n} -p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk}(|a_{nk} - a_{nj}| - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

ne tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$, ce qui montre que $(*)$ est vérifiée.

Montrons alors que $(\tilde{*})$ entraîne $(*')$.

Une suite de disques D_n satisfaisant aux prémices de $(*')$ satisfait aussi aux prémices de $(\tilde{*})$. Il faut donc montrer que si pour une telle suite

$$\sum_{N}^{\infty} \frac{r - r_n}{\rho_n - r_n} < +\infty$$

pour N grand, pour toute suite d'entiers > 0 , p_n , la suite

$$-p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Notons d'abord que si $(\tilde{*})$ est vérifiée et si pour une infinité de n $\rho_n - r_n = 0$, c'est qu'à partir d'un certain rang N , pour $n > N$, $r - r_n = 0$, mais alors $(*')$ est bien vérifiée pour toute suite p_n .

Nous supposerons donc que pour $n \geq N$, on a $\rho_n - r_n \neq 0$, et pour simplifier nous prenons $N = 1$.

Soit alors une suite d'entiers > 0 (p_n).

Si la suite $p_n(\rho_n - r_n)$ est bornée, on voit que la suite

$$\sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m| = \sum_{m=1}^{n-1} p_m(\rho_m - r_m) \frac{|r_m - r_n|}{\rho_m - r_m}$$

est bornée car $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} \frac{|r_m - r_n|}{\rho_m - r_m} \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{|r_m - r|}{\rho_m - r_m}$ l'est aussi.

Donc $\displaystyle -p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_m - r_n|$ est bornée supérieurement et donc ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Si la suite $p_n(\rho_n - r_n)$ n'est pas bornée, soit (n_j) une suite d'entiers telle que

$$p_{n_j}(\rho_{n_j} - r_{n_j}) \geq p_n(\rho_n - r_n) \quad \text{pour } n \leq n_j$$

D'autre part, puisque $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{|r - r_n|}{\rho_n - r_n} < +\infty$, il existe un indice n_o tel que pour $n > n_o$

on ait :
$$\sum_{m=n_o}^{n-1} \frac{|r_m - r_n|}{\rho_m - r_m} \leq \sum_{m=n_o}^{+\infty} \frac{|r_m - r|}{\rho_m - r_m} < 1$$

Alors :

$$-p_{n_j}(\rho_{n_j} - r_{n_j}) + \sum_{m=1}^{n_j - 1} p_m |r_m - r_n| \leq p_{n_j}(\rho_{n_j} - r_{n_j})\left[-1 + \sum_{m=n_o}^{n_j - 1} \frac{|r_m - r_{n_j}|}{\rho_m - r_m}\right] + \sum_{m=1}^{n_o - 1} \rho_m |r_m - r|$$
$$\leq \sum_{m=1}^{n_o - 1} p_m |r_m - r|$$

ce qui montre que $\displaystyle -p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_m - r_n|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Démonstration de l'exemple 4 du paragraphe 4

On va se ramener à la condition $(*')$.

Remarquons que les seuls disques maximaux de $\complement A$ sont les disques D_n. Si l'on a une suite de disques maximaux discernables Δ_m, auxquels sont associés les entiers > 0 p_n elle forme une sous-suite de la suite D_n. Le lecteur vérifiera que si on ajoute aux disques Δ_n les disques D_n qui n'ont pas été choisis, en leur associant l'entier 0, on ne change pas la condition $(*')$.

Il faut donc montrer que si

$$\rho_n \geq \|a_n\| + \sum_{k=1}^{n-1} \big|\|a_k\| - r\big| - c \quad \text{avec} \quad c < \sum_{1}^{\infty} \big|\|a_k\| - r\big| ,$$

pour toute suite d'entiers ≥ 0 p_n, la suite

$$-p_n(\rho_n - \|a_n\|) + \sum_{m=1}^{n-1} \big|\|a_m\| - \|a_n\|\big|$$

ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Puisque d'après le lemme 1 : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n-1} \big|\|a_m\| - \|a_n\|\big| = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \big|\|a_m\| - r\big|$, on peut trouver n_o tel que l'on ait $\sum\limits_{k=1}^{n_o - 1} \big|\|a_k\| - \|a_{n_o}\|\big| - c \geq 0$, alors on aura pour

