SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

ELHANAN MOTZKIN
PHILIPPE ROBBA

Ensembles d'analyticité en analyse *p*-adique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 2, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A2_0>

ENSEMBLES D'ANALYTICITE EN ANALYSE p-ADIQUE

par

Elhanan MOTZKIN et Philippe ROBBA

On appelle $\hat{\Omega}_p$ la clôture algébrique du complété du corps des rationnels muni de la valeur absolue p-adique.

Nous nous proposons de démontrer le :

THEOREME. Un ensemble quasi-connexe est un ensemble d'analyticité. Autrement dit, étant donné un quasi-connexe A, il existe une fonction analytique f sur A qui ne peut être prolongée analytiquement sur aucun quasi-connexe K contenant A.

Nous allons construire explicitement cette fonction. Mais pour ce faire, il faut d'abord étudier de près la nature des quasi-connexes ou plutôt de leurs complémentaires. Un ensemble dont le complémentaire est un quasi-connexe sera appelé un c-q-c (complémentaire de quasi-connexe).

Soit A un quasi-connexe, B son complémentaire. Nous supposerons désormais que B est borné, ce que l'on peut toujours obtenir à l'aide d'une inversion puisque A est ouvert.

LEMME 1. Soit B un c-q-c-borné, et soit Δ le plus petit disque fermé contenant B. Soit Δ_o un des disques intérieur de Δ. Alors $\Delta_o \cap B$ est

a) soit le disque ouvert Δ_o tout entier,

b) soit un c-q-c contenu dans un disque fermé Δ' de rayon inférieur à celui de Δ_o,

c) soit l'ensemble vide.

Il suffit de prouver b. Or $\complement \Delta_o$ et $\complement B$ sont des quasi-connexes d'intersection non vide ; leur réunion est donc un quasi-connexe et donc $\Delta_o \cap B$ est un c-q-c. Maintenant, si $\Delta_o \cap \complement B$ est non vide et différent de Δ_o, soit a un point de $\Delta_o \cap \complement B$, puisque $\complement B$ est quasi-connexe il existe un nombre fini de rayons exceptionnels $r_1 < \ldots < r_n$ tel que B soit contenu dans la réunion des cercles $|X-a| = r_1 \ldots |X-a| = r_n$. Δ est le disque $|X-a| \leq r_n$. Δ_o est le disque $|X-a| < r_n$ et donc $\Delta_o \cap B$ est contenu dans le disque $|X-a| \leq r_{n-1} < r_n$.

LEMME 2. Soit A un quasi-connexe (dont le complémentaire est borné). Il existe une suite finie ou dénombrable de disques ouverts disjoints $D_k : |x-a_k| < r_k$ contenus dans $\complement A$ et une suite finie ou dénombrable de points (b_k) appartenant au complémentaire de la réunion de A et des D_k, tels que, si K est un quasi-connexe contenant A strictement, alors :

a) ou K intersecte l'un des disques ouverts, D_k par exemple et alors $A \cup (K \cap D_k)$ est quasi-connexe

b) ou K contient un disque D contenant au moins un des b_k et tel que $A \cap D \neq \emptyset$.

(Le ou n'est évidemment pas exclusif).

Soit Δ le plus petit disque fermé contenant $\complement A = B$. Si Δ est de rayon nul, il est réduit à un point et B aussi. On choisit alors ce point qui répond à la question. Si le rayon de Δ ne fait pas partie du groupe des valeurs de $\hat{\Omega}_p$, Δ n'a qu'un disque intérieur coïncidant avec lui et alors on a $B = \Delta$. On choisit ce disque ouvert qui répond à la question. Si on n'est dans aucun de ces deux cas, soit $\Delta_1 \ldots \Delta_n \ldots$ la famille dénombrable des disques intérieurs de Δ .

Considérons $B \cap \Delta_n$. Si $B \cap \Delta_n = \Delta_n$, Δ_n sera un des disques D_k annoncés.

Si $B \cap \Delta_n$ est non vide et différent de Δ_n , on choisit un point β de $B \cap \Delta_n$. On notera qu'il existe alors un m différent de n pour leque $B \cap \Delta_n$ n'est pas vide.

Soit alors Δ'_n le plus petit disque fermé contenant $B \cap \Delta_n$. On recommence le raisonnement : ou Δ'_n est aussi un disque ouvert et $B = \Delta'_n$ sera un des D_k , ou Δ'_n se réduit à un point et $B \cap \Delta_n$ est un point qui sera un des b_k , ou alors il y a une infinité de disques intérieurs $\Delta_{n_1} \ldots \Delta_{n_m}$ et on poursuit le raisonnement.

On obtient ainsi une famille finie ou dénombrable de disques ouverts qui sont nos D_k et une famille finie ou dénombrable de points de $\complement A$. La suite (b_k) sera formée de points de cette famille qui n appartiennent à aucun des D_k .

Soit alors K un quasi-connexe contenant A et soit x un point de $K \cap \complement A$. Alors soit x appartient à l'un des D_k et le lemme est prouvé (on vérifie sans peine que $(K \cap D_k) \cup A$ est un quasi-connexe), soit x est un des points obtenus lorsque $B \cap \Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ était restreint à un point, x appartient à la suite b_k , et un disque de centre x et de rayon assez petit est conten dans K et intersecte A , enfin soit x appartient à l'intersection d'une suite infinie de disques ouverts emboités $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$, $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_p, n_{p+1}}$.