$$n \geq n_o , \quad \rho_n - \|a_n\| - \sum_{k=n_o}^{n-1} \big|\|a_k\| - \|a_n\|\big| \geq \sum_{k=1}^{n_o-1} \big|\|a_k\| - \|a_n\|\big| - c \geq \sum_{k=1}^{n_o-1} \big|\|a_k\| - \|a_{n_o}\|\big| - c \geq 0$$

Soit alors une suite d'entiers ≥ 0 (p_n).

Si la suite p_n est non bornée, on peut en extraire une sous-suite p_{n_j} telle que $p_{n_j} \geq p_n$ pour $n \leq n_j$. Alors pour $n_j \geq n_o$

$$-p_{n_j}(\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\|) + \sum_{k=1}^{n_j - 1} p_k(\|a_k\| - \|a_{n_j}\|) \leq$$

$$\leq -p_{n_j}\Big[\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\| - \sum_{k=n_o}^{n_j-1} \big|\|a_k\| - \|a_{n_j}\|\big|\Big] + \sum_{k=1}^{n_o} p_k \big|\|a_k\| - \|a_{n_j}\|\big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_o} p_k \big|\|a_k\| - r\big|$$

et donc $-p_n(\rho_n - \|a_n\|) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(\|a_k\| - \|a_n\|)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

Si la suite p_n est bornée, soit $q = \overline{\lim}\ p_n$; comme p_n est entier, cela signifie en particulier qu'il y a une infinité de n pour lesquels $p_n = q$, soit donc (n_j) une sous-suite telle que $p_{n_j} = q$. D'autre part, il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $p_n > q$, soit donc N tel que pour $n \geq N$, $p_n \leq q$. Alors, pour $n_j \geq N' = \sup(n_o, N)$

$$-p_{n_j}(\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\|) + \sum_{k=1}^{n_j-1} p_k(\|a_k\| - \|a_{n_j}\|)$$

$$\leq -m[\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\| - \sum_{k=N'}^{n_j-1} |\|a_k\| - \|a_{n_j}\||] + \sum_{k=1}^{N'} p_k|\|a_k\| - \|a_{n_j}\||$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N'} p_k|\|a_k\| - r|$$

et donc la suite $-p_n(\rho_n - \|a_n\| + \sum_{k=1}^{n-1} p_k|\|a_k\| - \|a_n\||$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.

§ 8. - Démonstration du théorème 2

Supposons que A ne vérifie pas la condition $(\hat{*})$. Nous allons construire un élément analytique sur A ne vérifiant pas le principe du prolongement analytique.

Soient D_{nj} et p_{nj} les suites de disques et d'entiers indiqués par non - $(\hat{*})$, et pour simplifier, prenons $x_o = 0$.

Si la suite r_n est croissante, l'élément analytique proposé sera la fonction

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{J_n} \left(\frac{x}{x - a_{nj}} \right)^{P_{nj}} \right]$$

Si la suite r_n est décroissante, l'élément analytique proposé sera la fonction

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{J_n} \left(\frac{a_{nj}}{x - a_{nj}} \right)^{P_{nj}} \right]$$

Nous ne ferons la démonstration que dans le premier cas, le deuxième cas se traitant de la même façon.

Notons $R_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{j=1}^{J_k} \left(\frac{x}{x-a_{kj}}\right)^{p_{kj}} \right]$. R_n est une fraction rationnelle sans pôles dans A .

Il s'agit donc de montrer d'abord que la suite R_n converge uniformément sur A , puis de prouver que f est nulle dans un ouvert contenu dans A mais non identiquement nulle dans A .

D'après ($\overset{\wedge}{*}$) $\quad c_n = \inf_{1\le j\le J_n} -p_{nj}(\rho_{nj}-r_n) - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J_n} p_{nk}(|a_{nk}-a_{nj}|-r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m(r_n-r_m)$

tend vers $+\infty$ quand $n\to\infty$, autrement dit, quel que soit M (arbitrairement grand), il existe N tel que $n\ge N$ implique $c_n \ge M$, et en particulier $\sum_{m=1}^{N-1} p_m(r_N-r_m) \ge M$

Soit $x\in A$.

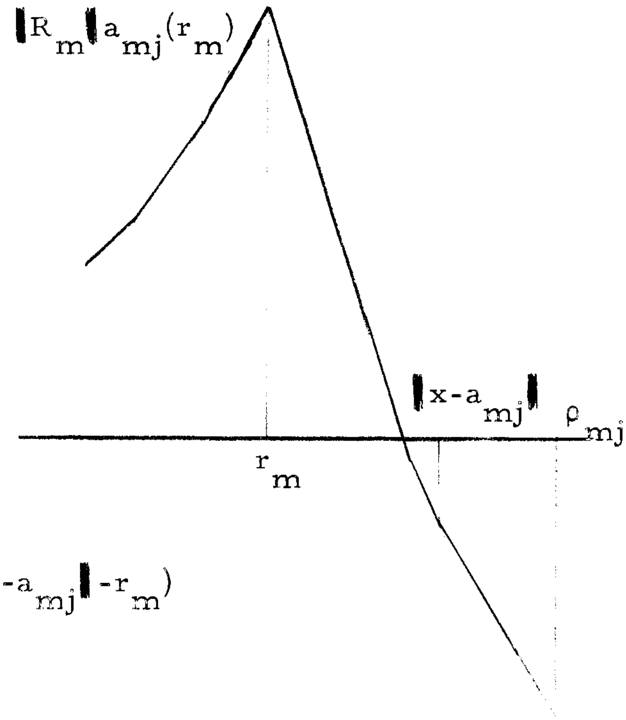
Alors si $|x|\ge r_N$, on a pour $k<N$ $|x-a_{kj}| = r_k$, si de plus on a $|x-a_{kj}| \le |x|$ pour tout k et tout j , on a pour tout $n\ge N$

$$|R_n(x)| \ge \sum_{k=1}^{N-1} p_k(|x|-r_k) \ge \sum_{k=1}^{N-1} p_k(r_N-r_k) \ge M$$

Voyons ce qui se passe si $|x|\ge r_N$ et si pour un m et un i on a $|x-a_{mi}| \ge |x|$, alors on a $n\ge N$, $|x-a_{mj}| > |x|$ pour $1\le j\le J_m$, $|x-a_{nj}| \le |x|$ pour $n\neq m$. Pour $N\le n<m$ on voit comme précédemment que $|R_n(x)| \ge M$.

Soit alors j , $1\le j\le J_m$, tel que $|x-a_{mj}| \ge |x-a_{m\ell}|$ pour $1\le \ell\le J_m$, et considérons le polygone de valuation de R_m relatif à a_{mj} .

On a $\quad |R_m|_{a_{mj}}(r_m) = \sum_{k=1}^{m} p_k(r_m-r_k)$.



Au point d'abscisse $r > r_m$, la pente du polygone est $-\sum_{|a_{m\ell}-a_{mj}| > r} p_{m\ell}$, donc toujours négative. Comme on a $|x-a_{mj}| \leq \rho_{mj}$, on a donc

$$|R_m|_{a_{mj}}(|x-a_{mj}|) \geq |R_m|_{a_{mj}}(\rho_{mj}) =$$

$$-p_{mj}(\rho_{mj}-r_m) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{J_m} p_{m\ell}(|a_{m\ell}-a_{mj}|-r_m)$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} p_k(r_m - r_k) \geq M$$

Considérons alors le polygone de valuation de R_m relatif à x. On a

$$|R_m|_x(|x-a_{mj}|) = |R_m|_{a_{mj}}(|x-a_{mj}|)$$

mais comme R_m n'a ni pôle ni zéro dans le disque ouvert de centre x et de rayon $|x-a_{mj}|$, $|R_m|_x(r)$ est constant pour $r \geq |x-a_{mj}|$, ce qui prouve que

$$|R_m(x)| = |R_m|_x(+\infty) = |R_m|_x(|x-a_{mj}|) \geq M .$$

Enfin, pour $n > m$ on a trivialement $|R_n(x)| = |R_m(x)| \geq M$.