On notera $\Delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots}$ l'intersection de ces disques. Alors K doit contenir un disque D de centre x et contenant tous les $\Delta_{n_1, \ldots n_p}$ à partir d'un certain indice n_p car autrement K ne serait pas quasi-connexe, ce qui achève la démonstration.

LEMME 3. Soit D le disque ouvert $|X-a| < r$. Il existe une fonction analytique sur $\complement D$, f, de module majoré par 1, qui ne peut pas être prolongée analytiquement en dehors de $\complement D$.

Soit β_n une suite d'entiers > 0 tels que $\beta_n \to +\infty$ et $\frac{\beta_n}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit α_n une suite d'entiers ≥ 0 tels que $p^{\alpha_n} < r^n \leq p^{\alpha_{n+1}}$.

On pose $c_n = p^{\beta_n - \alpha_n}$, alors $|c_n| = p^{\alpha_n - \beta_n}$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}$ converge uniformément pour $|x| \geq r$, puisque $\frac{|c_n|}{|x^n|} \leq \frac{|c_n|}{r^n} \leq p^{-\beta_n}$ et que ce dernier terme tend vers 0 puisque $\beta_n \to +\infty$.

Mais le rayon de convergence de cette série est r puisque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} p^{\frac{\alpha_n}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} p^{-\frac{\beta_n}{n}}, \text{ or } \lim_{n\to\infty} p^{\frac{\alpha_n}{n}} = r \text{ et } \lim p^{-\frac{\beta_n}{n}} = 1 .$$

On sait [1] qu'alors la fonction f somme de cette série ne peut pas être prolongée en dehors de $\complement D$.

De plus, f est majorée en module par 1 puisque chaque terme de la série l'est.

<u>Démonstration du théorème.</u> Soit donc A un quasi-connexe, avec $B = \complement A$ borné. Soient $D_k \ |x-a_k| < r_k$, et b_k les disques et les points définis au lemme 2 . Soit f_k la fonction associée au disque D_k au lemme 3 . Soient α_k et β_k deux suites de nombres p-adiques non nuls tels que $|\alpha_k|$ et $|\beta_k|$ tendent vers zéro quand k tend vers l'infini et que l'on ait $|\beta_i| \neq |\beta_j|$ pour $i \neq j$.

On appellera A_ε l'ensemble des points de A qui sont à une distance supérieure à ε du complémentaire de A . Pour tout $\varepsilon > 0$, A_ε est un quasi-connexe et $\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A$.

La fonction annoncée dans le théorème est la fonction :

$$f(x) = \sum_k a_k f_k(x) + \sum_k \frac{\beta_k}{x-b_k}$$

On voit que la première série converge uniformément sur le complémentaire de $\bigcup_k D_k$ donc sur A , et que la deuxième converge uniformément sur l'ensemble E_ε des points x tels que $|x-b_k| > \varepsilon$ pout tout k , donc sur A_ε et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est donc bien une fonction analytique sur A .

Supposons alors que f se prolonge sur un quasi-connexe K contenant A . Si K intersecte le disque D_m , f se prolonge a fortiori sur le quasi-connexe $A \cup (K \cap D_m)$. La série $\sum_{k\neq m} \alpha_k f_k(x)$ convergeant uniformément sur $\complement \bigcup_{k\neq m} D_k$ définit une fonction analytique sur $A \cup (K \cap D_m)$. De même la série $\sum_k \frac{\beta_k}{x-b_k}$ converge uniformément sur E_{r_m} qui contient D_m , donc cette série définit aussi une fonction analytique sur $A \cup (K \cap D_m)$, donc si f se prolonge sur $A \cup (K \cap D_m)$, la fonction :

$$\alpha_m f_m(x) = f(x) - \sum_{k \neq m} \alpha_k f_k(x) - \sum_k \frac{\beta_k}{x-b_k} ,$$

se prolonge aussi sur $A \cup (K \cap D_m)$ ce qui contredit la définition de f_m.

Supposons alors que K ne rencontre aucun des D_k, il contient alors un disque D contenant au moins un b_n et tel que $A \cap D \neq \emptyset$. Alors $A \cup D$ est un qausi-connexe et si f se prolonge sur K elle se prolonge a fortiori sur $A \cup D$. D n'intersecte aucun des D_k. Soient $(b_i)_{i \in I}$ les points de la suite b_k qui appartiennent à D. On voit facilement que les séries $\sum_k \alpha_k f_k(x)$ et $\sum_{k \notin I} \frac{k}{x-b_k}$ définissent des fonctions analytiques sur $D \cup A$. Donc si f se prolonge sur $D \cup A$, la fonction :

$$g(x) = \sum_{i \in I} \frac{\beta_i}{x-b_i} = f(x) - \sum_k \alpha_k f_k(x) - \sum_{k \notin I} \frac{\beta_k}{x-b_k} ,$$

se prolonge sur $D \cup A$. Or, comme cette série converge uniformément sur $E_\varepsilon \cup \complement D$ qui est un quasi-connexe et que pour ε assez petit E_ε intersecte A, g définit même une fonction analytique sur tout $\hat{\Omega}_p$ y compris le point à l'infini donc $g(x)$ doit être constante et même nulle puisqu'on voit que $|g(x)| \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

Mais, si on effectue le développement en série de Laurent de g pour $|x|$ grand, on trouve que le coefficient du terme $\frac{1}{x}$ est $\sum_{i \in I} \beta_i \neq 0$. On obtient donc une contradiction, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. KRASNER : Colloque C. N. R. S. , Clermont-Ferrand, 1964.