Finalement, pour $x \in A$, $|x| \geq r_N$ et $n \geq N$ on a $|R_n(x)| \geq M$.

Soit p le nombre premier servant à définir la valeur absolue p-adique. On a alors pour $|a| > 0$

$$|(1+a)^p - 1| = |pa + \frac{p(p-1)}{2}a^2 + \ldots + a^p| \geq \inf(p|a|, |a| + \operatorname{Log} p) .$$

Soit $$|(1+a)^p - 1| \geq \begin{cases} p|a| & \text{si } |a| < \dfrac{\operatorname{Log} p}{p-1} \\ |a| + \operatorname{Log} p & \text{si } |a| \geq \dfrac{\operatorname{Log} p}{p-1} \end{cases}$$

Notons de plus que pour $\|b\| \geq \|a\| > 0$ on a $\|(1+b)^p - 1\| \geq \|(1+a)^p - 1\|$ et que pour $\|a\| > 0$ et $\|b\| > 0$

$$\|(1+a)(1+b)-1\| = \|a+ab+b\| \geq \inf(\|a\|, \|b\|).$$

Choisissons alors $N' > N$ tel que $r_{N'} > r_N$ (N' existe bien puisque $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} p_k(r_n - r_k) = +\infty$), soit α l'entier tel que :

$$p^{\alpha-1}(r_{N'} - r_N) < \frac{\operatorname{Log} p}{p-1} \leq p^{\alpha}(r_{N'} - r_N)$$

et soit enfin $N'' > N'$ tel que $\inf \alpha_{nj} \geq \alpha$ pour $n \geq N''$.

Alors pour $x \in A$, $\|x\| \leq r_N$, $m > n \geq N''$, on a :

$$\|R_m(x) - R_n(x)\| = \|R_{N-1}(x)\| + \left\| \prod_{k=N}^{n} \prod_{j=1}^{J_k} \left(\frac{x}{x-a_{kj}}\right)^{p_{kj}} \right\| + \left\| \prod_{k=n+1}^{n} \prod_{j=1}^{J_k} \left(\frac{x}{x-a_{kj}}\right)^{p_{kj}} - 1 \right\|$$

Comme $\dfrac{x}{x-a_{kj}} = 1 + \dfrac{a_{kj}}{x-a_{kj}}$ et que $\left\|\dfrac{a_{kj}}{x-a_{kj}}\right\| = r_k - \|x\| \geq r_{N'} - r_N > 0$

pour $k \geq N'$, en vertu de ce qu'on vient de voir on a :

$$\left\| \prod_{k=n+1}^{n} \prod_{j=1}^{J_k} \left(\frac{x}{x-a_{kj}}\right)^{p_{kj}} - 1 \right\| \geq \inf_{n+1\leq k\leq m} \inf_{1\leq j\leq J_k} p^{\alpha}(r_{N'} - r_N) + (\alpha_{kj} - \alpha)\operatorname{Log} p$$

d'autre part

$$\left\| \prod_{k=N}^{n} \prod_{j=1}^{J_k} \left(\frac{x}{x-a_{kj}}\right)^{p_{kj}} \right\| = 0$$

et $$\|R_{N-1}(x)\| = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{J_k} p_{kj}(\|x\| - \|x-a_{kj}\|) \geq \inf_{1\leq k\leq N-1} \sum_{j=1}^{J_k} p_{kj}(\|a_{kj}\| - p_{kj}),$$

car si pour un ℓ et un i on a $\|x - a_{\ell i}\| > \|x\|$, on a alors $\|x\| = \|a_{\ell i}\| = r_\ell$, $p_{\ell j} \geq \|x - a_{\ell j}\|$ pour $1 \leq j \leq J_\ell$, et $\|x - a_{kj}\| \leq \|x\|$ pour $k \neq \ell$.

Comme $\inf\limits_{1\leq j\leq J_k} \alpha_{kj}$ tend vers $+\infty$ quand $k\to\infty$, on peut trouver N''' tel que pour $k\geq N'''$ on ait :

$$\inf_{1\leq j\leq J_k} \alpha_{kj} \geq \alpha - \frac{p^{\alpha}(r_{N'}-r_N)}{\operatorname{Log} p} - \frac{1}{\operatorname{Log} p} \inf_{1\leq k\leq N-1} \sum_{j=1}^{J_k} p_{kj}(\|a_{kj}\| - p_{kj}) + \frac{M}{\operatorname{Log} p} .$$

Alors, pour $m > n \geq N'''$, $x\in A$, $|x|\leq r_N$, on aura :

$$\|R_m(x) - R_n(x)\| \geq M .$$

Finalement, on a vu que quel que soit M il existe N''' tel que pour $m > n \geq N'''$ et $x \in A$, on ait :

$$\|R_m(x) - R_n(x)\| \geq M .$$

Ce qui montre que la suite $R_n(x)$ converge uniformément sur A vers un élément analytique f.

D'autre part, on a vu que quel que soit M, il existait N tel que $|x| > r_N$ et $n\geq N$ on ait $\|R_n(x)\|\geq M$, ce qui montre que $R_n(x)$ converge vers 0 pour $|x|\geq r$.

Enfin, pour $\|x\|\leq r_1$ et pour tout n, on a : $\|R_n(x)\|\leq 0$; comme $A\cap\{x \mid \|x\|\leq r_1\}\neq\emptyset$, il en résulte que sur cet ensemble f n'est pas nulle.

Ce qui achève la démonstration.

Notons que dans le cas de la suite décroissante r_n, on aurait trouvé que f était identiquement nulle sur l'ouvert non vide $A\cap\{x \mid \|x\|\leq r\}$ et non nulle à l'origine, la convergence uniforme se démontrant comme ci-dessus.

§ 9. - Fonctions analytiques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de prouver que la classe des fonctions analytiques ainsi définie sur les ensembles analytiques est plus vaste que la classe des fonctions analytiques définie sur les quasi-connexes. Précisément :

Théorème 3 : Soit A un ensemble analytique. Si l'intérieur de l'adhérence de A est un quasi-connexe, tout élément analytique sur A se prolonge en un élément analytique sur un quasi-connexe contenant A (et dépendant de l'élément analytique considéré) ; si l'intérieur de l'adhérence de A n'est pas un quasi-connexe, il existe un élément analytique sur A qui ne peut pas être prolongé en une fonction analytique sur un quasi-connexe contenant A.

Soit A un ouvert et supposons que l'intérieur A' de l'adhérence de A soit un quasi-connexe. Soit f un élément analytique A et soit R une fraction rationnelle approximant f sur A : $\|R(x)-f(x)\| \geq M$ pour $x \in A$. Soient $a_1, \dots, a_k$ les pôles de R situés dans A' et posons $B = A' \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. B est un quasi-connexe. Alors toute fraction rationnelle approximant f sur A n'a pas de pôle dans B. En effet, si $\|Q(x)-f(x)\| \geq M'$ pour $x \in A$, on a $\|R(x)-Q(x)\| \geq \inf(M, M')$ pour $x \in A$ et par continuité cette inégalité se prolonge sur B ce qui prouve que Q n'a pas de pôle sur B puisque R n'en a pas.

Alors, si $R_n(x)$ est une suite de fractions rationnelles, convergeant vers f sur A, R_n n'a pas de pôles dans B ; comme c'est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur A on voit comme ci-dessus que c'est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur B et donc R_n converge sur B vers un élément analytique qui prolonge f. Ceci prouve en particulier que A est un ensemble analytique, mais on pourrait le voir directement à partir du critère $(\tilde{*})$.

Si l'intérieur de l'adhérence de A n'est pas un quasi-connexe, c'est qu'il existe un point x_o de A et une suite de disque D_n, $\|x-a_n\| < \rho_n$, contenus dans A avec $\rho_n < +\infty$, $\|x_o - a_n\|$ formant une suite monotone stricte convergeant vers r, et de plus, $\{x \mid \|x-x_o\| \leq \|x_o-a_n\|\} \cap A \neq \emptyset$ $\{x \mid \|x-x_o\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$.

Pour simplifier, prenons $x_o = 0$.

Soit alors b_n une suite de points de K telle que l'on ait $b_n \neq a_n$ pour tout n, $\lim_{n\to\infty} \|b_n - a_n\| - \rho_n = +\infty$ et $\|b_n - a_n\| > \rho_n$ pour tout n.

Alors le contre-exemple cherché est fourni par le produit infini

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x-b_n}{x-a_n}$$

Montrons que ce produit converge uniformément sur A.

Notons que

$$\frac{x-b_n}{x-a_n} = 1 + \frac{a_n - b_n}{x-a_n}$$

et que pour $x \in A$, on aura $\|x-a_n\| \leq \rho_n < \|a_n - b_n\|$.

Rappelons qu'on a vu au § 7 que pour $\|c_i\| > 0$ on a :

$$\left\| \prod_{i=1}^{k} (1+c_i) - 1) \right\| \geq \inf_{1\leq i\leq k} \|c_i\|$$

Alors, pour $m > n \geq N$ et $x \in A$, on a :

$$\left\| \prod_{k=1}^{m} \frac{x-b_k}{x-a_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{x-b_k}{x-a_k} \right\| = \left\| \prod_{k=1}^{n} \frac{x-b_k}{x-a_k} \right\| + \left\| \prod_{k=n+1}^{m} \frac{x-b_k}{x-a_k} - 1 \right\|$$

Mais on a

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} \frac{x-b_k}{x-a_k} \right\| = 0$$

$$\left\| \prod_{k=n+1}^{m} (1+\frac{a_k-b_k}{x-a_k}) - 1 \right\| \geq \inf_{n<k\leq m} (\|a_k-b_k\| - \|x-a_k\|) \geq \inf_{n<k\leq m} (\|a_k-b_k\| - \rho_k$$

Etant donné M, choisissons N tel que $k \geq N$ implique $\|a_k - b_k\| - \rho_k \geq M$, on aura alors pour $m > n \geq N$ et $x \in A$

$$\left\| \prod_{k=1}^{m} \frac{x-b_k}{x-a_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{x-b_k}{x-a_k} \right\| \geq M$$

ce qui prouve que le produit infini converge uniformément sur A .

Montrons alors que f ne se prolonge pas sur un quasi-connexe B contenant A . Pour simplifier, supposons la suite $\|a_n\|$ décroissante. Alors f se prolonge en une fonction analytique sur la quasi-connexe $Q = \{x \mid \|x\| > r \ , \forall n \quad x \neq a_n\}$ et f n'est pas bornée au voisinage des points a_n (f y a des pôles). Si f se prolongeait sur le quasi-connexe B , f se prolongerait sur le quasi-connexe $B \cup Q$ qui contiendrait tous les points a_n , sauf un nombre fini , f devrait donc être bornée en ces points, ce qui contredit ce que nous venons de voir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe. - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique en analyse p-adique. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t 269, p. 126-129, (1969).

[2] MOTZKIN Elhanan. - Une condition nécessaire pour l'équivalence conforme des domaines d'analyticité en analyse p-adique. (à paraître).

[3] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Publications Mathématiques, n° 14 de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1962).

[4] KRASNER Marc. - Comptes rendus, t. 238, p. 2385 (1954) , t. 235 p. 468-745 (1955).

KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, dans Les Tendances géométriques en algèbre et en théorie des nombres (Colloque de Clermont-Ferrand, 1964), Editions du C. N. R. S. (1966).

[5] DESCOMPS-GUILLOUX Annette et MOTZKIN Elhanan. - Fonctions analytiques univalentes dans un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Comptes rendus, t. 268, p. 1531 (1969).
